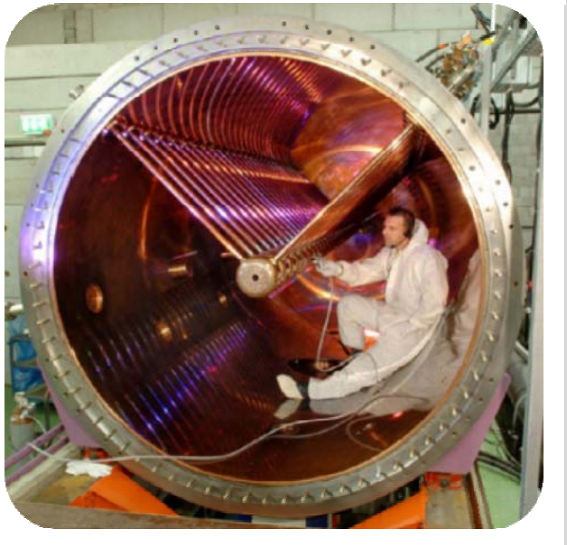
Kerne und Teilchen

Moderne Physik III

Vorlesung # 3

2. Eigenschaften stabiler Kerne

- Kernmodelle: Überblick
- Kernmassen & Bindungsenergien/Nukleon
- Tröpfchenmodell
- Stabilitätstal & Massenparabeln
- superschwere Kerne
- Fermigasmodell



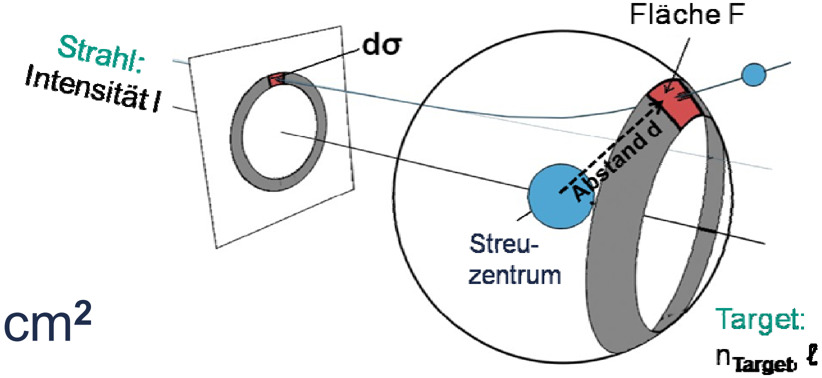
Wiederholung:Wirkungsquerschnitt

- σ_{tot} ist ein Maß für Wahrscheinlichkeit einer (Streu-)Reaktion

$$\boxed{\sigma_{tot} = \frac{W_r}{J \cdot N_{Target}}}$$

Strahl: Flussdichte J (Stromdichte)

Target: Kerne N_{Target} im Strahl



- Einheit des Wirkungsquerschnitts σ_{tot} :

1 barn = 1 b = 10^{-24} cm²

1 mb = 10^{-27} cm², 1 pb = 10^{-36} cm², 1 fb = 10^{-39} cm²

- $d\sigma/d\Omega$ ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit einer (Streu-)Reaktion in den Raumwinkel $d\Omega$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW_r/d\Omega}{I \cdot n_{\text{Target}} \cdot \ell}}$$

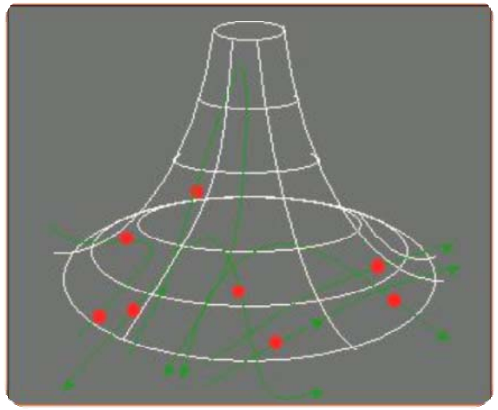
Strahl: Intensität I

Target: Kerne pro Einheitsvolumen × Länge

- $$\boxed{\sigma_{tot} = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot \sin\theta \cdot \left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)}$$

für azimutale Symmetrie

felderzeugendes Coulomb-Potenzial



Mott-Streuquerschnitt & Formfaktor F(q)

- bei der Streuung von **Teilchen mit Spin** (S = ½ wie z.B. Elektronen, Protonen, Neutrinos) ergibt sich beim **Mott-Streuquerschnitt** eine Unterdrückung der Rückwärtsstreuung bei θ = 180° (cos θ = -1)

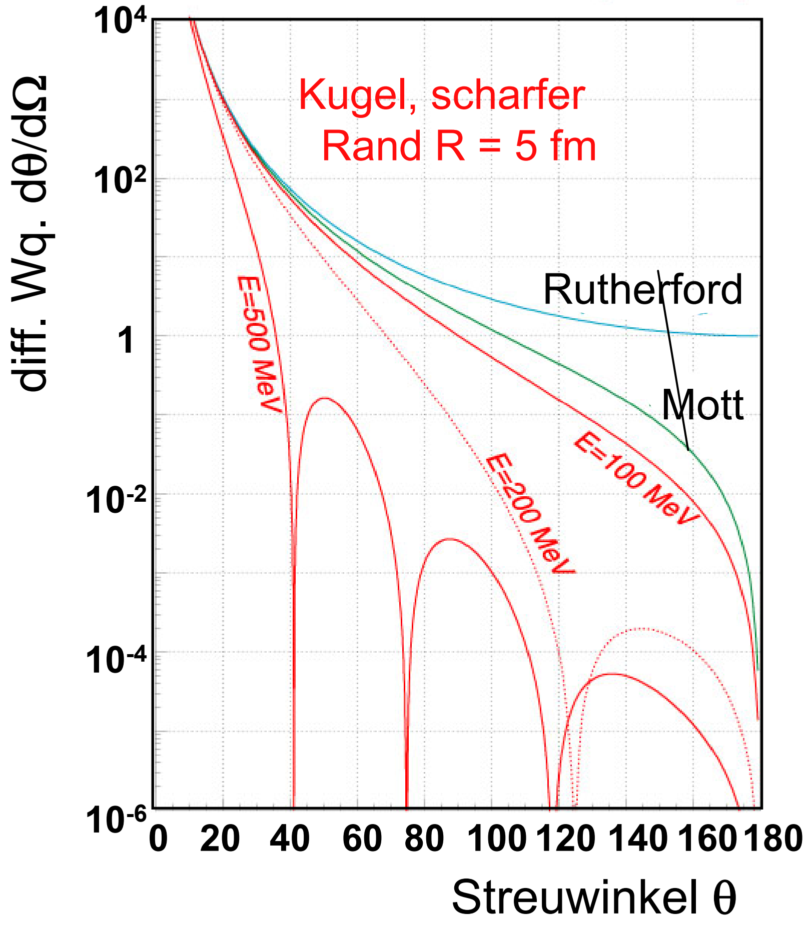
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- bei der Streuung an ausgedehnten Kernen ergeben sich Beugungseffekte, parametrisiert durch **Formfaktor F(q²)**

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left|F(q^2)\right|^2$$

$$F(q^2) = \int \rho(r) \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \, d^3\vec{r}$$

Formfaktor F(q²) = Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung ρ(r) des Kerns



Kernladungsverteilungen

- Anpassung von $\rho(r)$ an experimentelle Streudaten $(d\sigma/d\Omega)_{exp}$ ergibt **Saxon-Woods Verteilung** für ausgedehnte Kerne

- $$\boxed{\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}}$$

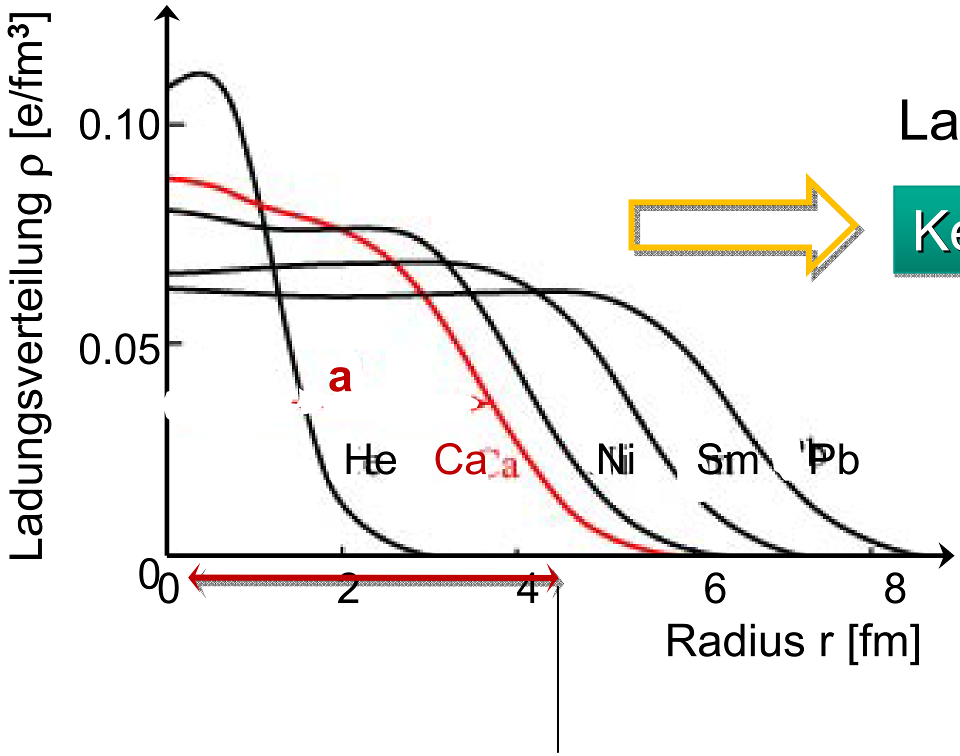
Kernradius a

Skin-Dicke d

$a = (\, 1.18\; A^{1/3} - 0.48)\ \text{fm}$

$d = (\, 0.55 \pm 0.07)\ \text{fm}$

$\rho_0 = (\, 0.06 - 0.08)\ e\,/\,\text{fm}^3$

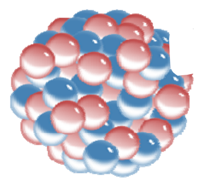


Ladungsverteilung bei kleinem r ~ konstant

Kernmaterie ist inkompressibel

Dichte der Nukleonen

$\rho_{Nukl} \approx 0.17$ Nukleonen/fm^3



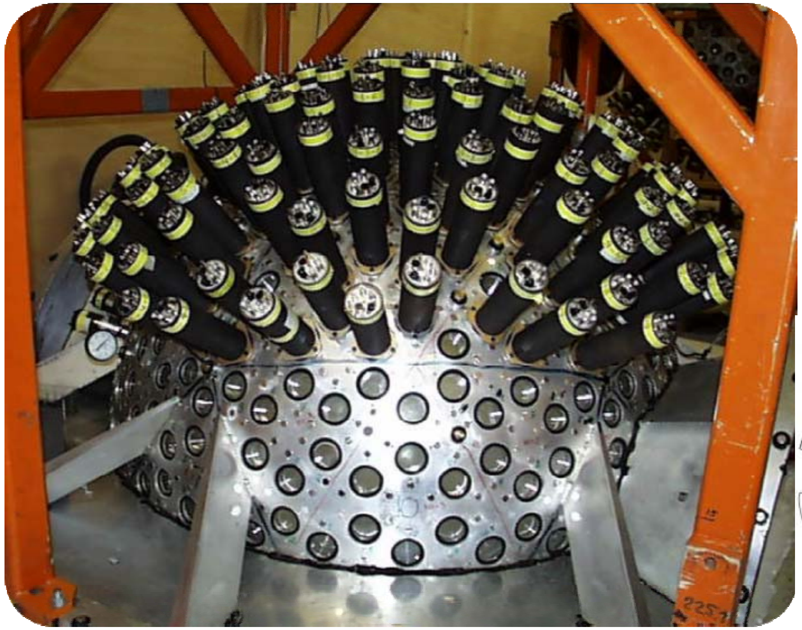
Dichte von Kernmaterie

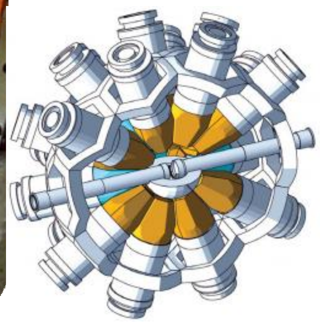
$\rho_{Kern} \approx 10^{17}\ \text{kg/m}^3$

Experimente zur Messung von σ_{tot} & $d\sigma/d\Omega$

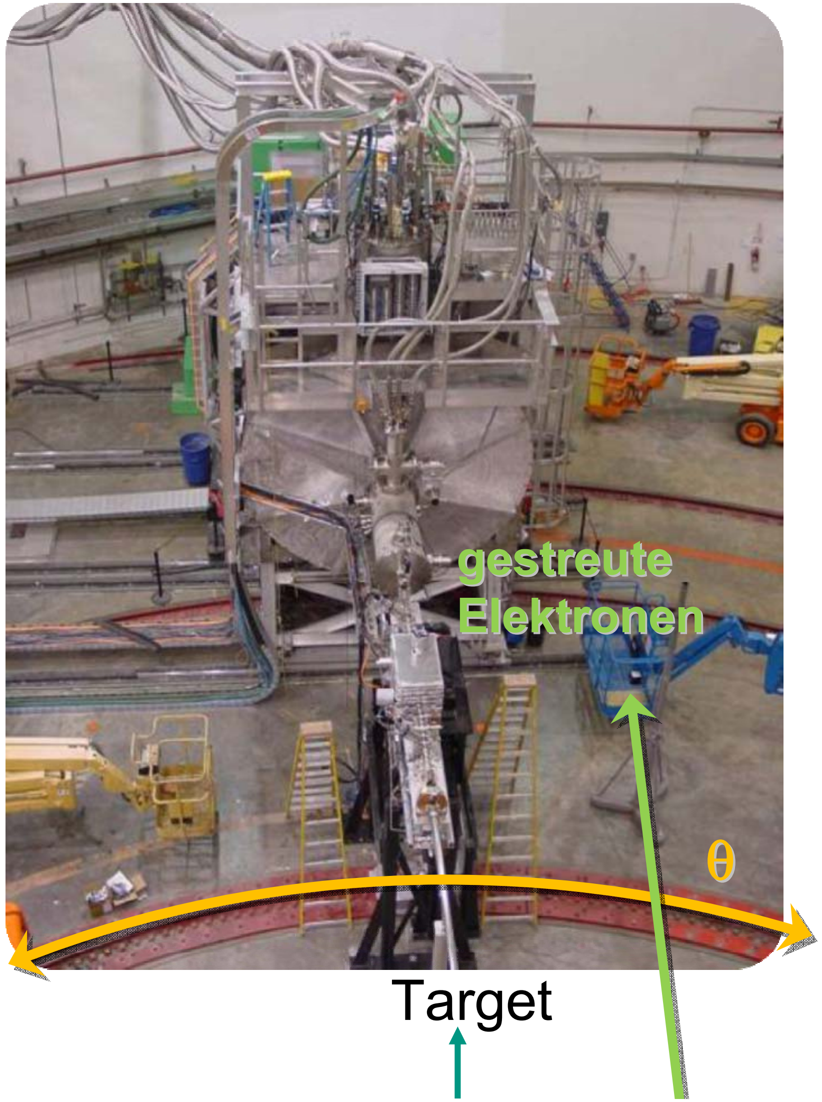
- die Geometrie einer experimentellen Anordnung wird entsprechend ihrer physikalischen Aufgabe optimiert:
  4 π Geometrie: Target wird praktisch vollständig vom Detektor umschlossen

4 π Gamma-Detektoren zur Messung von σ_{tot}





verfahrbahres Elektron-spektrometer für $d\sigma/d\Omega$



2.3 Kernmodelle

- Kerne sind komplexe **Vielteilchensysteme** von wechselwirkenden Nukleonen: eine universell gültige Theorie (z.B. auf der Basis einer Quantentheorie wie der QCD), die alle Kerneigenschaften beschreibt, existiert bisher nicht
  ↳ Entwicklung **phänomenologischer Modelle** für bestimmte Eigenschaften

Tröpfchenmodell

Kern in enger Analogie zu geladenem Flüssigkeitstropfen (quasi-klassisch), Nukleonen bewegen sich stark korreliert in inkompressibler Flüssigkeit

Fermigasmodell

Nukleonen bewegen sich unabhängig voneinander in einem resultierenden Kernpotenzial, Potenzialtiefe aus der Quantenstatistik eines Fermigases

Schalenmodell

Nukleonen bewegen sich voll quantenmechanisch (Schrödinger-Gleichung), Potenzial mit starkem Spin-Bahn-Term, ↳ magische Zahlen, Spin, Parität

Kernmodelle und Kerneigenschaften

Kernmodelle sollten eine Vielzahl von **Kerneigenschaften** beschreiben

Kernradien

Kernmaterie - konstante Dichte $\rho = 10^{17}$ kg/m^3, R = 1.2 fm · $A^{1/3}$

Kernmasse & Bindungsenergien

kontante Bindungsenergie pro Nukleon B/A ~ 8 MeV, gesättigte Kernkräfte

Stabilitätsverhalten

stabile Kerne- für kleines A: N = Z, für großes A: N > Z, Spaltung, α,ß,γ-Zerfall

Spin und Parität

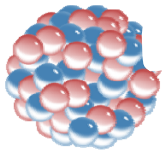
Kernniveaus mit definiertem Spin & Parität $J^P = (0^+, 2^+, 4^+, 0^-, 1^-, \ldots)$, Mischung

Kernanregung und Kerndeformation

Lage von angeregten Zustände, kollektive Anregungen & Kerndeformation

Kernmassen

Kernmasse $M(Z,A) = Z \cdot M_p + N \cdot M_n - B(Z,A)$



$M_p =$ 938.27 MeV | $M_n =$ 939.57 MeV | Bindungsenergie des Kerns

nahezu identisch | klein, **~ 1% der Nukleonenmasse**

Isotope Kerne mit gleicher Protonenzahl **Z**, $^{124,126,128,129,130,131,132,134,136}_{54}\mathrm{Xe}$

Isotone Kerne mit gleicher Neutronenzahl **N**, $^{36}S_{20}$, $^{37}Cl_{20}$, $^{38}Ar_{20}$, $^{39}K_{20}$

Isobare Kerne mit gleicher Nukleonenzahl **A**, $^{138}_{56}\mathrm{Ba}$, $^{138}_{57}\mathrm{La}$, $^{138}_{58}\mathrm{Ce}$

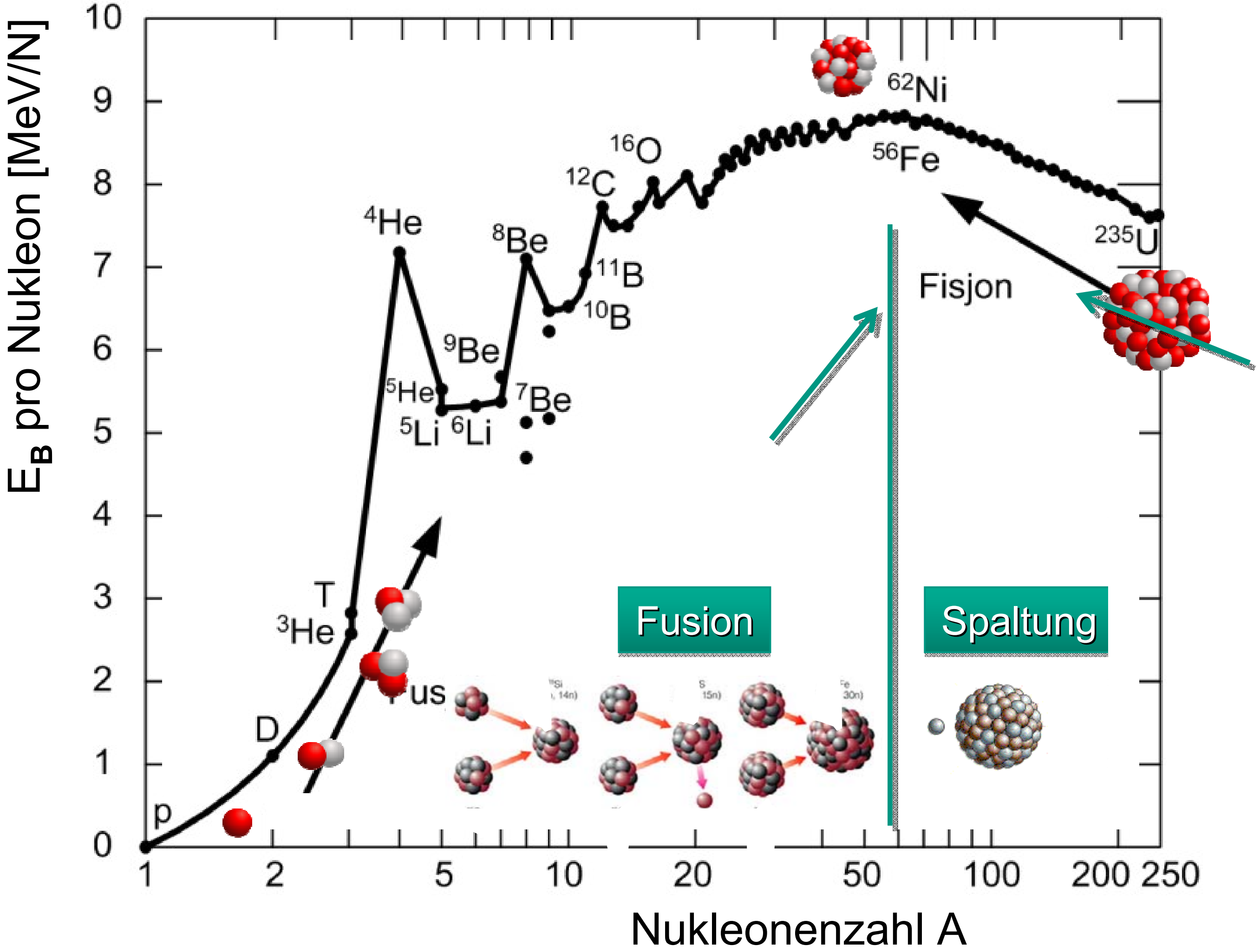
Atommasse $\mathcal{M}(Z,A) = M(Z,A) + Z \cdot m_e - B_e$ $m_e = 0.511$ MeV, $B_e = e^-$ Bindungsenergie

atomare Masseneinheit $1u = 1/12 \cdot \mathcal{M}(^{12}C) = 931.494$ MeV

Massendefekt $\Delta = \mathcal{M}(Z,A) - A \cdot 1/12 \cdot \mathcal{M}(^{12}C) = B(^{12}C) - B(Z,A)$

Bindungsenergie pro Nukleon

Bindungsenergie pro Nukleon: B/A ~ 8 MeV, näherungsweise konstant für A > 20



‹B/A› ~ 7 – 8 MeV

↳Kernwechselwirkung nur mit dem nächsten Nachbarnukleon!

kurzreichweitige Kernkräfte

Reichweite ~ 1 fm

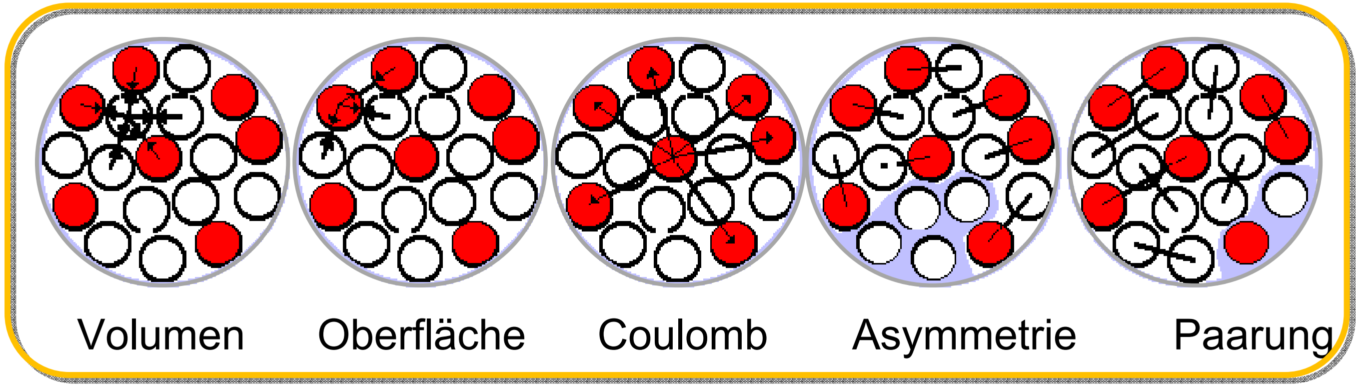
↳ maximales B/A bei A = 56-58 (^{56}Fe, ^{56}Ni)
A < 56 : **Kernfusion**
A > 56 : **Spaltung**

Tröpfchenmodell

- 1935: C.F. von Weizsäcker stellt ein semi-empirisches Kernmodell auf - Kerneigenschaften (inkompressible Materie, kurzreichweitige Kräfte) in Analogie zu den Eigenschaften eines Wassertröpfchens (Kondensation, Waals Kräfte, latente Wärme, Oberflächenspannung)
  ↳ **semiempirische Massenformel** mit Anpassung der Parameter durch experimentelle Untersuchungen

Volumenenergie	Oberflächenenergie	Coulombterm	klassisch
Asymmetrieterm	Paarungsterm		quantenmechanisch

Carl Friedrich von Weizsäcker (1912-2007)



Volumenenergie

$$B(Z,A) \sim a_V \cdot A$$

wichtigster Term, entsteht durch kurzreichweitige Kernkräfte: Nukleon ´fühlt´ nur die unmittelbaren Nachbarn – **Kernkräfte sind gesättigt** (Radius $R_0 \sim A^{1/3}$)

Oberflächenenergie

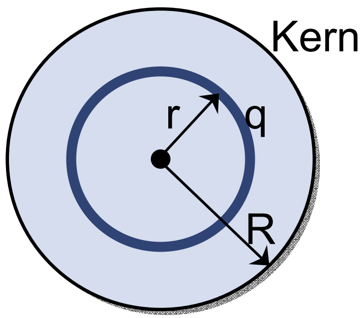
$$B(Z,A) \sim - a_S \cdot A^{2/3}$$

Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Partnernukleonen, schwächere Bindung, ist proportional zur Oberfläche $A^{2/3}$ (Tropfen: Oberflächenspannung)

Coulombterm

$$B(Z,A) \sim - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3}$$

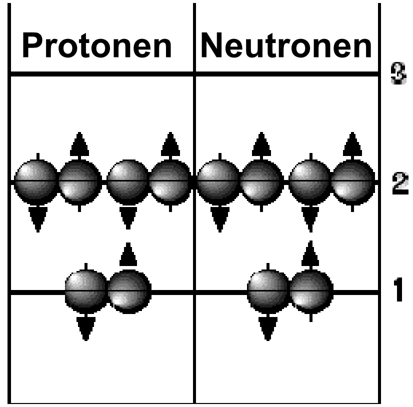
Protonen erzeugen eine abstoßende Coulombkraft,
Modell einer homogen geladenen Kugel mit Radius R
und konstanter Ladungsdichte $\rho = (Z \cdot e) / (4/3 \cdot \pi \cdot R^3)$
Berechnung der potenziellen Energie dE, um Ring mit Ladung q wird aus $R = \infty$ bis zu Radius r zu bringen
Integration ergibt $E \sim (Z \cdot e)^2 / R$



Asymmetrieterm

$$B(Z,A) \sim -\, a_A \cdot (N - Z)^2 / A$$

Kerne bevorzugen **Konfiguration Z = N**, keine stabilen Kerne mit starkem Protonen- bzw. Neutronenüberschuss (vgl. Fermigas), Pauli-Prinzip: wird bei Z = N ein Proton gegen ein Neutron ausgetauscht, verringert sich B(Z,A), da dieses Neutron dann in ein höheres Niveau müsste



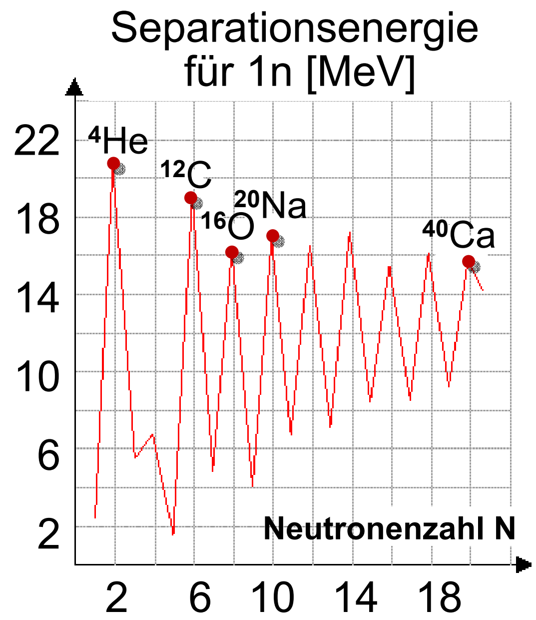
Paarungsterm

$$\delta(Z,A) \sim a_P \cdot A^{-1/2} \quad \begin{cases} + & \text{für gg} \\ 0 & \text{für ug} \\ - & \text{für uu} \end{cases}$$

Bohr & Mottelson (1969) führen Paarungsterm ein:
Befund: Kerne mit gerader Neutronenzahl sind ~2 MeV stärker gebunden

gepaarte Nukleonen mit antiparallelem Spin

gg (gerade-gerade) Kerne stärker gebunden als uu (ungerade-ungerade) Kerne

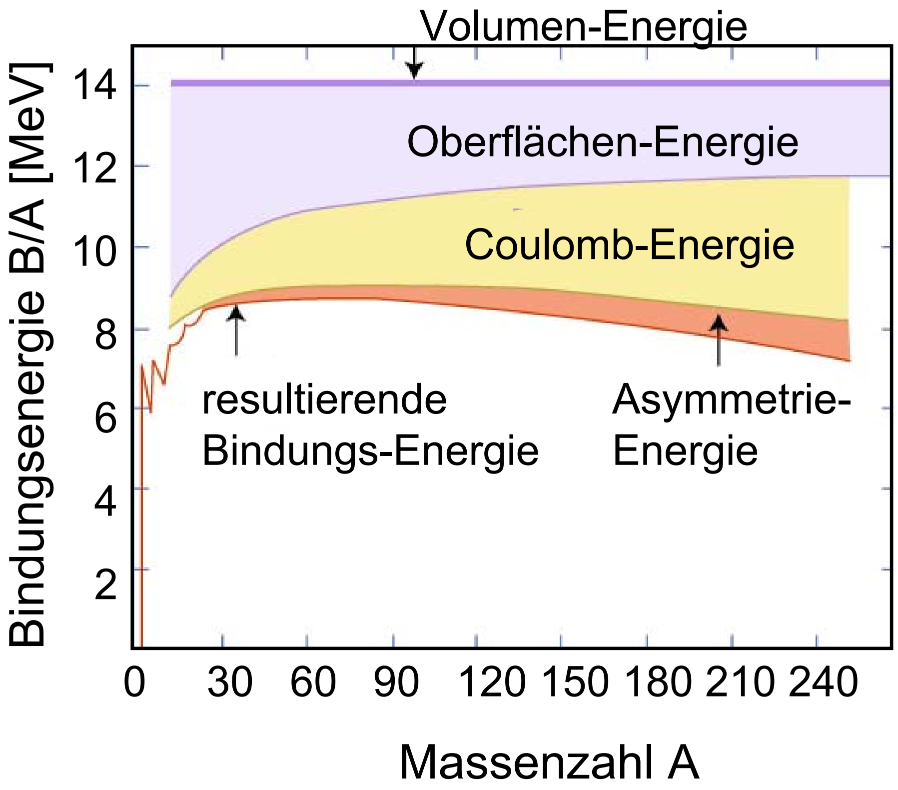


Zusammenfassung aller Terme zur (semi-)**empirischen Massenformel**:

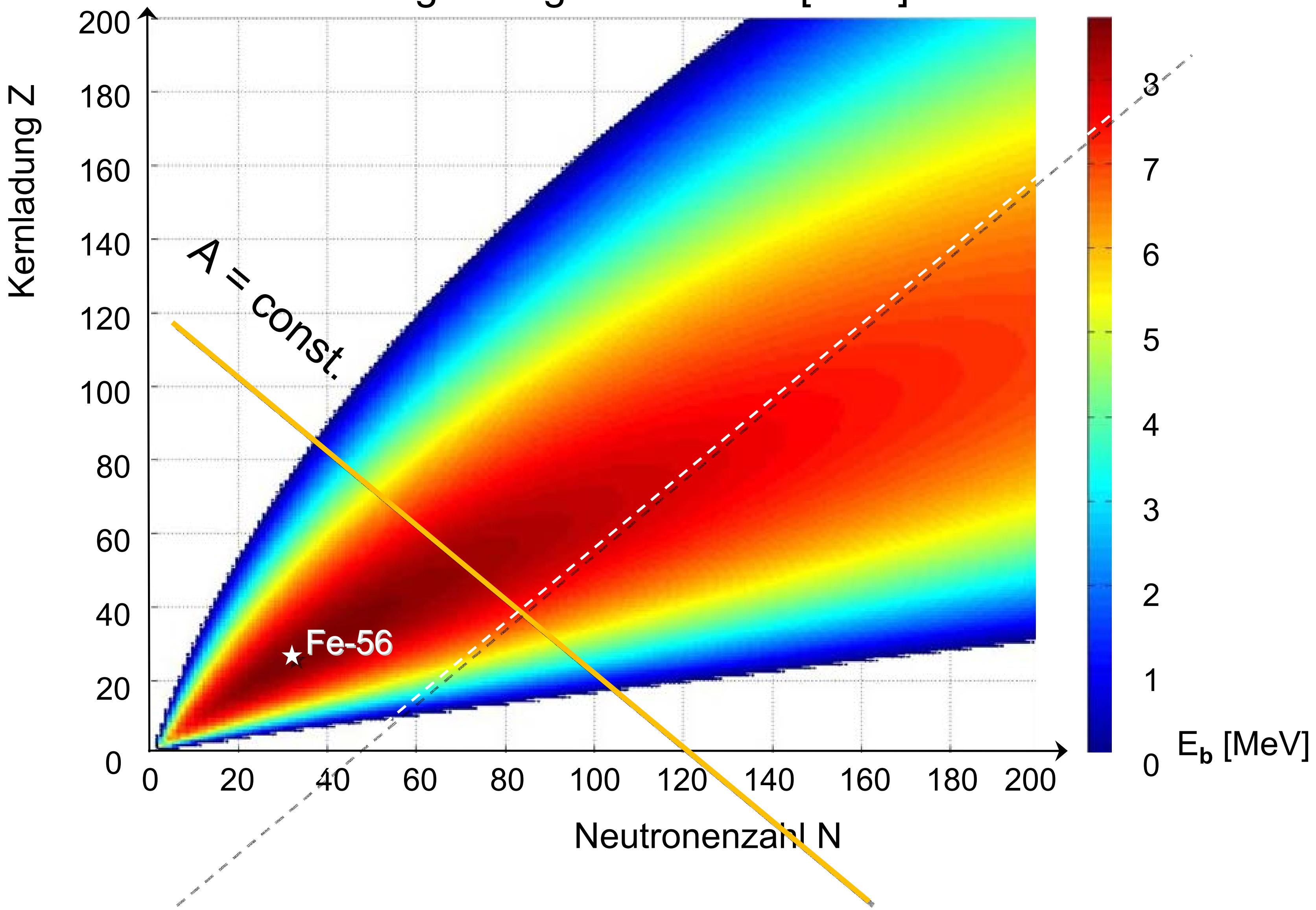
$$B(Z,A) = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (N-Z)^2 / A + \delta(Z,A)$$

Beitrag	Faktor a	Größe [MeV]
Volumenterm	a_V	15.58
Oberflächenterm	a_S	16.91
Coulombterm	a_C	0.71
Asymmetrieterm	a_A	23.21
Paarungsterm	a_P	11.46

Anpassung an zahlreiche experimentell bekannte Kernmassen für A > 40: ~ 10% Genauigkeit



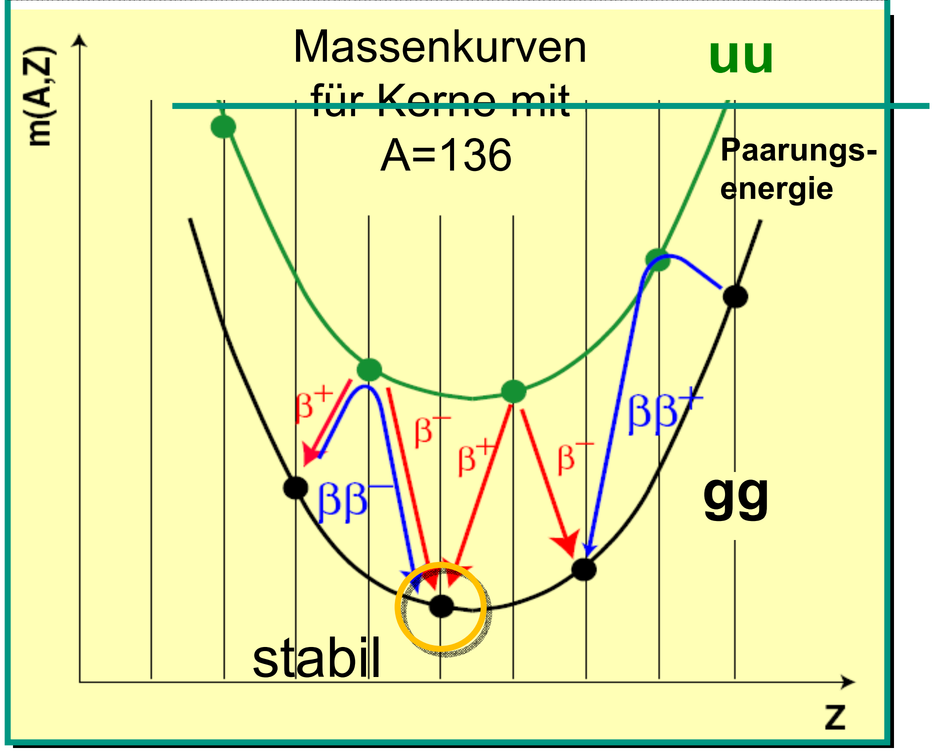
Bindungsenergie / Nukleon [MeV]



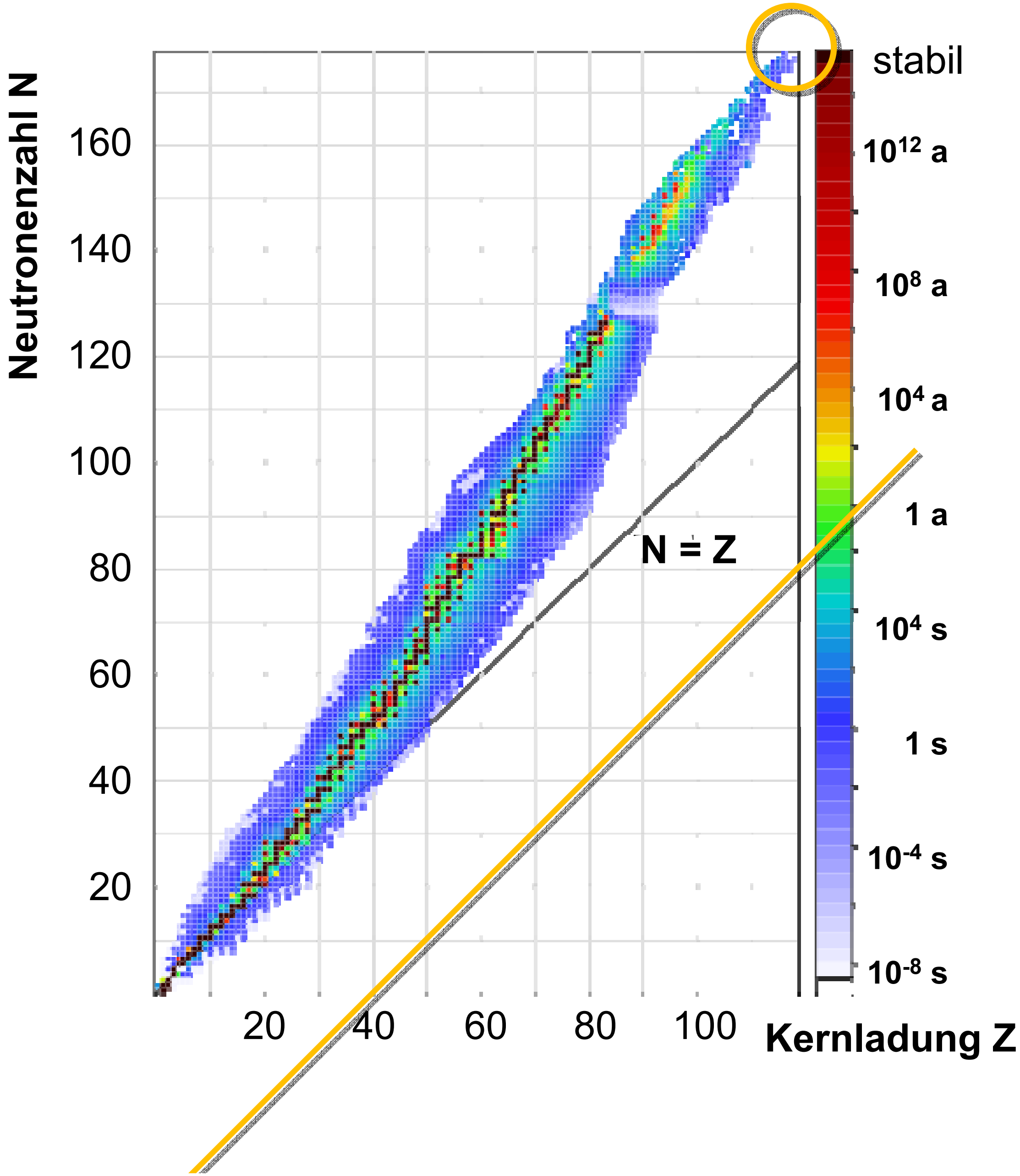
Tröpfchenmodell - Massenparabeln

- für Kerne mit konstanter Massenzahl A ergeben sich „**Massenparabeln**“:
  B (A = const., Z) = const. – $a_1 \cdot Z^2 - a_2 \cdot (N - Z)^2$
- **A = gerade**
  es existieren 2 Massenparabeln:
  gg Kerne sind stärker gebunden
  uu Kerne sind schwächer gebunden
  (wichtig z.B. für die Suche nach dem neutrinolosen Doppelbetazerfall, s. Kap. 10.3)
  A = ungerade
  es existiert nur 1 Massenparabel (ug)
- für jede Kernmasse A = const. erhält man das stabilste Isotop mit maximaler Bindungsenergie (**Stabilitätsline**) durch Bildung der Ableitung
  $\partial B(A = \text{const.}, Z) / \partial Z = 0$

Massenparabel für gerade-gerade und uu Kerne (Paarungs-Energie)



Stabilitätstal der Kerne



die Kerne mit der maximalen Bindungsenergie bilden das **Tal der Stabilität**

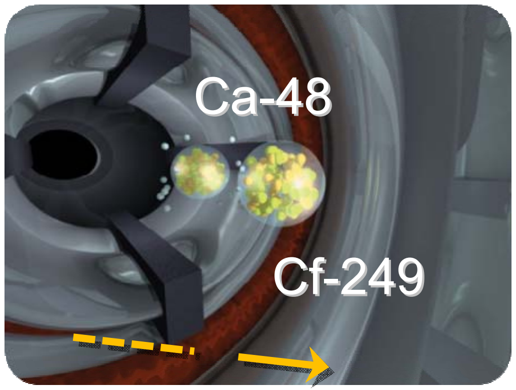
$$Z = \frac{A}{1.98 + 0.015\,A^{2/3}}$$

Coulombabstossung der Protonen erzeugt bei schweren Kernen einen deutlichen **Neutronenüberschuss**

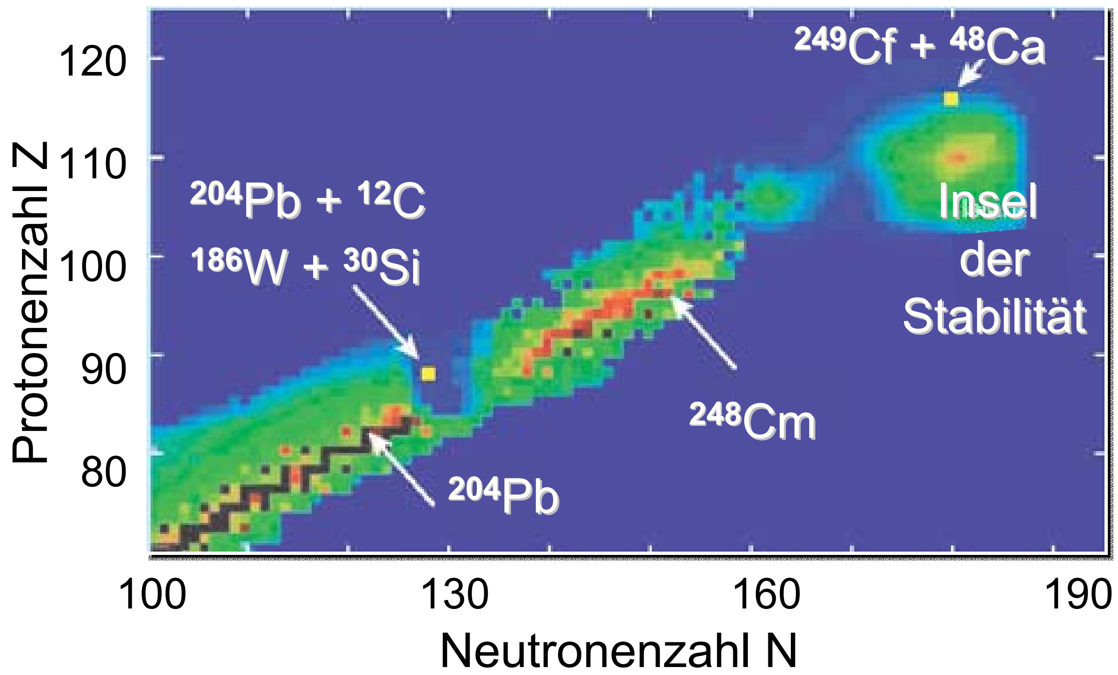
Kerne, die nicht im Stabilitätstal liegen, zerfallen über Teilchen-emission (ß-Zerfall, ´Driplines´ für Protonen/Neutronen, α-Zerfall) s. Kap. 4.2, 4.3, 4.5

Insel der Stabilität ?

- der beobachtete Verlauf der magischen Zahlen im Schalenmodell lässt eine **Insel der Stabilität** bei superschweren Kernen (N = 184, Z = 114) erwarten
- experimentelle Methode: mittelschwere Ionen (^{48}Ca) werden auf sehr hohe Energie beschleunigt und auf ein schweres Target (z.B. ^{249}Cf) gelenkt, dabei wird Synthese superschwerer Kerne erwartet (Ziel: geringe innere Anregung) superschwere Kerne zerfallen über Alpha-Zerfall und spontane Spaltung
- schwerstes Element bisher:
  Z = 118 (Uuo-294) Ununoktium
  $^{249}\text{Cf} + {}^{48}\text{Ca} \rightarrow {}^{294}\text{Uuo} + 3\,n$
  bisher 3 Atome erzeugt



σ = 0.5 pb
$\tau \sim$ 1 ms



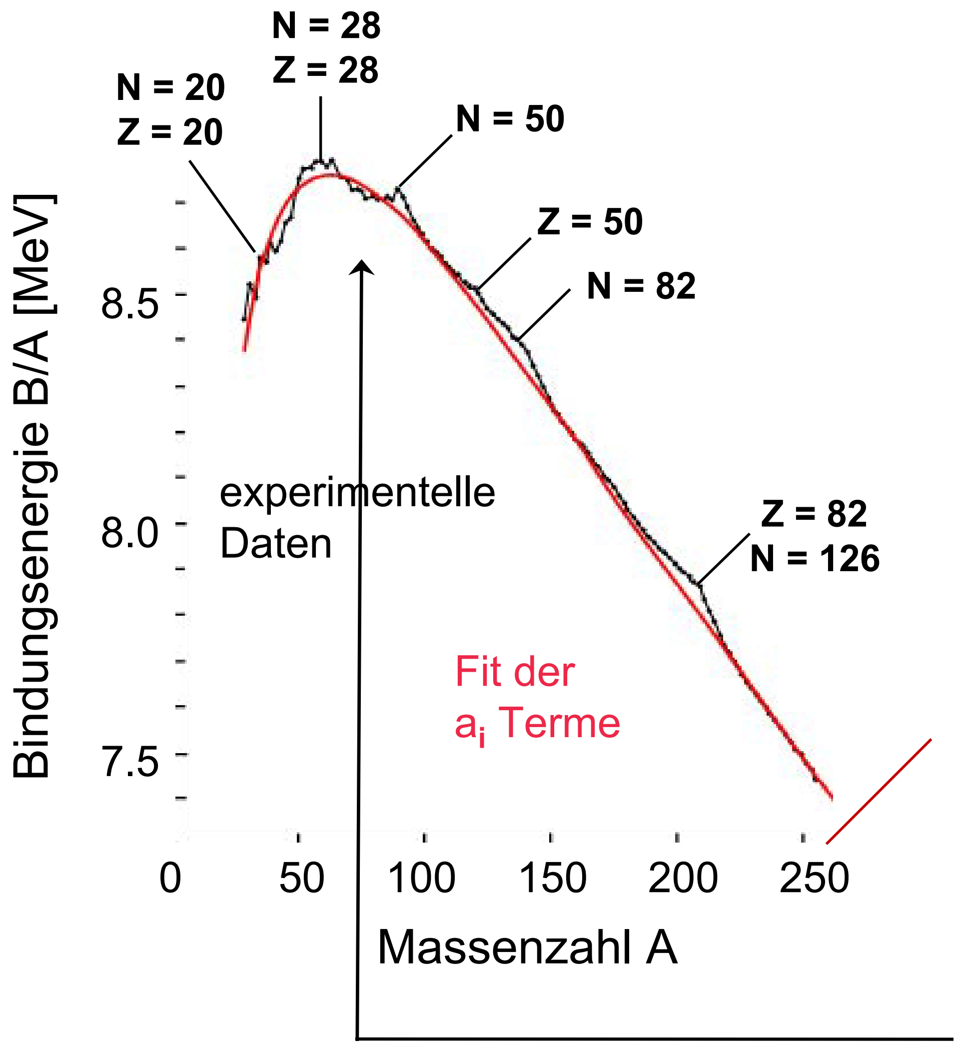
Zusammenfassung zum Tröpfchenmodell

- Tröpfchenmodell kann zur Vorhersage von Bindungsenergien von Kernen und bei der Modellierung von Kernspaltungsprozessen (Kap. 4.5) benutzt werden, heute weitere Terme z.B. für deformierte Kerne

- verbleibende Abweichungen zwischen dem Experiment & der Massen-Formel resultieren aus der Schalenstruktur der Kerne (vgl. Schalenmodell der Kerne)

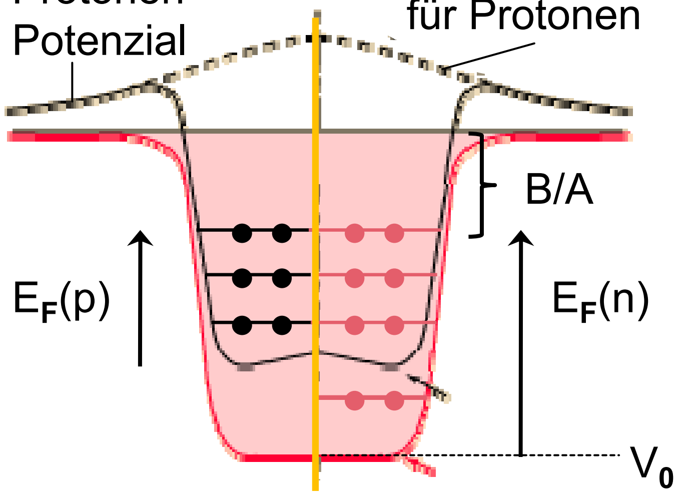
magische Zahlen

Z oder N = 20, 28, 50, 82, 126



Fermigasmodell

- Kernmodell auf der Basis von 2 *unabhängigen* Systemen von Nukleonen (Protonen und Neutronen), die sich im Kernvolumen unter Beachtung des **Pauli-Prinzips** (für Fermionen mit s = ½) **wechselwirkungsfrei** bewegen (alle Zustände sind besetzt ➪ keine Änderung der Quantenzahlen) jedes Nukleon ´fühlt´ ein mittleres Kernpotenzial (= Überlagerung der einzelnen kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen) **Neutronen:** Kastenpotenzial, **Protonen:** Kastenpotenzial + Coulombkraft

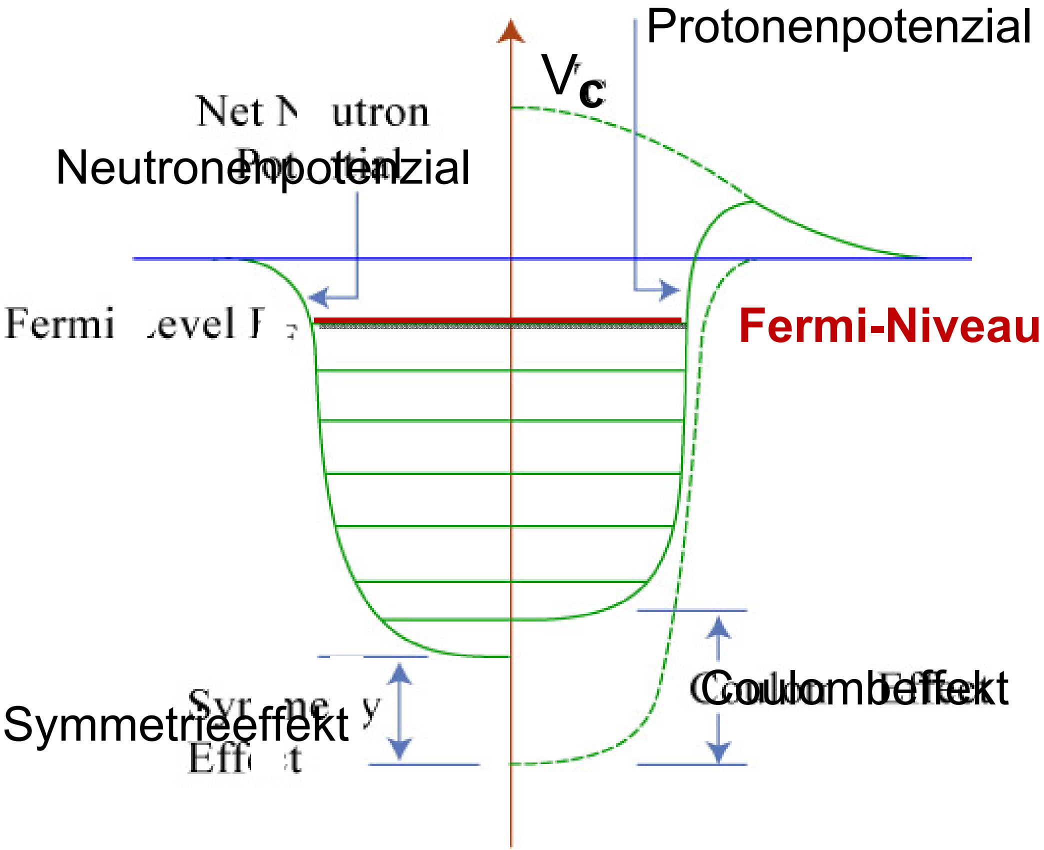


Quantenstatistik eines Fermigases

Grundzustand des Kerns:

- alle Zustände vom Potenzialboden V_0 bis zum höchsten Niveau, der **Fermienergie E_F** sind aufgefüllt
- nach dem Pauliprinzip kann jeder Protonen- bzw. Neutronen-Zustand mit 2 Teilchen (Spin up / Spin down) besetzt werden

- Nukleonen bilden im Kern bei T = 0 K (Grundzustand) ein ´**Fermigas**´ von wechselwirkungsfreien Teilchen, angeregte Kernzustände ⇨ T > 0 K, für Protonen: die abstoßende Coulombkraft verringert ihre Potenzialtiefe



- die Fermi-Niveaus von Neutronen und Protonen in schweren Kernen sind identisch, sonst könnten z.B. Neutronen in ´freie´ Protonenniveaus zerfallen

- alle Nukleonen bewegen sich im Kern mit einem nicht vernachlässigbaren **Fermi-Impuls p_F**

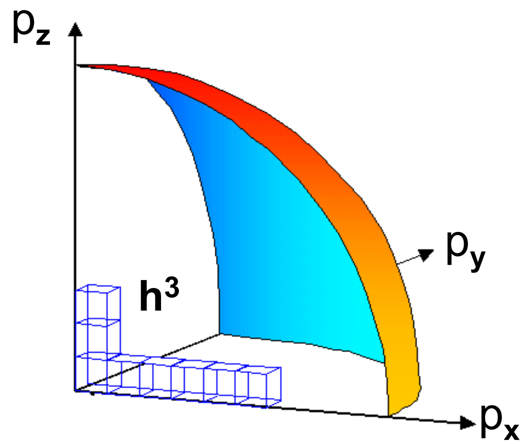
Bestimmung der Fermi-Energie E_F

- Nukleonen haben im **Phasenraum** durch die Unschärferelation $dx \cdot dp_x > \hbar/2$ ein minimales Phasenraum-Volumen $V_{min} = (2\pi\hbar)^3 = h^3$
  Phasenraum: 6 dim. Orts-Impuls-Raum: $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$

- **Zustandsdichte dn/dp** der nicht-relativistischen Nukleonen für ein Kasten-potenzial mit $V_0 = \infty$ und Volumen V (Lösung der 3-dim. Schrödingergleichung ergibt quantisierte, stehende Wellen mit Wellenzahlen $k_i = p_i/\hbar$)

$$\boxed{dn = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V \cdot p^2\, dp = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \cdot V \cdot p^2\, dp}$$

dn = Zahl der Teilchen-Zustände im
Impulsintervall [p, p+dp]
in diesem Intervall bilden Nukleonen im Impulsraum eine Kugelschale mit der Oberfläche $4\pi p^2$ und der Dicke dp



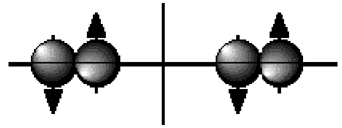
Phasenraumzustände:
$\sim V \cdot 4\pi p^2\, dp / h^3$

Gesamtzahl der Nukleonen-Zustände

- die Gesamtanzahl n der Zustände bis zur Fermi – Energie E_F bzw. zum **Fermi-Impuls p_F** $= (E_F \cdot 2M_N)^{1/2}$ ist mit einem **Nukleon-Spinfaktor 2** (für $s = 1/2$ Fermionen) gegeben durch:

$$\boxed{n = 2\int_0^{p_F} dn = \frac{2}{2\pi^2\hbar^3} \cdot V \cdot \int_0^{p_F} p^2\, dp}$$

$$\boxed{n = 2 \cdot \frac{V \cdot p_F^3}{6 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3}}$$

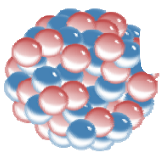


Anzahl **N** der Neutronen :

$$\boxed{N = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} \cdot (p_F^n)^3}$$

Anzahl **Z** der Protonen :

$$\boxed{Z = \frac{V}{3\pi^2\hbar^3} \cdot (p_F^p)^3}$$



$R = R_0 \cdot A^{1/3}$

$R_0 = 1.21$ fm

mit Kernvolumen V:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 \cdot A$$

Fermi-Impuls p_F für Kerne mit $Z = N = A/2$

$$\boxed{p_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \approx 250\ MeV/c}$$

Fermi-Impuls und Fermi-Energie

- **Fermigas-Modell:**
  - alle Nukleonen bewegen sich wechselwirkungsfrei mit einem Impuls p_F
  - Fermi-Impuls p_F aller Nukleonen ist ~ konstant (250 MeV/c)

  Nukleonen bewegen sich im endlichen Kernvolumen mit einem signifikanten Fermi-Impuls! (↳ Heisenbergsche Unschärferelation)

- Zustandsdichte dn/dE als Funktion der Nukleonen-Energie E

$$\boxed{dn = \frac{1}{2\pi^2\hbar^3} \cdot V \cdot p^2 \; dp}$$

mit $p^2 = 2\,M_N \cdot E$ ⇨ $2\,p\,dp = 2\,M_N\,dE$

⇨ $p^2\,dp = p \cdot M_N\,dE$

$$p^2 \cdot dp = \sqrt{2M_N^3 \cdot E} \cdot dE$$

$$\boxed{dn = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi^2\hbar^3} \cdot M_N^{3/2} \cdot V \cdot \sqrt{E} \cdot dE}$$

dn ~ $\sqrt{E}$

$$\boxed{n = 2\int_0^{E_F} dn = \frac{1}{3 \cdot \pi^2\hbar^3} \cdot \sqrt{8} \cdot M_N^{3/2} \cdot V \cdot E_F^{3/2}}$$

E_F = Fermi-Energie

Fermi-Energie E_F & Kernpotenzial V

- mit Nukleonenzahl n = A und Volumen V = 4/3 π $(R_0)^3$ A ergibt sich alleine aus Kenntnis R_0 ~ 1.2 fm ein Wert **E_F ~ 33 MeV**
- Fermi-Energie E_F (Energie des höchsten besetzten Zustands):

$$\boxed{E_F \approx \frac{p_F^2}{2M} = 33\,MeV} \Rightarrow \boxed{V_0 \approx E_F + \langle B/A \rangle = 33\,MeV + 7\,MeV = 40\,MeV}$$

V_0: Tiefe des Kern-Potenzials

- V_0 ist unabhängig von der Massenzahl A ähnlich wie bei freiem Elektronengas-
kinetische Energie der Nukleonen ist in der gleichen Größenordnung wie das Kernpotenzial
vgl. Elektronengas im Festkörper, z.B. Cu:

Fermi-Energie:	E_F	~ 7 eV
Austrittsarbeit:	W	~ 4 eV
Potenzialtiefe:	V	~ 11 eV