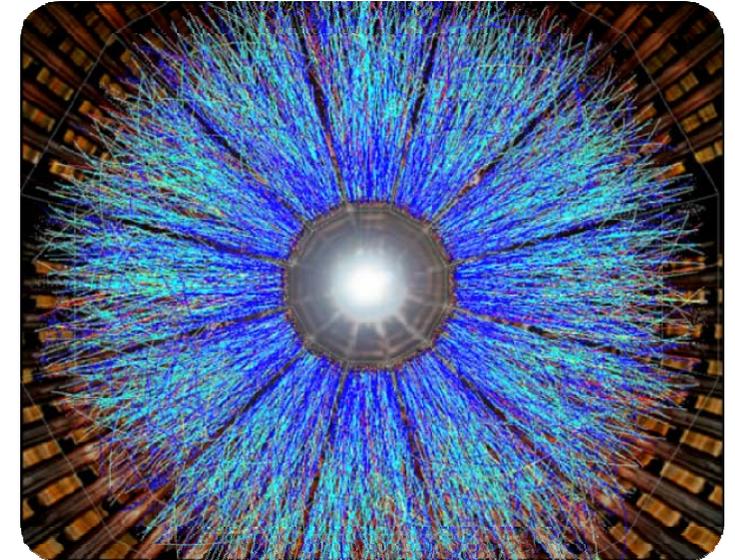


Kerne und Teilchen

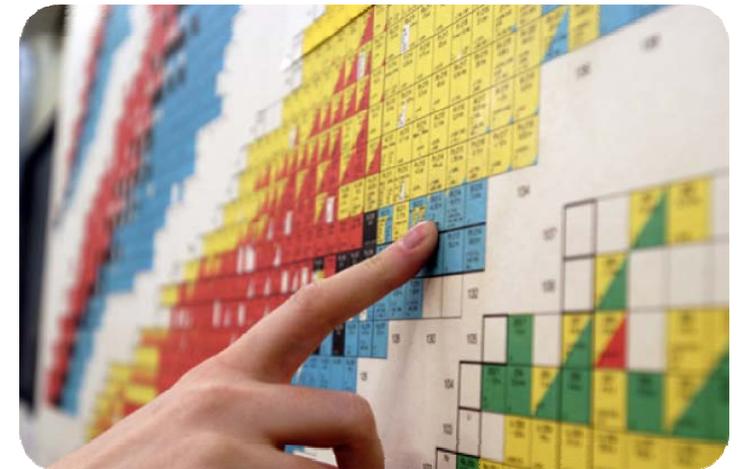
Moderne Physik III

Vorlesung # 2



2. Eigenschaften stabiler Kerne

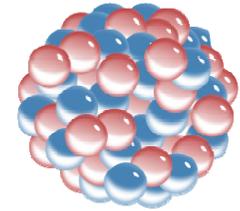
- Wirkungsquerschnitt:
Definition, totaler Wq. σ_{tot}
- differentieller Wq. $d\sigma/d\Omega$
- Mott-Streuung
- Formfaktor $F(q^2)$ &
Ladungsverteilung $\rho(r)$ von Kernen



2. Eigenschaften stabiler Kerne

Radius & Form

- Größe: Kernradius ($R = 1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$)
- Form: sphärisch / Deformation (prolat/oblat)



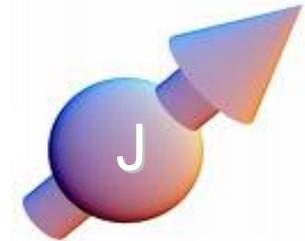
Dichte & Masse

- Kernmaterie mit konstanter Dichte ($\rho = 10^{17} \text{ kg/m}^3$)
- Kernmassen & Stabilitätstal



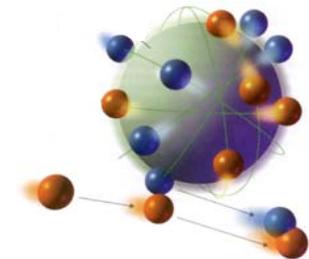
Zustände

- Quantenzahlen Spin S, Parität P, magnetisches Moment μ
- Schalenstruktur: „Leucht“-Nukleonen, kollektive Anregung



Reaktionen

- Bindungsenergien: Fusion & Spaltung, nukl. Astrophysik
- spezielle Reaktionen: Austausch/Transfer



Kern- & Teilchenphysik: spezielle Einheiten

natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$

Masse	1 GeV
Länge	1 GeV ⁻¹ = 0.1975 fm
Zeit	1 GeV ⁻¹ = 6.59 · 10 ⁻²⁵ s

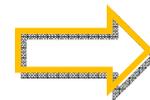
Masse: GeV/c² Impuls: GeV/c

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Atomphysik

α : Feinstrukturkonstante = 1/137

m_e : Elektronmasse = 0.511 MeV



$r_{\text{Atom}} \sim 10^{-10}$ m

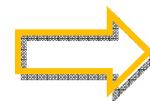
$\rho_{\text{Atom}} \sim 10^3$ kg/m³

klass. Wechselwirkung unbegrenzter Reichweite: elektromagnet. Feld

Kernphysik

α_s : starke Kopplungskonstante = 0.2

m_N : Nukleonmasse = 939 MeV



$r_{\text{Kern}} = (2-8) \cdot 10^{-15}$ m

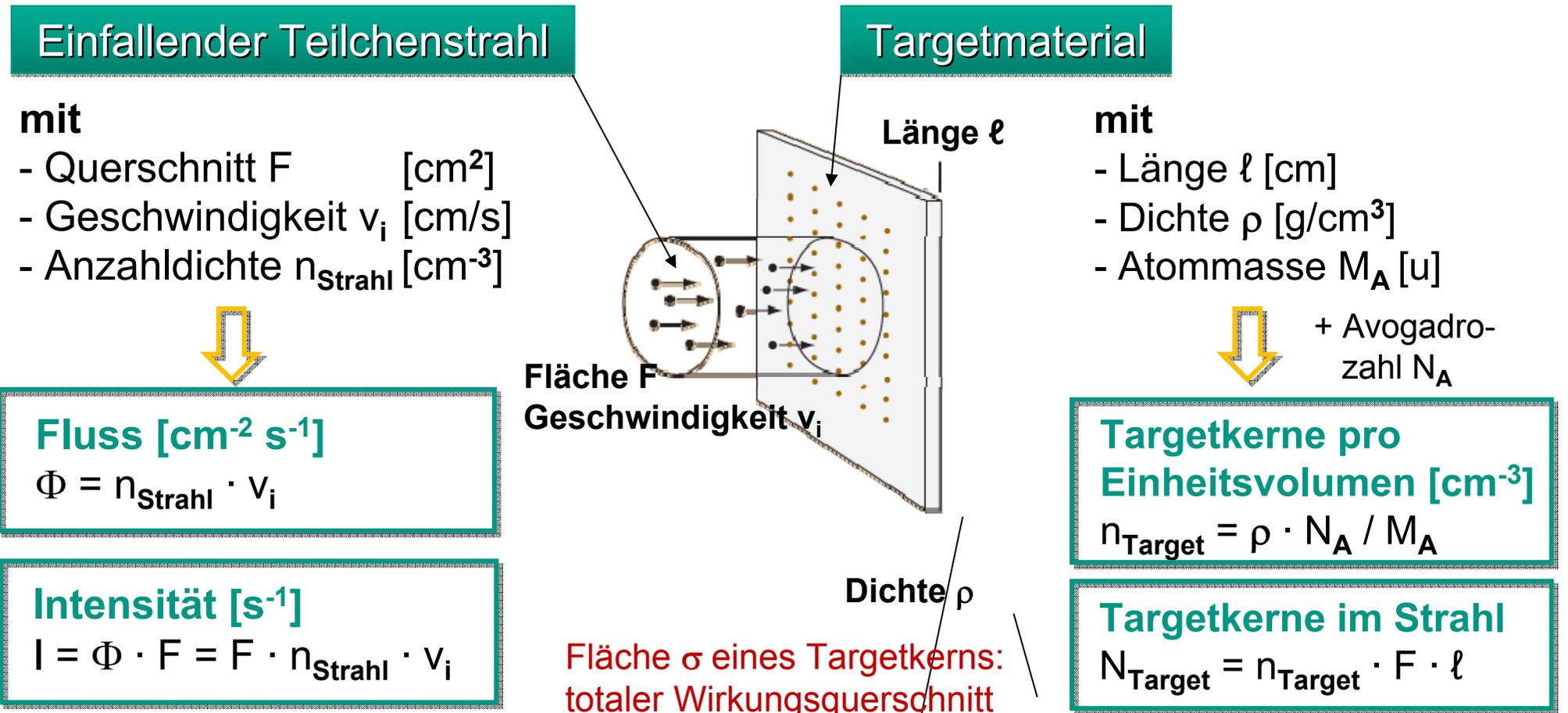
$\rho_{\text{Kern}} \sim 10^{17}$ kg/m³

fm

neue Wechselwirkungen begrenzter Reichweite: starke & schwache Ww.

Parameter eines Streuexperimentes

- Typischer Aufbau eines **Streuexperimentes**: (Bs. Rutherfordexperiment)
ein Teilchenstrahl trifft senkrecht auf ein dünnes Target ('fixed target' Aufbau)



Totaler Wirkungsquerschnitt

Rate W_r an Streuereignissen $[s^{-1}] \sim$ totalem Wirkungsquerschnitt σ_{tot}

$$W_r = \Phi \cdot N_{\text{Target}} \cdot \sigma_{\text{tot}} = I \cdot n_{\text{Target}} \cdot \ell \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

↓ ↓
Strahl Target:
Fluss Kerne
im Strahl

↓ ↓
Strahl:
Intensität

↓ ↓
Target: Targetkerne pro Einheitsvolumen (cm^3)
× Targetlänge

$$[s^{-1}] = [cm^{-2} \cdot s^{-1}] \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

$$[s^{-1}] = [s^{-1} \cdot cm^{-3} \cdot cm] \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

$$\sigma_{\text{tot}} = [cm^2]$$

der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche

σ_{tot} ist ein Maß für Wahrscheinlichkeit einer (Streu-)Reaktion

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Sekunde pro Streuzentrum (Targetkern)}}{\text{Zahl einfallender Teilchen pro Sekunde pro } cm^2 \text{ (Fluss-/Stromdichte)}}$$

Wirkungsquerschnitt als Streufläche

Einheit des Wirkungsquerschnitts σ_{tot} :

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad [\text{barn} = \text{Scheunentor}]$$

$$1 \text{ mb} = 10^{-27} \text{ cm}^2, \text{ Teilchenphysik: } 1 \text{ pb} = 10^{-36} \text{ cm}^2, 1 \text{ fb} = 10^{-39} \text{ cm}^2$$

σ_{tot} stellt eine effektive Fläche dar für Streuprozesse/Wechselwirkungen

geometrischer Streuquerschnitt: $\sigma_{\text{geom}} = \pi \cdot (R + r)^2$

Beispiel für Streuung eines 6 MeV α -Teilchens an ^{197}Au :

$$R (^{197}\text{Au}) = 7 \text{ fm} = 7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$A = \pi r^2 = 154 \text{ fm}^2 = 1.54 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$\text{geometrischer Streuquerschnitt } \sigma_{\text{tot,geom}} = 1.54 \text{ b}$$

$$[1 \text{ barn} = 100 \text{ fm}^2]$$

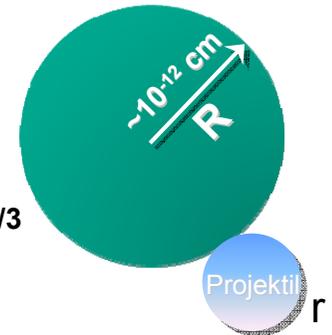
d.h. ein α -Teilchen mit Stoßparameter $b = 7 \text{ fm}$ hat einen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = 1.54 \text{ b} \text{ für elastische Streuung an } ^{197}\text{Au} \text{ (Streuwinkel } \theta \sim 140^\circ)$$

- für Neutronen-Reaktionen wird auch beobachtet: $\sigma_{\text{tot}} > \sigma_{\text{geom}}$

- für Niederenergie-Neutrino-Reaktionen an Kernen $\sigma_{\text{tot}} \sim 10^{-18} \text{ b} (\sim 10^{-6} \text{ pb})$

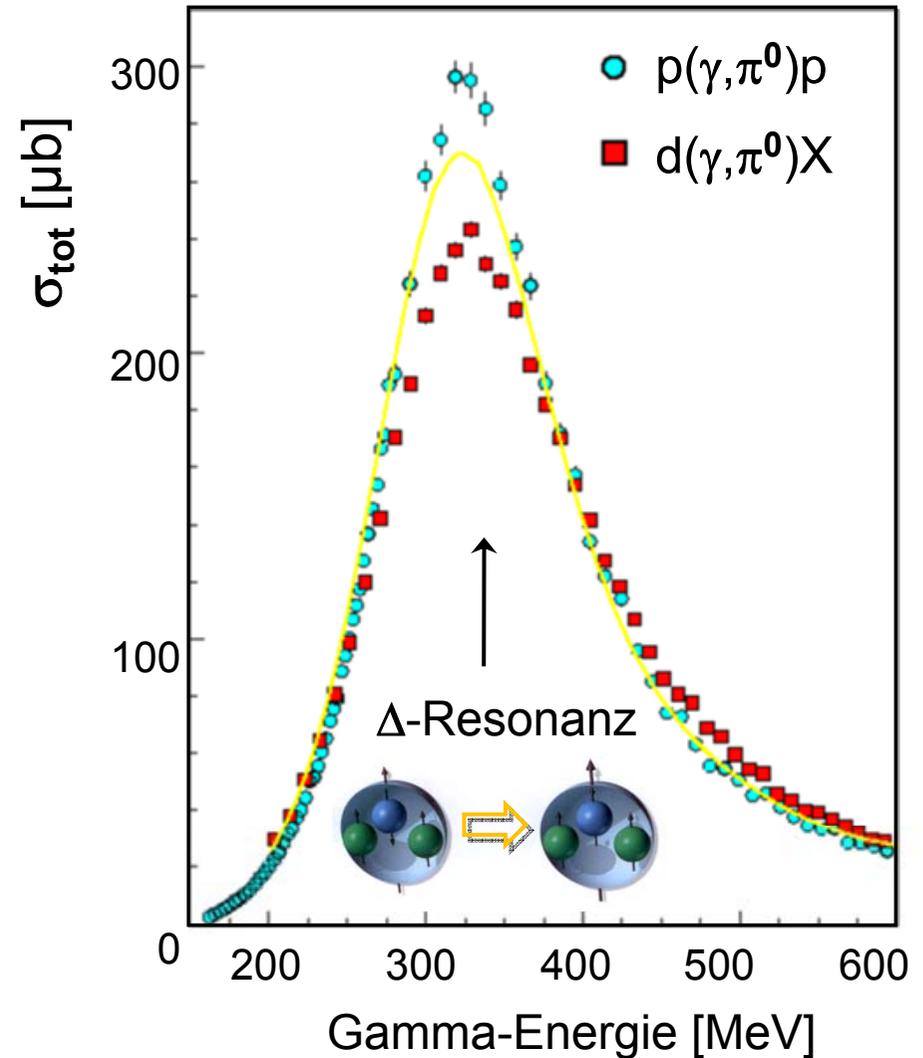
$$R_0 = 1.2 \text{ fm } A^{1/3}$$



zur Messung von σ_{tot} erforderlich:

- Zahl einlaufender Teilchen/s
- Messdauer t
- Detektor-Raumwinkelement $d\Omega$
- Streuwinkel θ
- Zahl gestreuter Teilchen
- Targetdicke
- Targetdichte
- Kernmasse der Targetatome
- Avogadrozahl

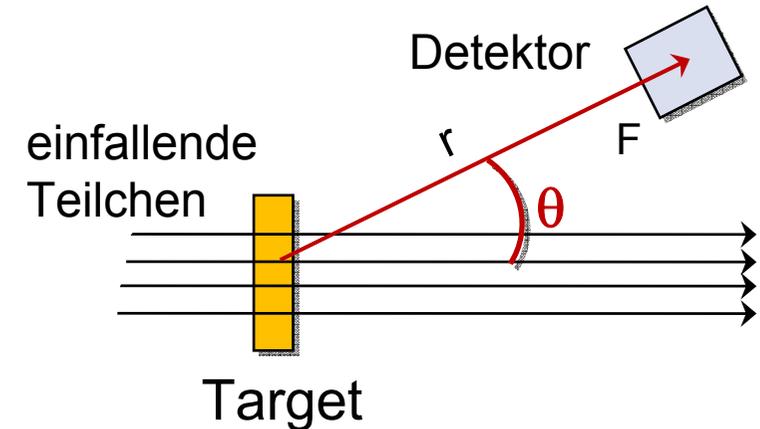
Energieabhängigkeit von σ_{tot}
 kann z.B. zum Nachweis neuer Teilchen (**Resonanzen**) führen, hier bei Reaktion $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$



Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$

ein Detektor(-element) deckt oft nur einen sehr kleinen Teil des gesamten Raumwinkels ab (d.h. ein Raumwinkel-Element $d\Omega = F/r^2$ ab):
der Detektor misst dann den

differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$:



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der nach } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Sekunde pro Streuzentrum}}{\text{Zahl einfallender Teilchen pro Sekunde pro cm}^2 \text{ (Fluss-/Stromdichte)}}$$

Einheit des differentiellen Wirkungsquerschnitts: $[\text{cm}^2/\text{sr}$ bzw. $\text{b}/\text{sr}]$
gesamter Raumwinkel um Target: $d\Omega = 4 \pi \text{ sr}$

i.a. gilt $d\sigma/d\Omega = d\sigma/d\Omega(\theta, \phi)$, diff. Wq. ist abhängig von Polar- & Azimutwinkel
oft gilt azimutale Symmetrie, d.h. $d\sigma/d\Omega = d\sigma/d\Omega(\theta)$

ein paralleler Teilchenstrahl (z.B. α 's) fliegt in einem dünnen Target durch Kreisring mit der **Fläche** $d\sigma = 2\pi \cdot b \cdot |db|$ (mit Streuparametern $[b, b + db]$) werde durch elastische Streuprozesse in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut (mit Streuwinkeln $[\theta, \theta - d\theta]$)

wichtig: keine Mehrfachstreuungen, keine Abnahme des Flusses im Target

$$d\sigma = 2\pi \cdot b \cdot |db|$$

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega$$

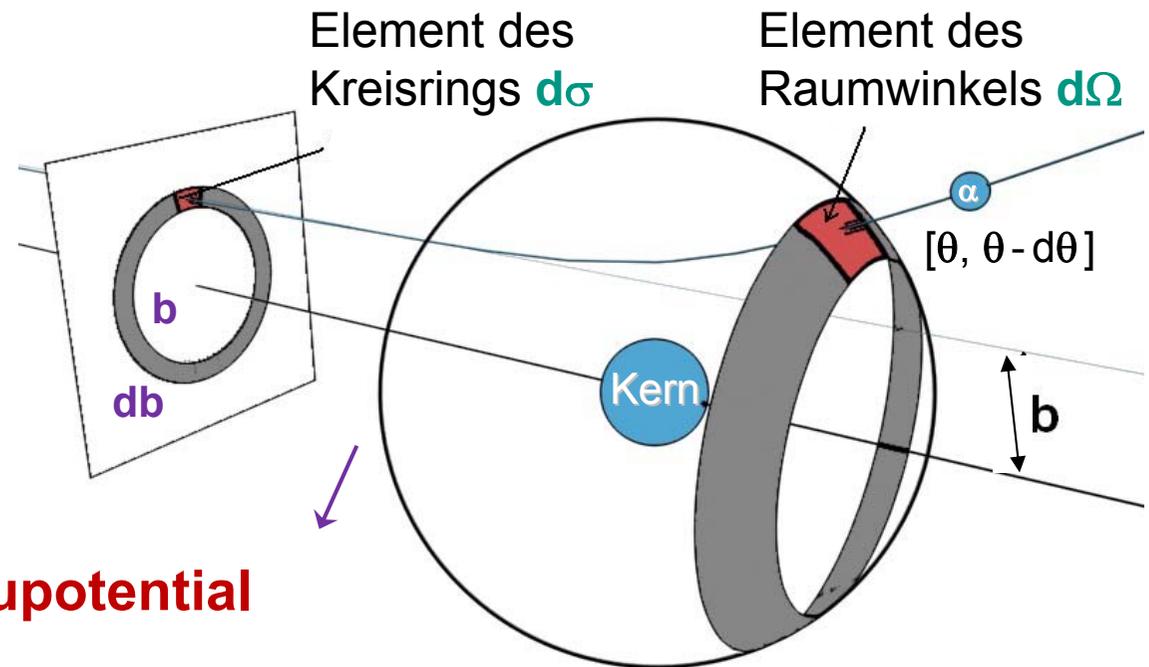
$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta d\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = (-) \frac{b}{\sin \theta} \cdot \frac{db}{d\theta}$$

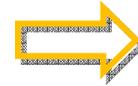
θ nimmt zu, wenn b abnimmt

Streupotential



differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$: beschreibt die Winkelverteilung gestreuter Teilchen in den Raumwinkel $d\Omega$

$$\left(\frac{dW_r}{d\Omega}\right) \cdot d\Omega = I \cdot n_{\text{Target}} \cdot \ell \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega$$



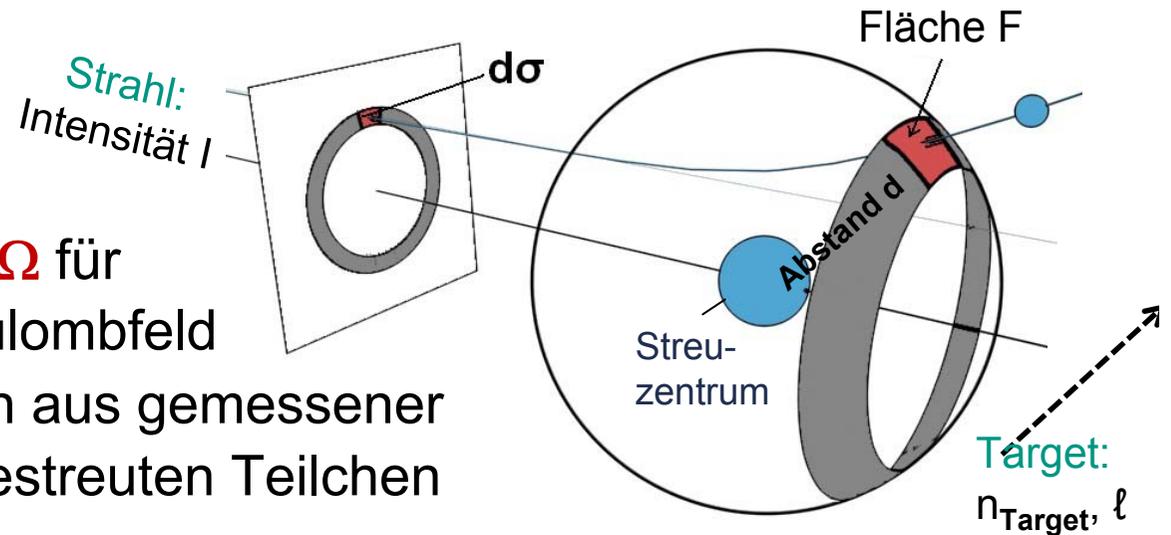
$$\left(\frac{dW_r}{d\Omega}\right) = I \cdot n_{\text{Target}} \cdot \ell \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

**Strahl-
intensität**
 **Targetkerne
pro $\text{cm}^3 \times \text{Länge}$**

Streurrate \sim differentieller Wirkungsquerschnitt

Rate R gestreuter Teilchen in einem Detektor mit Fläche F im Abstand d:

$$R = I \cdot n_{\text{Target}} \cdot \ell \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{F}{d^2}$$



diff. Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ für eine elastische Streuung am Coulombfeld in den Raumwinkel $d\Omega$ ergibt sich aus gemessener **Winkelverteilung** ($d \cos\theta$) der gestreuten Teilchen

Beispiel: Rutherford-Streuung

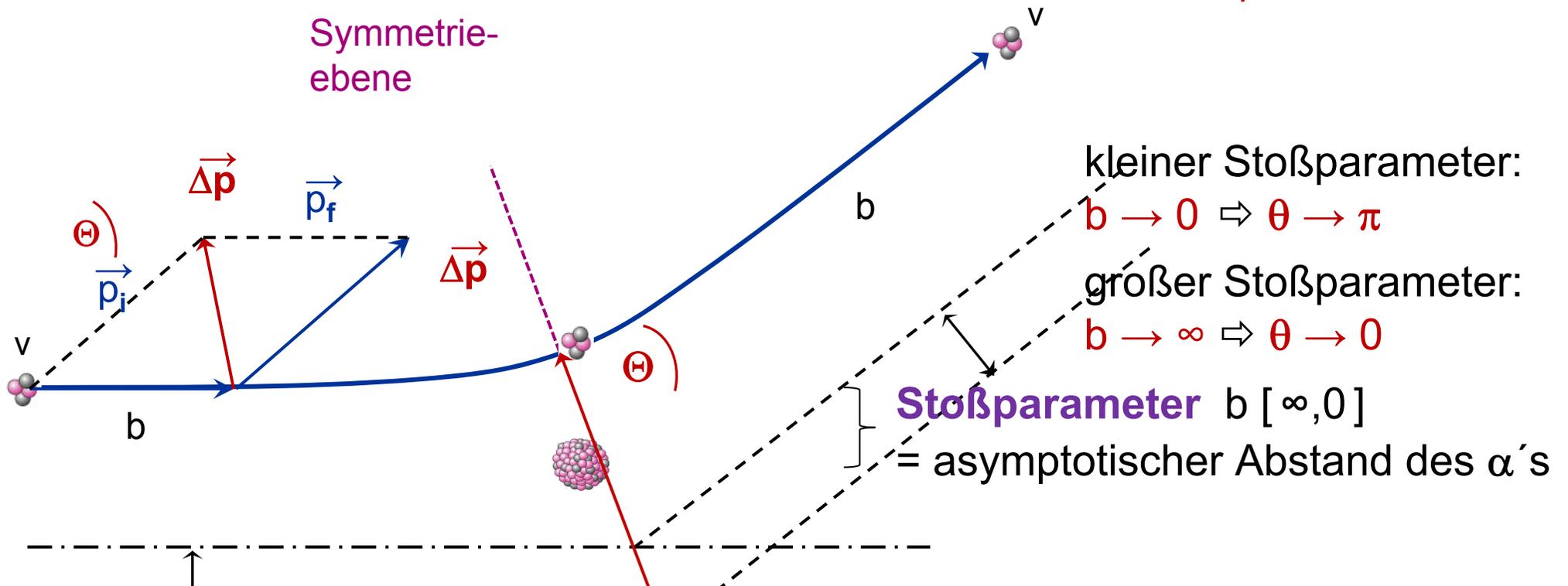
Rutherford-Streuung:

elastische Streuung eines α -Teilchens am Coulomb-Feld eines schweren Au-Kerns (keine Rückstoß-Energie) \Rightarrow Impulsänderung (-transfer) Δp

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z}{v^2} \cdot \frac{1}{b}$$

Relation zwischen Streuwinkel θ und Streuparameter b

für feste Energie E des α -Teilchens ist der Streuwinkel θ nur abhängig vom Stoßparameter b



Rutherford-Streuung: $d\sigma/d\Omega$

für die Rutherfordstreuung am konservativen Coulombfeld erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{4E_{kin}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)} \quad \text{mit } E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

mit den natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$ erhält man:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \left(\frac{z \cdot Z \cdot \alpha}{4E_{kin}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)} \quad \text{mit Feinstrukturkonstante } \alpha = 1/137$$

mit dimensionsbehafteten Einheiten [E in MeV] erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} [b] \approx 1.3 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{z \cdot Z}{E_0 [MeV]}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

divergenter Verlauf $d\sigma/d\Omega \rightarrow \infty$ für $\theta \rightarrow 0$: Stoßparameter b wird größer als Elektronenhülle (Screening des Potentials), bei vollständig ionisiertem Kern: Divergenz ist Effekt der elektromagnet. Ww. mit langreichweitigem $V(r) \sim 1/r$

Wirkungsquerschnitt σ_{tot} & Luminosität

der totale Wirkungsquerschnitt σ_{tot} ergibt sich aus der Integration von $d\sigma/d\Omega$:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{2\pi} d\Phi \cdot \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \right)$$



Φ : Azimutwinkel, θ : Streuwinkel

für Streuungen mit einer **azimutalen Symmetrie** gilt:

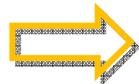
$$\sigma_{\text{tot}} = 2\pi \cdot \int_0^\pi d\theta \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)$$

Teilchenphysik: Zusammenfassung von Strahl- & Target-Eigenschaften:

Luminosität

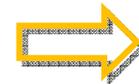
$$L = \Phi \cdot N_{\text{Target}}$$

Einheit [$\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$]



$$W_r = L \cdot \sigma_{\text{tot}}$$

Rate [s^{-1}]



$$N = \sigma_{\text{tot}} \cdot \int L dt$$

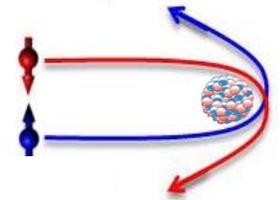
integrierte Luminosität

2.2 Kernradien und Formfaktoren

Rutherfordstreuung – elastische, nicht-relativistische Streuung von α -Teilchen ($S = 0$) am Coulombfeld des punktförmigen Kerns

bei höheren Energien E_{kin} bzw. anderen Teilchenarten mit Spin ($e, \mu, p, \nu \dots$) entstehen Abweichungen durch:

- relativistische Effekte
- Effekte der **starken Wechselwirkung** (anderes Potentialverhalten)
- endliche Ausdehnung des Kerns: **Ladungsverteilung $\rho(r)$**
- interner **Spin** des Projektils (Dirac-Gl.)



Mott-Streuung + Formfaktoren



Nevill F. Mott (1905–1996)

de-Broglie Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot \hbar}{p} = \frac{2\pi \cdot \hbar}{\gamma \cdot m \cdot v}$$



de Broglie Wellenlänge λ des Projektils
 $\lambda \sim$ Kernradius R ($1 \text{ fm}^{-1} = 200 \text{ MeV}/c$)

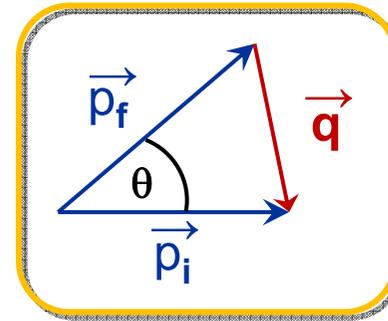
Impulsübertrag q

Definition für den **Impulsübertrag** \vec{q} bei einer elastischen Streuung:

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$$

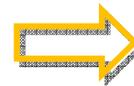
Betrag des Impulstransfers $q = |\vec{q}|$:

$$q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2 \cdot p_i \cdot p_f \cdot \cos \theta$$



ohne Kernrückstoß gilt $p_i = p_f = p$

$$q^2 = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - \cos \theta) = 4 \cdot p^2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



$$q = 2 p \cdot \sin (\theta/2)$$

damit nochmals die nichtrelativistische Rutherfordstreuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2 \cdot m_e \cdot Z \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

mit $E_{\text{kin}} = p^2/2 m_e$



$$d\sigma/d\Omega \sim 1/q^4$$

$\sim (\text{Photonpropagator } 1/q^2)^2$

Mott-Streuquerschnitt für relativistische Projektile mit Spin (kein Rückstoß):

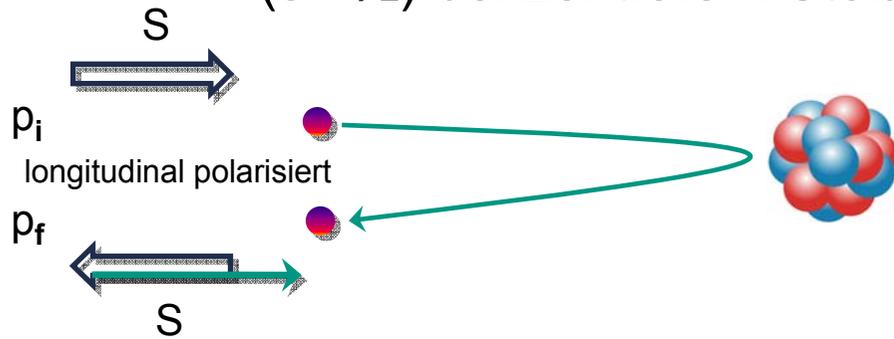
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$



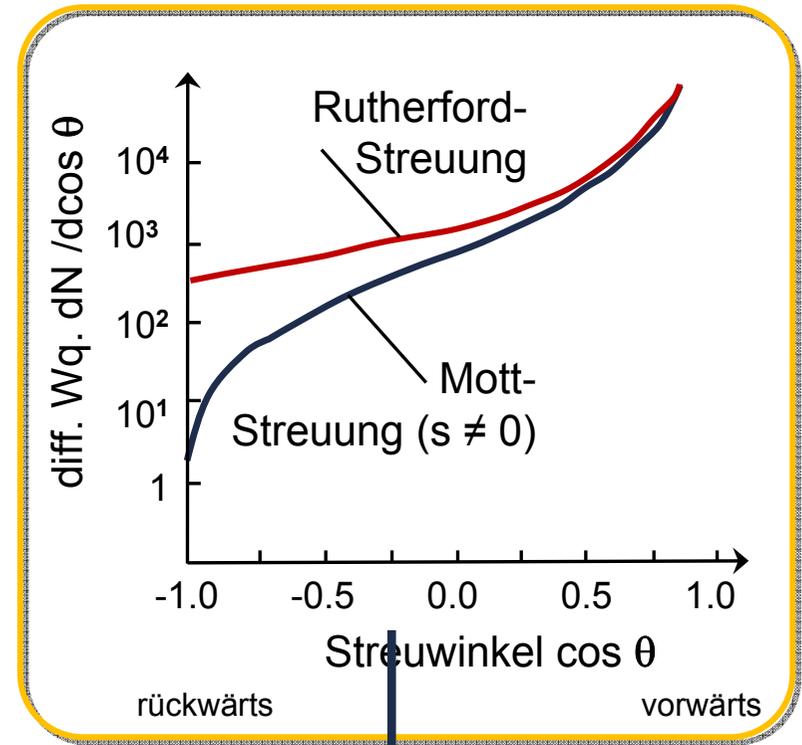
für $\beta \rightarrow 1$

berücksichtigt Spin-Effekte

Beispiel: Rückwärtsstreuung eines e^-
($s = 1/2$) bei zentralem Stoß ($\ell = 0$)



Elektronenspin müsste umklappen (Spin-Flip)
→ **Rückwärtsstreuung stark unterdrückt**



Formfaktor F(q)

Berücksichtigung der endlichen Kernaussdehnung, d.h. der ausgedehnten Ladungsverteilung $\rho(r)$ der Protonen im Kern, durch den **Formfaktor F(q)**

Born'sche Näherung:

Beugung einer einfallenden ebene Welle an einer Scheibe



Formfaktor $F(q^2)$ = Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung $\rho(r)$

$$F(q^2) = \int \rho(r) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$

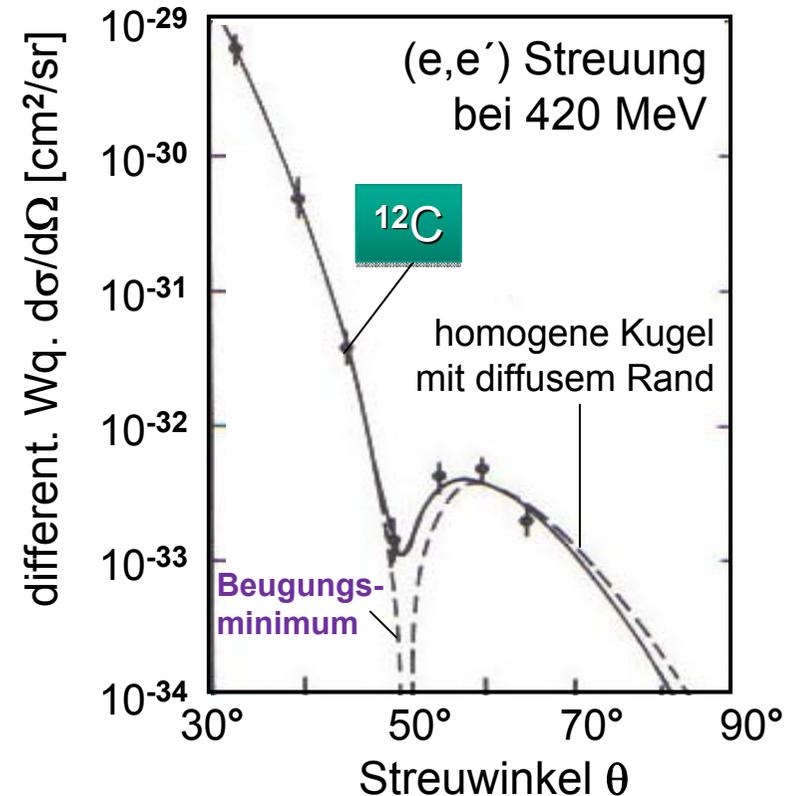


für Kerne ist $F(q^2)$ eine oszillierende Funktion

mit $\int \rho(r) d^3\vec{r} = 1$

Modifikation des differentiellen Mott-Wirkungsquerschnitts

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{exp.}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(q^2)|^2$$



Formfaktoren sind wichtig ab einem Impulstransfer $q \sim 1/R$, d.h. $q \sim 200 \text{ MeV}/c$

Beispiele für Ladungsverteilungen $\rho(r)$ & zugehörige Formfaktoren $F(q^2)$

punktförmig $\delta(r)$

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \delta(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad F(q^2) = 1$$

weit entfernte Flugbahnen, Kern erscheint punktförmig, keine Beeinflussung

homogene Kugel

$a = \text{Kernradius}$

$$\rho(r) = \rho_0 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{a^3} \quad \Rightarrow \quad F(q^2) = \frac{3}{(aq)^3} \cdot [\sin(aq) - aq \cdot \cos(aq)]$$

oszillierender Formfaktor

aus den **Beugungsminima** kann die **Größe des Kerns** bestimmt werden

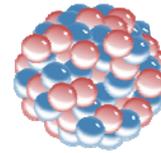
Kernladungsverteilungen

- Anpassung von $\rho(r)$ an experimentelle Streudaten $(d\sigma/d\Omega)_{\text{exp}}$ ergibt die **Saxon-Woods Verteilung** für ausgedehnte Kerne:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

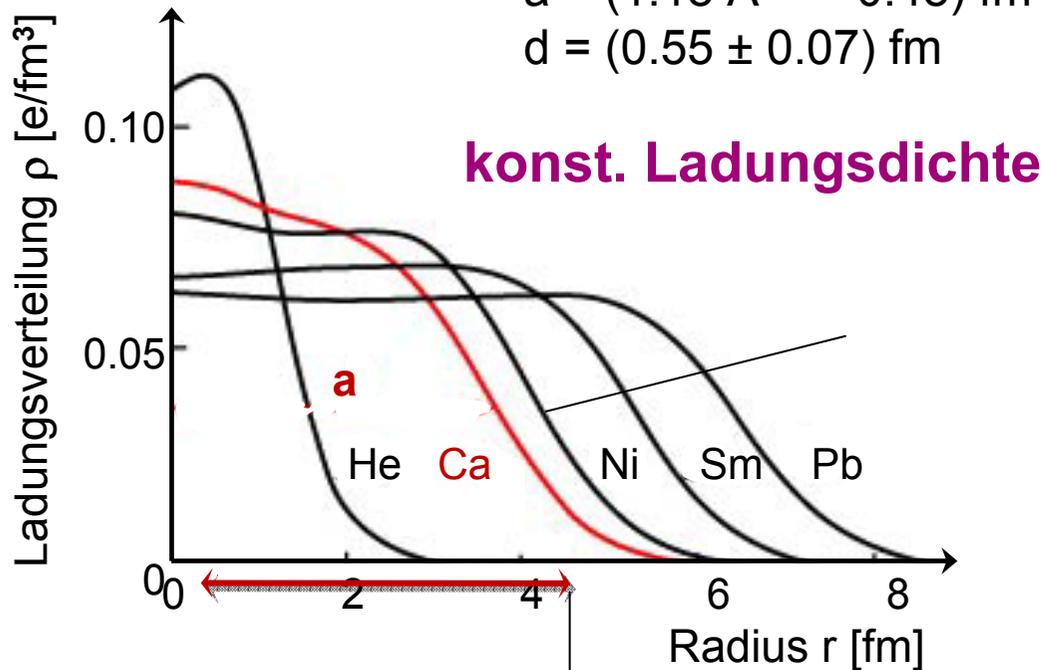
Kernradius a

Skin-Dicke d

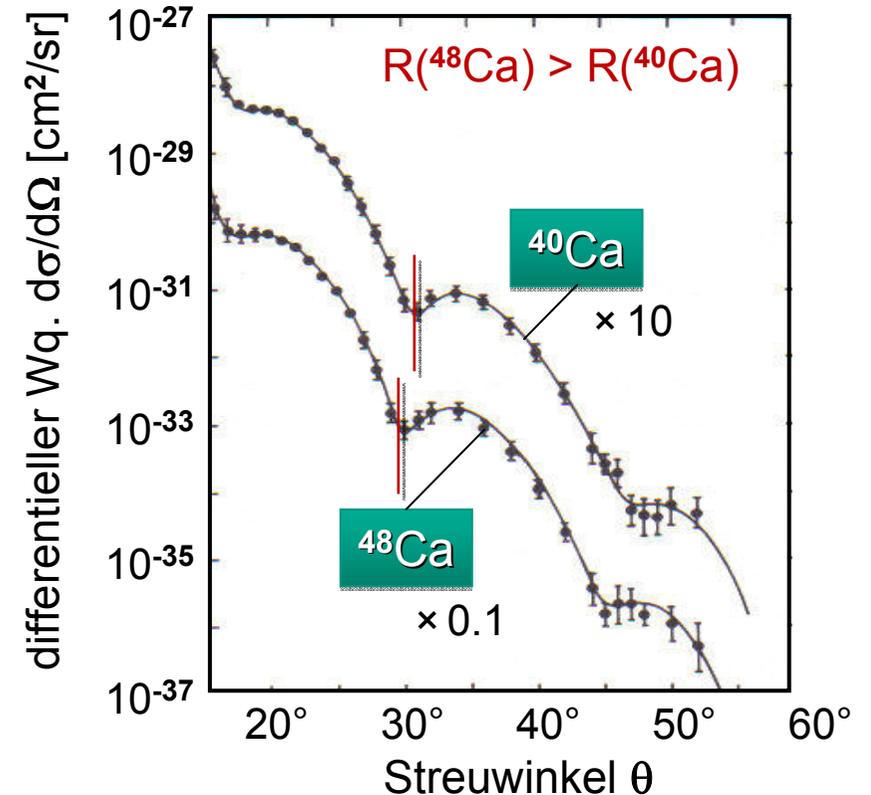


$$a = (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}$$

$$d = (0.55 \pm 0.07) \text{ fm}$$



Isotopeneffekt von a in der Elektronstreuung



Ladungsverteilung & Formfaktor

