

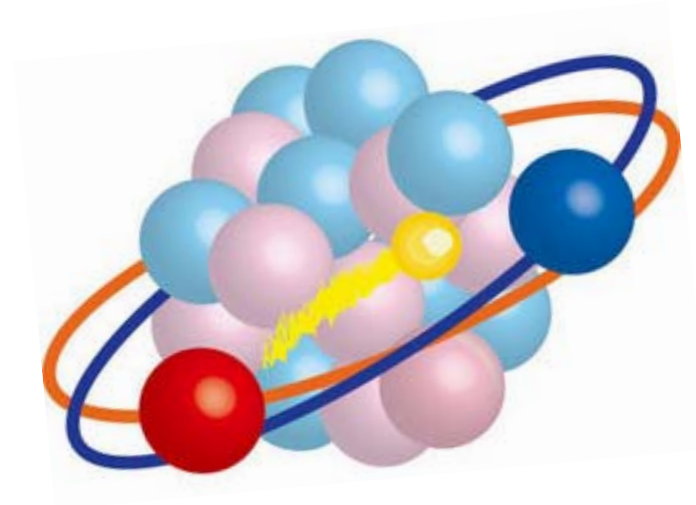
Kerne und Teilchen

Moderne Physik III

Vorlesung # 4

2.3 Kernmodelle

- Schalenmodell
- Struktur der Kernkräfte
- LS-Kopplung
- Nukleon-Nukleon Potential
- Austauschkräfte:
Pionen und Mesonen

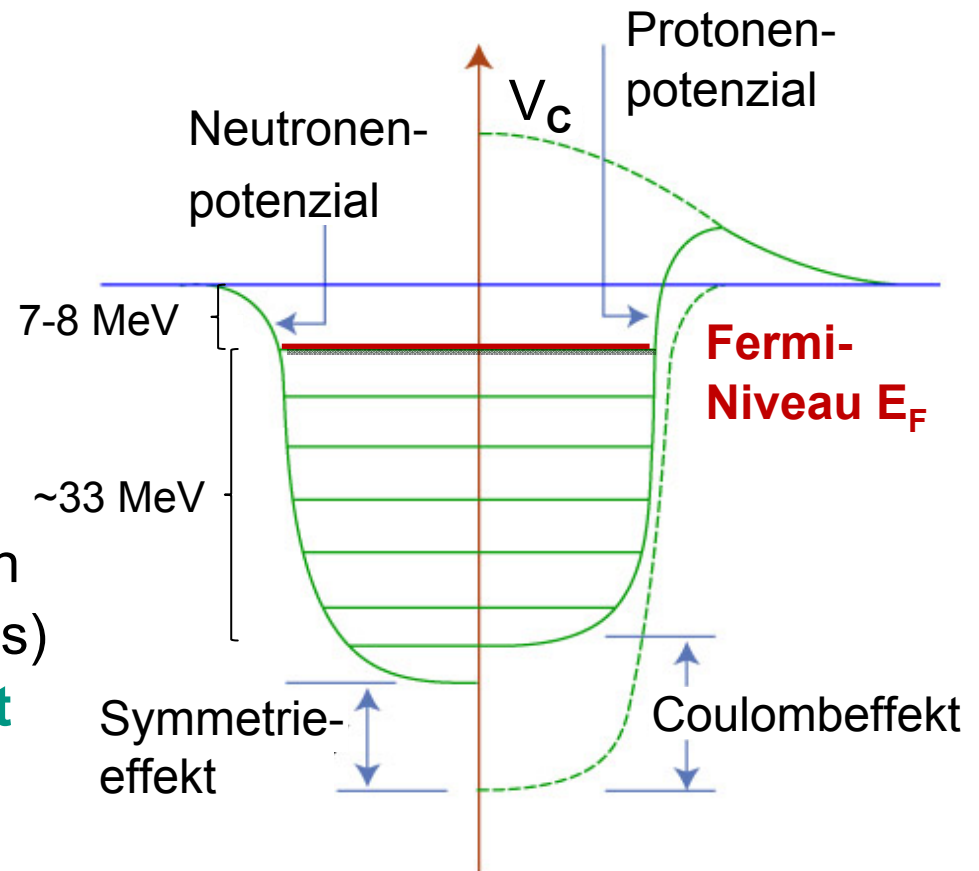


Wiederholung: • Fermigasmodell

- Nukleonen bilden im Kerngrundzustand bei $T = 0 \text{ K}$ ein '**Fermigas**' von wechselwirkungsfreien Teilchen, da alle Fermion-Zustände bis zur **Fermi-Energie E_F** besetzt sind
- Bestimmung der Fermi-Energie E_F bzw. des **Fermi-Impulses p_F** aus der Quantenstatistik eines Fermigases: für Kerne mit $Z = N = A/2$

$$p_F = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \approx 250 \text{ MeV} / c$$

- Potenzial $V_0 \sim 40 \text{ MeV}$, unabhängig von Massenzahl A (vgl. freies Elektronengas) **kinetische Energie der Nukleonen ist in der gleichen Größenordnung wie das Kernpotential: $E_F \sim V_0$**

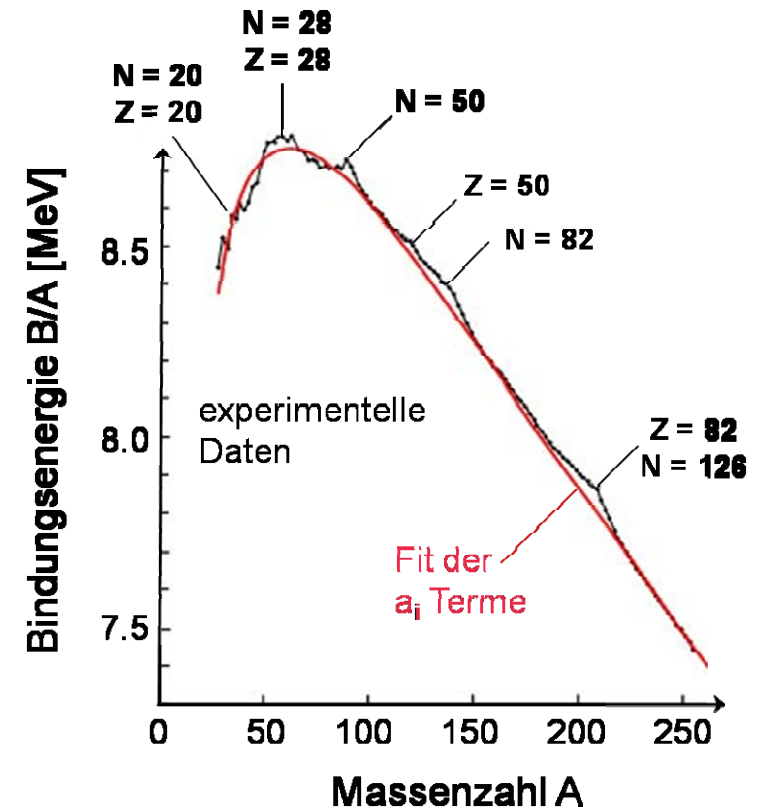


● Tröpfchenmodell

- Tröpfchenmodell von C.F. v. Weizsäcker:
semiempirische Massenformel ➡ **Bindungsenergie pro Nukleon**

$$B(Z,A) = a_v \cdot A - a_s \cdot A^{2/3} - a_c \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (N - Z)^2 / A + \delta(Z,A)$$

- Volumenterm: Kondensation
 - Oberflächenterm: weniger Partner
 - Coulombterm: Protonenladung
 - Asymmetrie-Term: Fermi-niveaus
 - Paarungs-Term: antiparalleler Spin
- bei bestimmten magischen Protonenzahlen Z & Neutronenzahlen N verbleiben Abweichungen zwischen dem Experiment & der Massen-Formel des Tröpfchenmodells:
Resultat der Schalenstruktur der Kerne



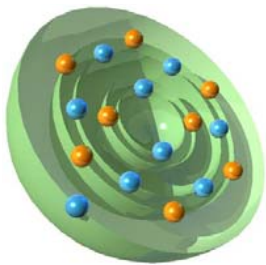
• Schalenmodell

■ Kerne mit den **magischen** Protonen- oder Neutronen-Zahlen

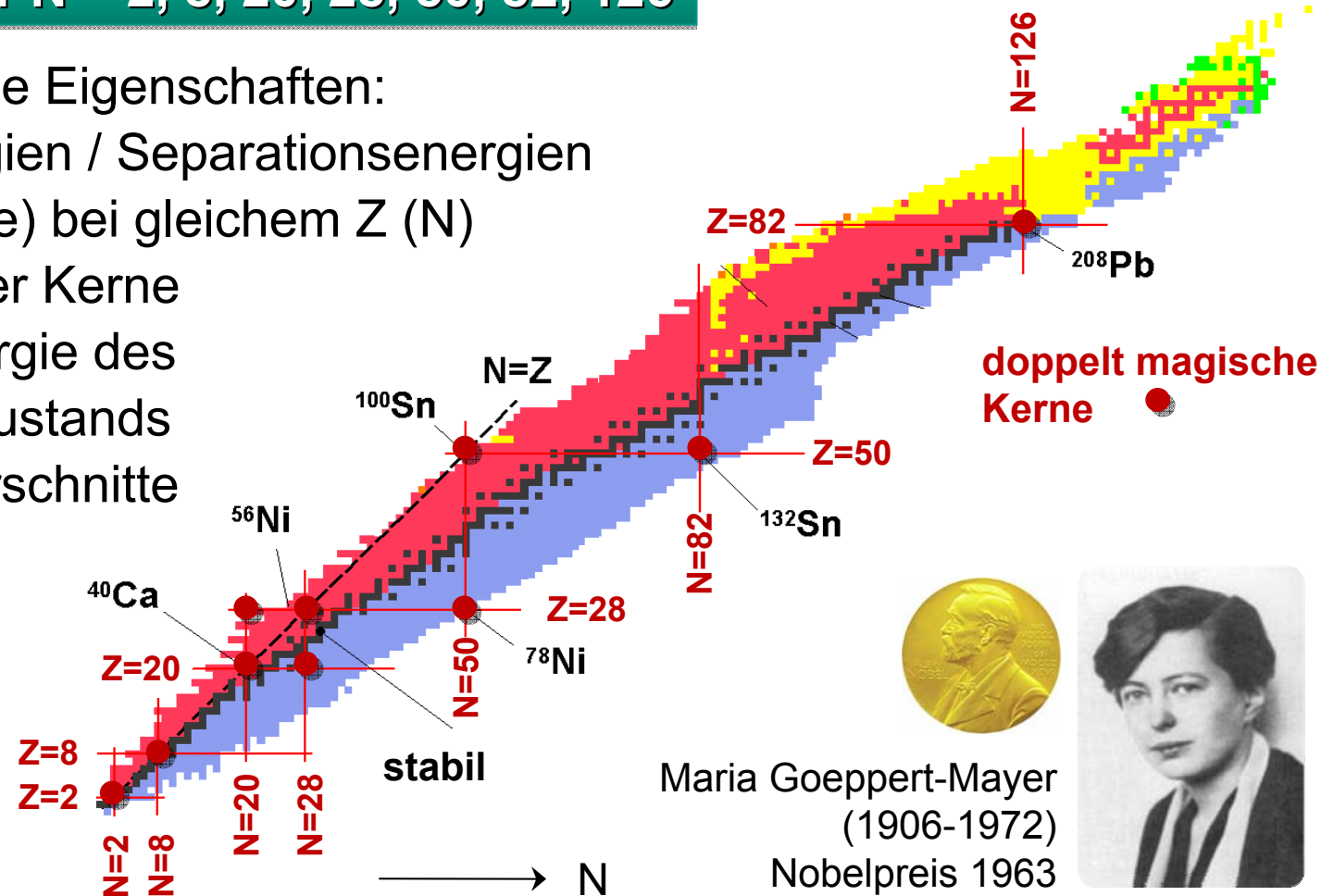
Z oder N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

verfügen über spezielle Eigenschaften:

- hohe Bindungsenergien / Separationsenergien
- viele Isotope (Isotone) bei gleichem Z (N)
- relative Häufigkeit der Kerne
- hohe Anregungsenergie des ersten angeregten Zustands
- kleine n-Einfangquerschnitte
- β -Zerfall



Z
↑



Maria Goeppert-Mayer
(1906-1972)
Nobelpreis 1963



doppelt magische Kerne:

^4He , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{72}Ge ,...

Abweichungen von der
Bethe-Weizsäcker Massenformel:

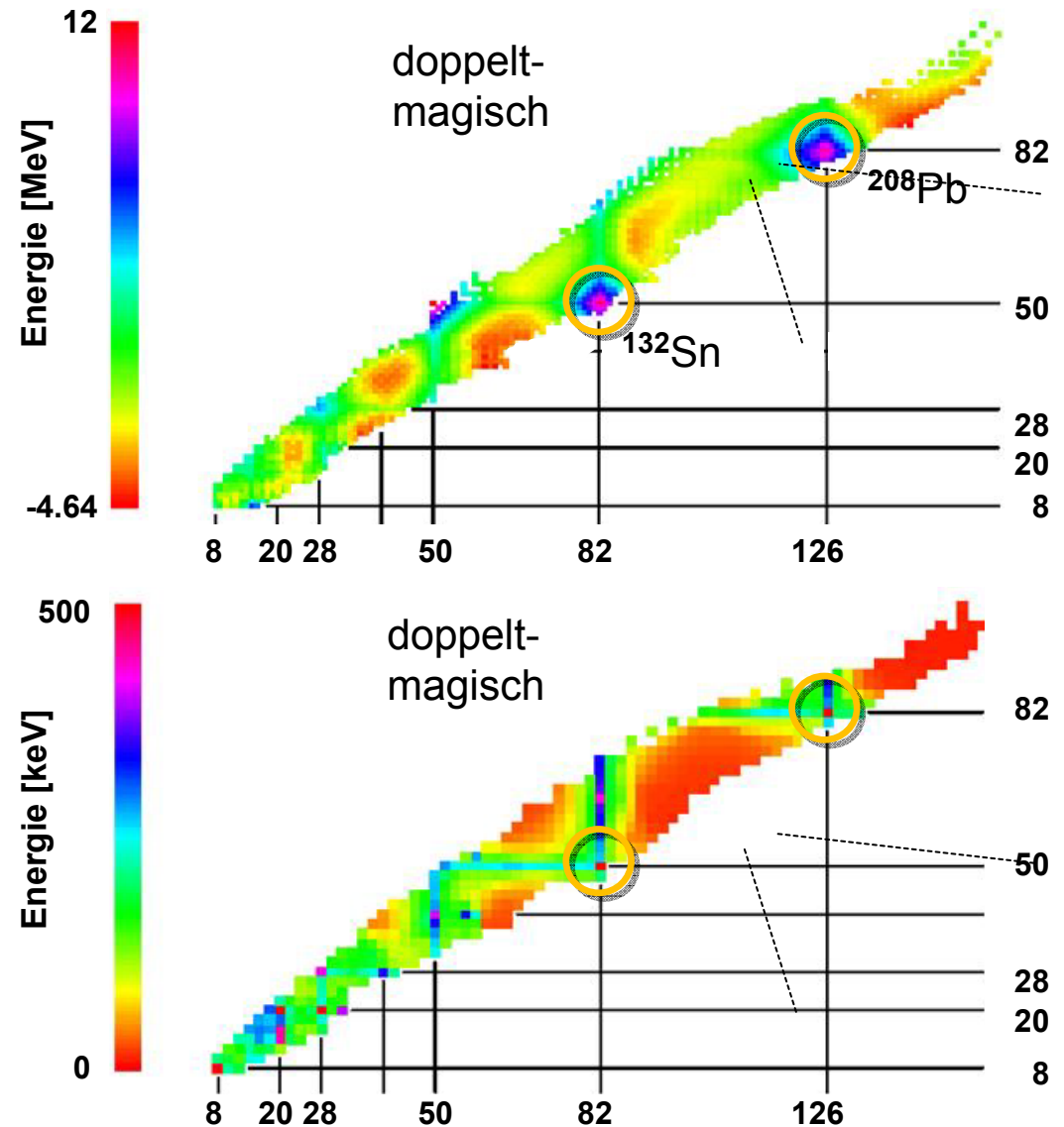
hohe Bindungsenergie

bei magischen Zahlen

Energie des ersten angeregten
Kernniveaus mit $J^P = 2^+$:

hohe Anregungsenergie

bei magischen Zahlen



- Analogie zu magischen Zahlen der Atomphysik ($Z = 2, 10, 18, 36, 54, 80, 86$)
dort wird ein Potenzial erzeugt durch langreichweitiges Coulombfeld $-Z e^2/r$
Ansatz in der Kernphysik: Aufstellung eines **mittleren Kernpotenzials $V(r)$** ,
in dem sich die einzelnen Nukleonen (wechselwirkungsfrei) bewegen
Methode: Lösung der **Schrödinger-Gleichung** für Modellpotenzial $V(r)$

- $u(r)$ folgt aus radialem Anteil der Schrödinger-Gleichung

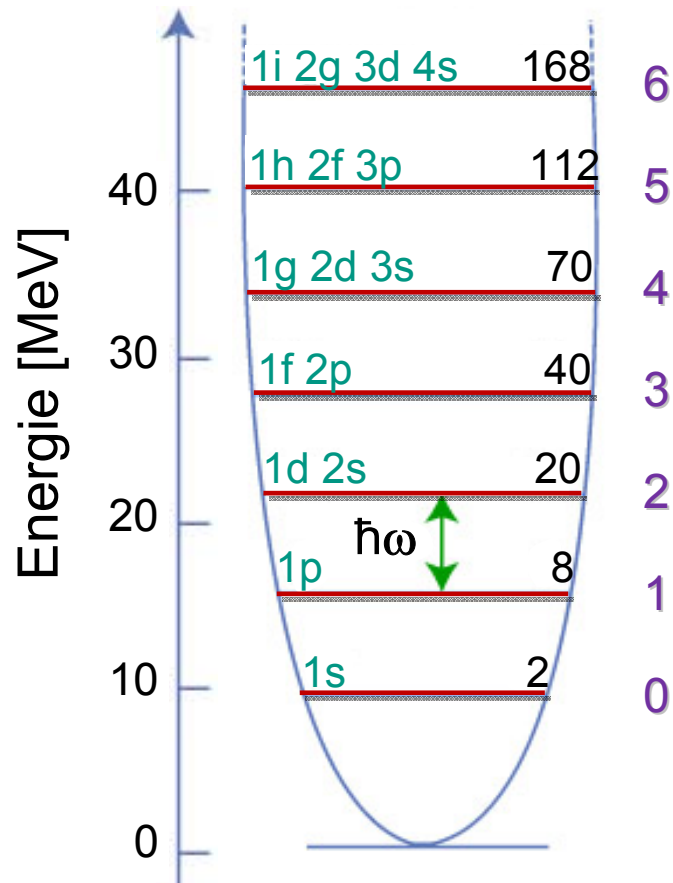
$$\frac{1}{2M_N} \Delta u + \left(E - \underbrace{V(r)}_{\text{Zentrifugalterm}} - \frac{\ell \cdot (\ell + 1)}{2M_N \cdot r^2} \right) u = 0$$

Zentrifugalterm

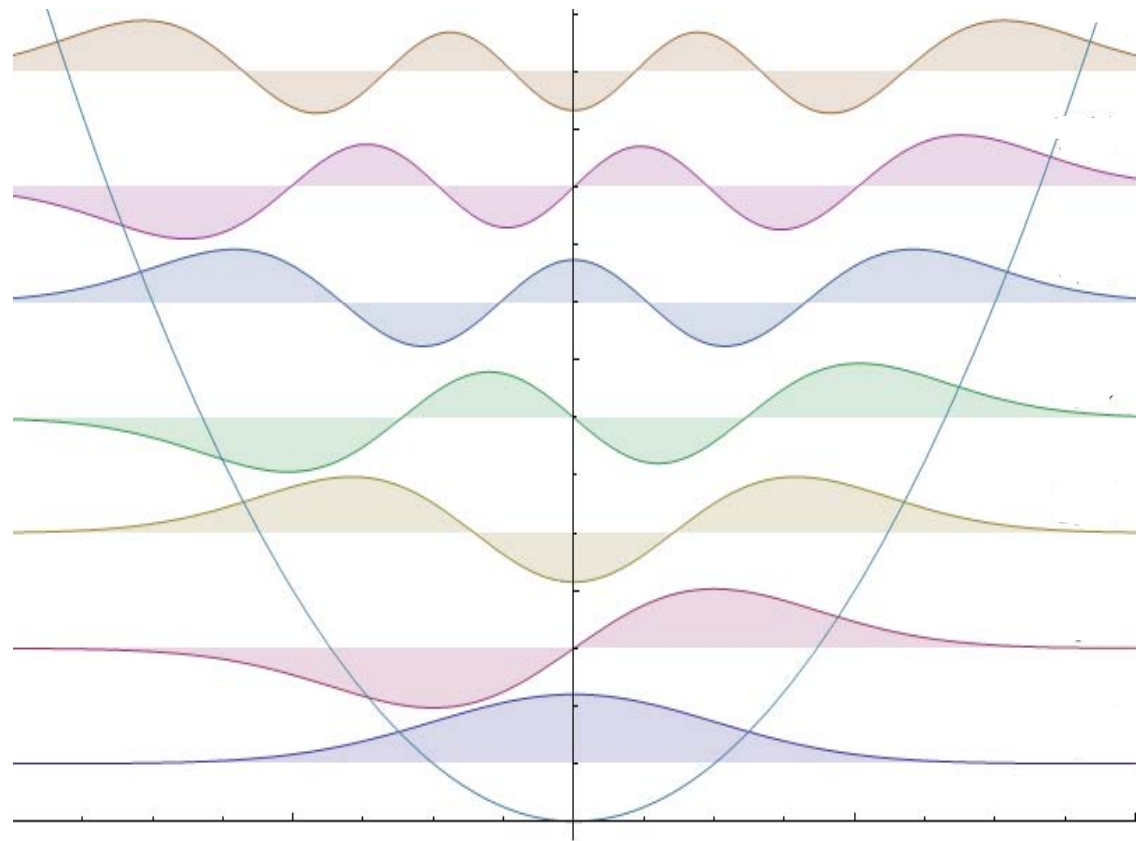
Hauptquantenzahl n ,
Drehimpuls $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ (s,p,d,f,...)
magnet. Quantenzahl m

- Vergleich der Energieniveaus (Schalenabschlüsse) mit den beobachteten magischen Zahlen, $\rightarrow$ Anpassung des Modellpotenzials
- Kastenpotenzial, harmonischer Oszillator, Woods-Saxon-Potenzial

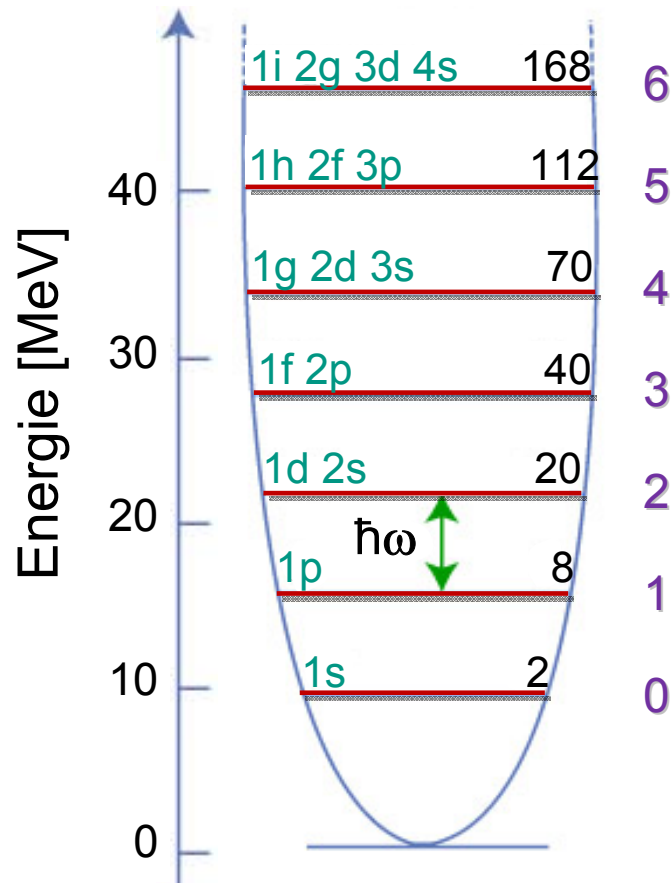
- Nukleonen befinden sich in einem Potenzial $V(r)$ eines **harmonischen Oszillators** mit Tiefe $V_0 \sim 40$ MeV



Wellenfunktionen harmonischer Oszillator



- Nukleonen befinden sich in einem Potenzial $V(r)$ eines **harmonischen Oszillators** mit Tiefe $V_0 \sim 40$ MeV



harmonischer Oszillator

Oszillatorpotenzial

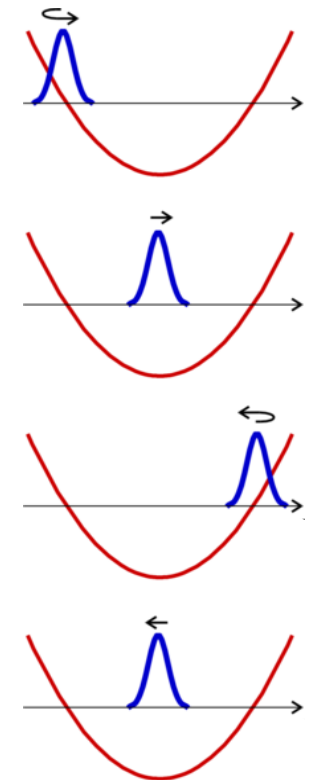
$$V(r) = \frac{1}{2} M_N \omega^2 r^2 - V_0$$

$$\hbar\omega - \text{Schale: } 2 \cdot (n-1) + \ell$$

$$E_{n\ell} = -V_0 + (2n + \ell + \frac{1}{2}) \hbar\omega$$

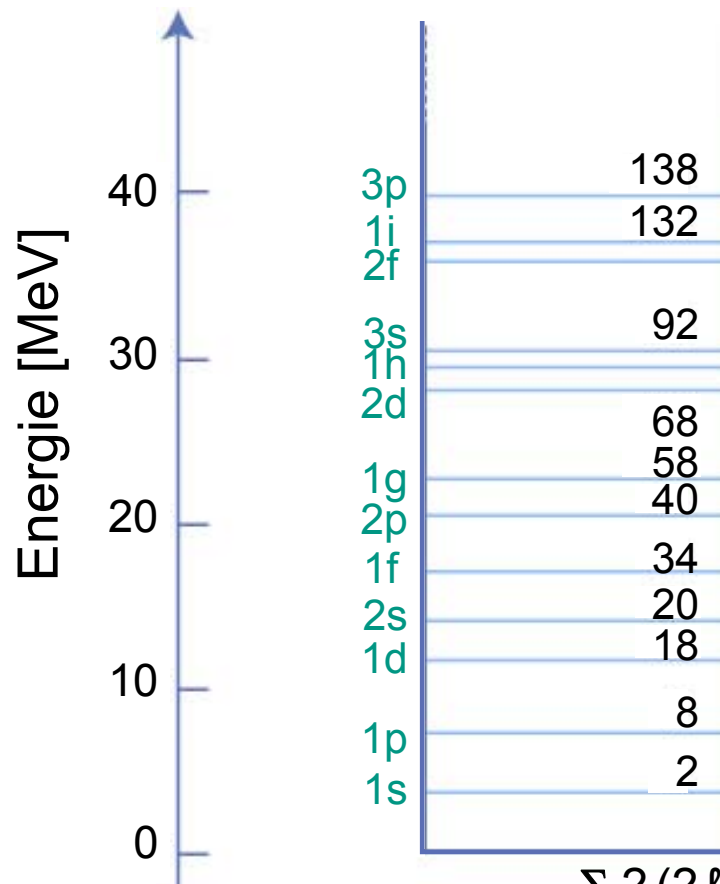
$\hbar\omega$	n	ℓ	Zustand	$\Sigma 2(2\ell+1)$
0	1	0	1s	2
1	1	1	1p	8
2	2	0	2s	20
	1	2	1d	
3	2	1	2p	40
	1	3	1f	

quasiklassische
Bewegung eines
Nukleons im
Oszillatorpotential



Modell 2: Kastenpotential

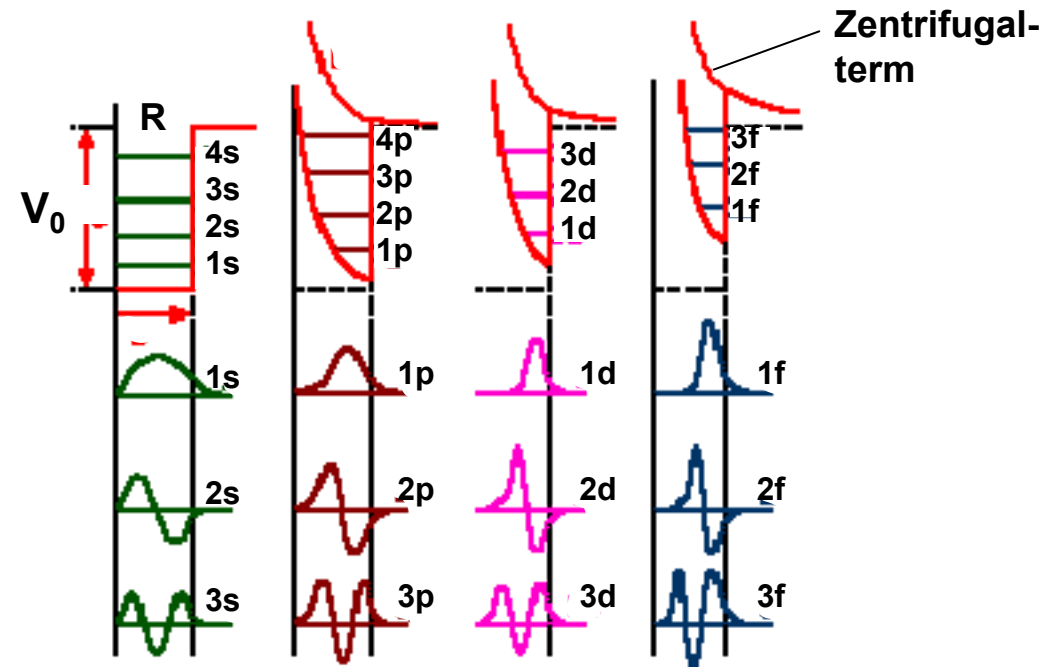
- Nukleonen befinden sich in einem Kasten-Potential $V(r)$ mit einer endlichen Tiefe $V_0 \sim 40$ MeV (Tiefe gegeben durch Fermigas-Modell)



Kastenpotenzial

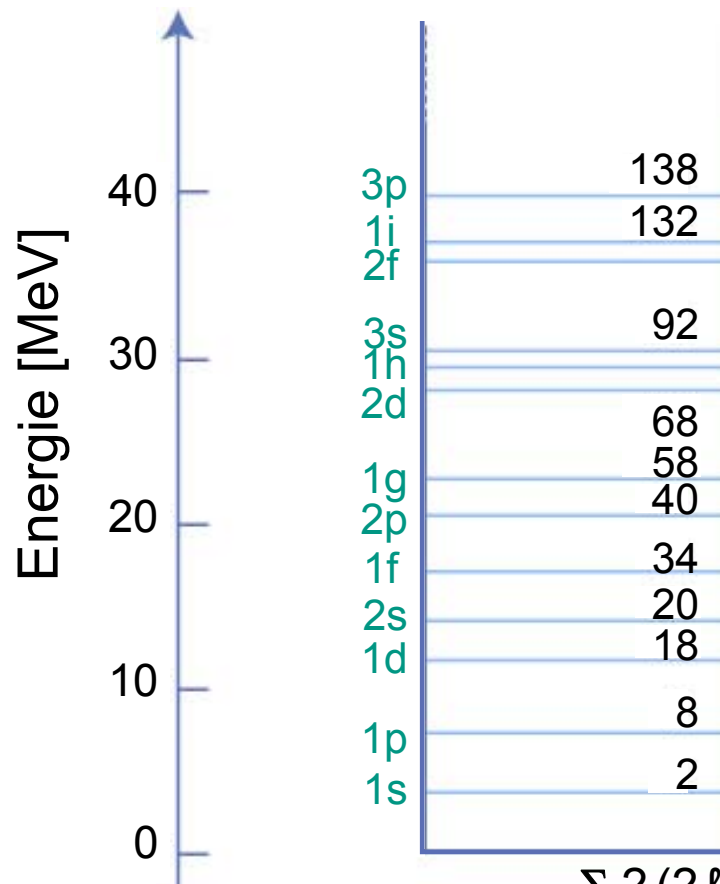
$$V(r) = -V_0 \text{ für } r < R \quad \text{für } \ell = 0$$

$$V(r) = 0 \text{ für } r > R$$



$\Sigma 2(2\ell + 1)$ = Summe der Nukleonen bis zu einzelnen Schalen

- Nukleonen befinden sich in einem Kasten-Potential $V(r)$ mit einer endlichen Tiefe $V_0 \sim 40$ MeV (Tiefe gegeben durch Fermigas-Modell)



Kastenpotenzial

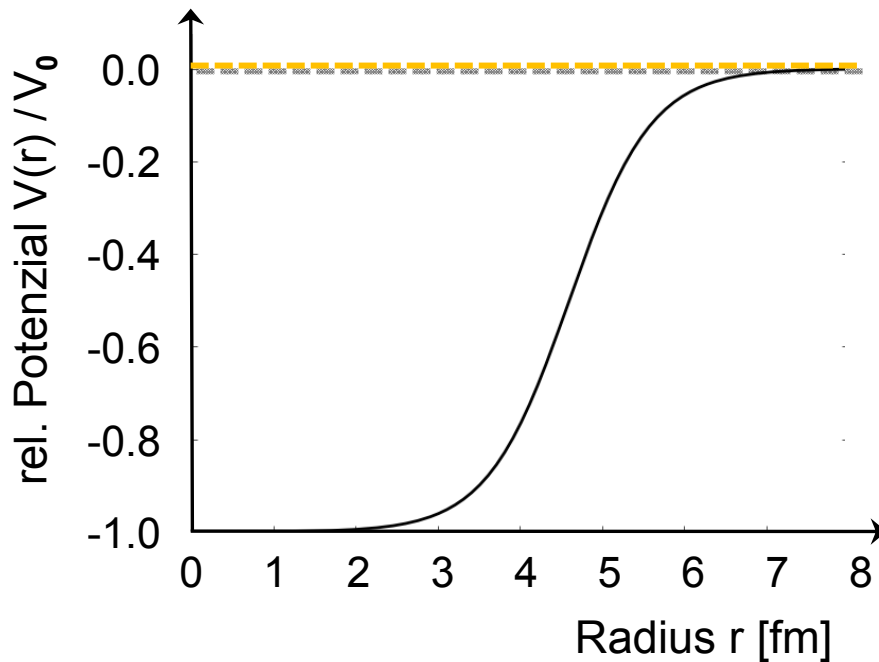
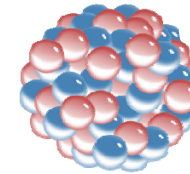
- Energieniveaus E_i aus den Nullstellen der sphärischen Bessel-Funktion j_ℓ
- Schalenabschlüsse stimmen für schwere Kerne nicht mehr mit den beobachteten magischen Zahlen überein (.., 50, 82, 126,...)

$\Sigma 2(2\ell + 1)$ = Summe der Nukleonen bis zu einzelnen Schalen

- Ansatz: benutze Saxon-Woods Dichteverteilung $\rho(r)$ [s. Kernformfaktoren], **Woods-Saxon Potential**: Verlauf folgt der Verteilung der Nukleonen im Kern, $V(r)_{\text{Woods-Saxon}}$ liegt zwischen harmonischem Oszillator & Kastenpotential

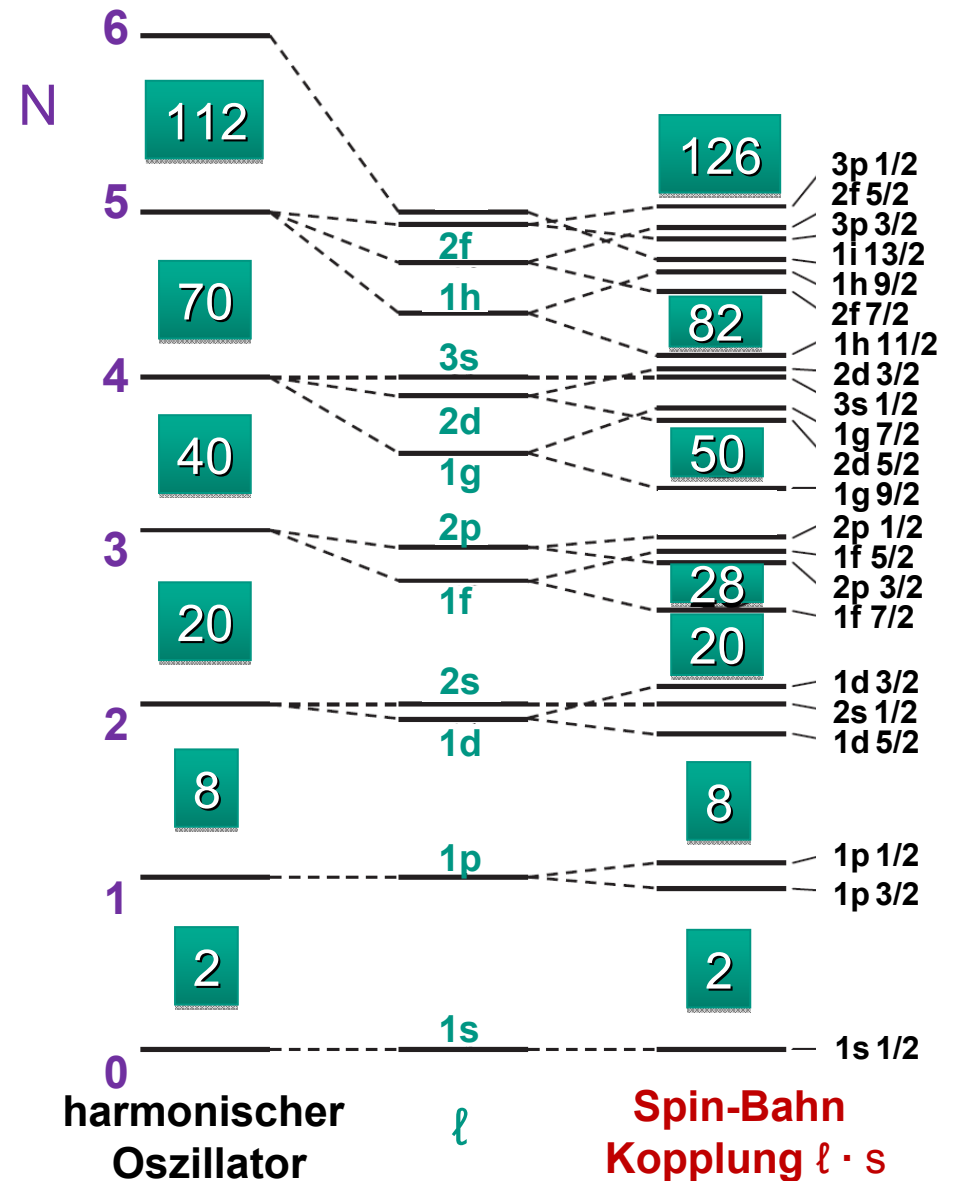
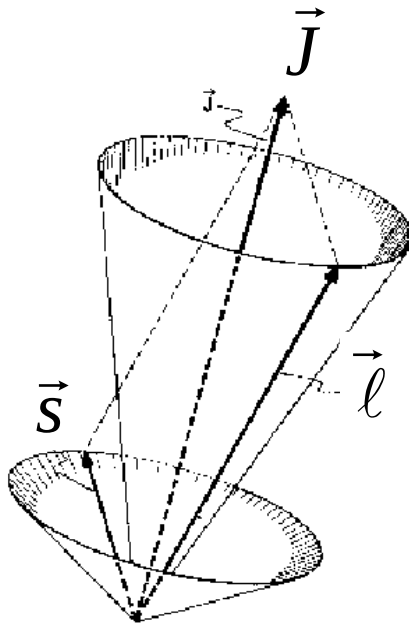
$$V(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

a: Kernradius ($a \sim A^{1/3}$)
d: Skindicke (~ 0.5 fm)



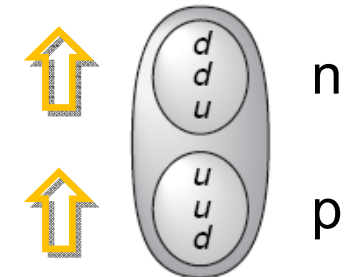
- - Energie-Eigenwerte des Woods-Saxon Potentials liegen zwischen denen des Kastenpotentials & des harmonischen Oszillators
- 'magische Zahlen' für schwere Kerne Kerne stimmen nicht mit gemessenen Zahlen überein
- weitere phys. Effekte: was ist die genaue Struktur der Kernkräfte?

- Woods-Saxon Potential ist Ausgangspunkt zur Beschreibung der Kernkräfte, aber weitere Terme! wichtige Erkenntnis (vgl. Atomphysik): auch bei Kernkräften **Kopplung von Bahndrehimpuls ℓ und Spin s**



Untersuchung des Deuterons: einfachstes gebundenes System aus zwei Nukleonen (Di-Proton & Di-Neutron sind ungebunden)

Eigenschaften des Deuterons (Grundzustand)	
Bindungsenergie	$B = - 2.225 \text{ MeV}$
Spin & Parität	$J^P = 1^+$
Isospin	$I = 0$
magnetisches Moment	$\mu = 0.857 \mu_{\text{Nukleon}} \neq \mu_p + \mu_n$
elektr. Quadrupolmoment	$Q = 0.282 \text{ e fm}^2$



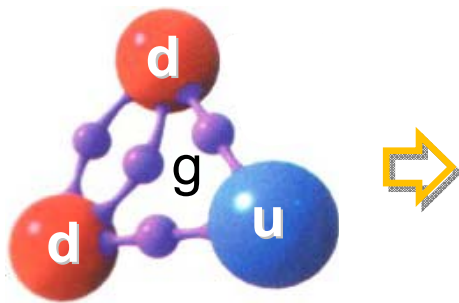
up: $I_3 = +1/2$, down: $I_3 = -1/2$

nicht kugelsymmetrisch

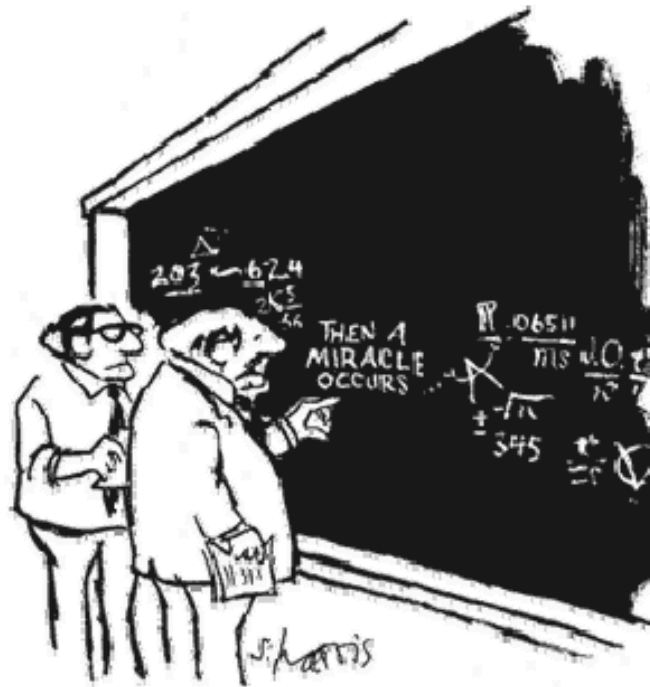
Eigenschaften des Deuterons:

Spin: $J = 1 \rightarrow$ Spins von Proton & Neutron sind parallel, Triplettzustand $\uparrow \uparrow$
 vorwiegend in Zustand mit $L = 0$ (96%), d.h. 3S_1 [$^{2S+1}L_J$]
 kleine D-Beimischung (4%), d.h. 3D_1

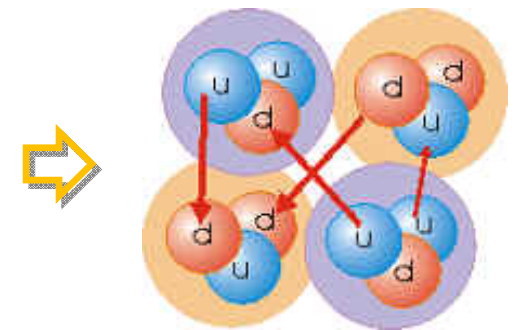
- **Struktur der Kernkraft** ist deutlich komplexer als die Struktur z.B. der Coulombkraft/Newtonschen Gravitation (Zentralpotenziale)
 - ergibt sich aus ihrer Struktur als **Restwechselwirkung** von farbneutralen Nukleonen (Analogie: elektromagnetische van der Waals – Kräfte zwischen neutralen Atomen)



Quantenchromodynamik



"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."



Restwechselwirkung

- **Struktur der Kernkraft** ist deutlich komplexer als die Struktur z.B. der Coulombkraft/Newtonschen Gravitation (Zentralpotentiale)
 - ergibt sich aus ihrer Struktur als **Restwechselwirkung** von farbneutralen Nukleonen (Analogie: elektromagnetische van der Waals – Kräfte zwischen neutralen Atomen)

Zentralkraft $V_0(r)$

entnommen aus den Eigenschaften des Deuterons (96% 3S_1 -Zustand)

spinabhängige Zentralkraft (Spin-Spin-Wechselwirkung)

entnommen aus der Neutron-Proton Streuung ($\sigma_{\text{Singulett}} > \sigma_{\text{Triplett}}$)

nichtzentrale Tensorkraft

folgt aus den höheren Momenten der Ladungsverteilungen im Kern

Spin-Bahn ($\ell \cdot s$) - Kopplungsterm

entnommen aus der Streuung an polarisierten Protonen (Links/Rechts Asymmetrie)

Tröpfchenmodell & Kernkräfte: auch bei schweren Kernen ist $B/A \sim \text{const.}$, d.h. es wirken immer nur **Kräfte zwischen zwei Nukleonen**

Wechselwirkung zwischen Nukleonen abhängig von dynamischen Größen: relativer Abstand $\vec{x}$, relativer Impuls $\vec{p}$, Gesamtbahndrehimpuls $\vec{L}$ und relative Ausrichtung der Spins $\vec{s}_1, \vec{s}_2$:

$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) \\
 & + V_{ss}(r) \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2 \\
 & + V_T(r) \cdot \frac{3}{\hbar^2} \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{x})(\vec{s}_2 \cdot \vec{x})}{r^2} - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \\
 & + V_{\ell S}(r) \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \cdot \vec{\ell} \cdot \frac{1}{\hbar^2}
 \end{aligned}$$

Zentralpotenzial

Spin-Spin Wechselwirkung

nicht-zentrale **Tensorkraft**

Spin-Bahn Wechselwirkung

■ Spin-Spin Kopplung

unabhängig vom Koordinaten-System, d.h. muß eine skalare Größe sein

$$\sim V_{ss}(r) \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 / \hbar^2$$

unterschiedliche Eigenwerte für
Triplett- und Singulett-Zustände

■ $\ell \cdot s$ Kopplung

in Analogie zur Feinstrukturaufspaltung der Atomhülle (M. Goeppert-Mayer):

Kopplung zwischen dem Bahndrehimpuls ℓ und Spin s des Nukleons

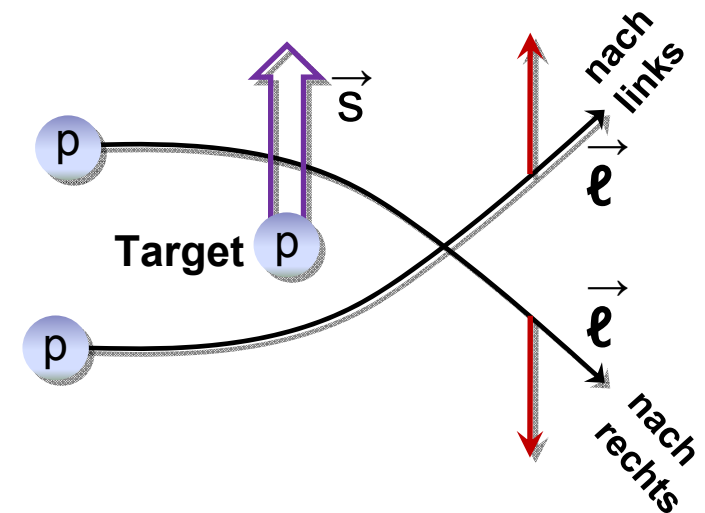
$$\sim V_{\ell s}(r) \cdot (\vec{\ell} \cdot \vec{s})$$

Spin-Bahn Kopplung
der starken Wechselwirkung

■ Experimenteller Beleg für $\ell \cdot s$ – Kopplung:

Streuung von Protonen an polarisierten Protonen
zeigt eine Asymmetrie der Streuraten zwischen

- Linksstreuung: $\vec{\ell} \cdot \vec{s} > 0$
- Rechtsstreuung: $\vec{\ell} \cdot \vec{s} < 0$



- Berechnung der Energieverschiebung der Nukleonen-Niveaus:

$$\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s} \quad \vec{j}^2 = \vec{\ell}^2 + 2 \cdot \vec{\ell} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2$$

$$\langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \left[j \cdot (j + 1) - \ell \cdot (\ell + 1) - \frac{3}{4} \right]$$



$$j = \ell + \frac{1}{2} : \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \ell$$

$$j = \ell - \frac{1}{2} : \quad \langle \vec{\ell} \cdot \vec{s} \rangle = -\frac{1}{2} \cdot (\ell + 1)$$

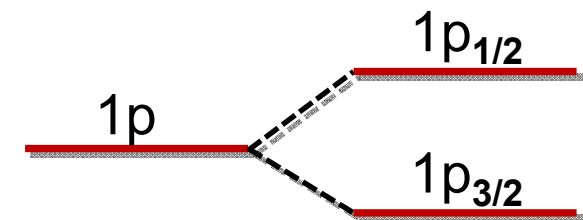
- für $j = \ell + \frac{1}{2}$: $\mathbf{V(r) + \frac{1}{2} V_{\ell s}(r) \cdot \ell}$
für $j = \ell - \frac{1}{2}$: $\mathbf{V(r) - \frac{1}{2} V_{\ell s}(r) \cdot (\ell + 1)}$

Vorzeichen von $V_{\ell s}$ ergibt für $j = \ell - \frac{1}{2}$ höhere Energien (geringeres Potenzial)

$\Delta E \sim 2\ell + 1$ mit wachsendem ℓ Zunahme der Aufspaltung

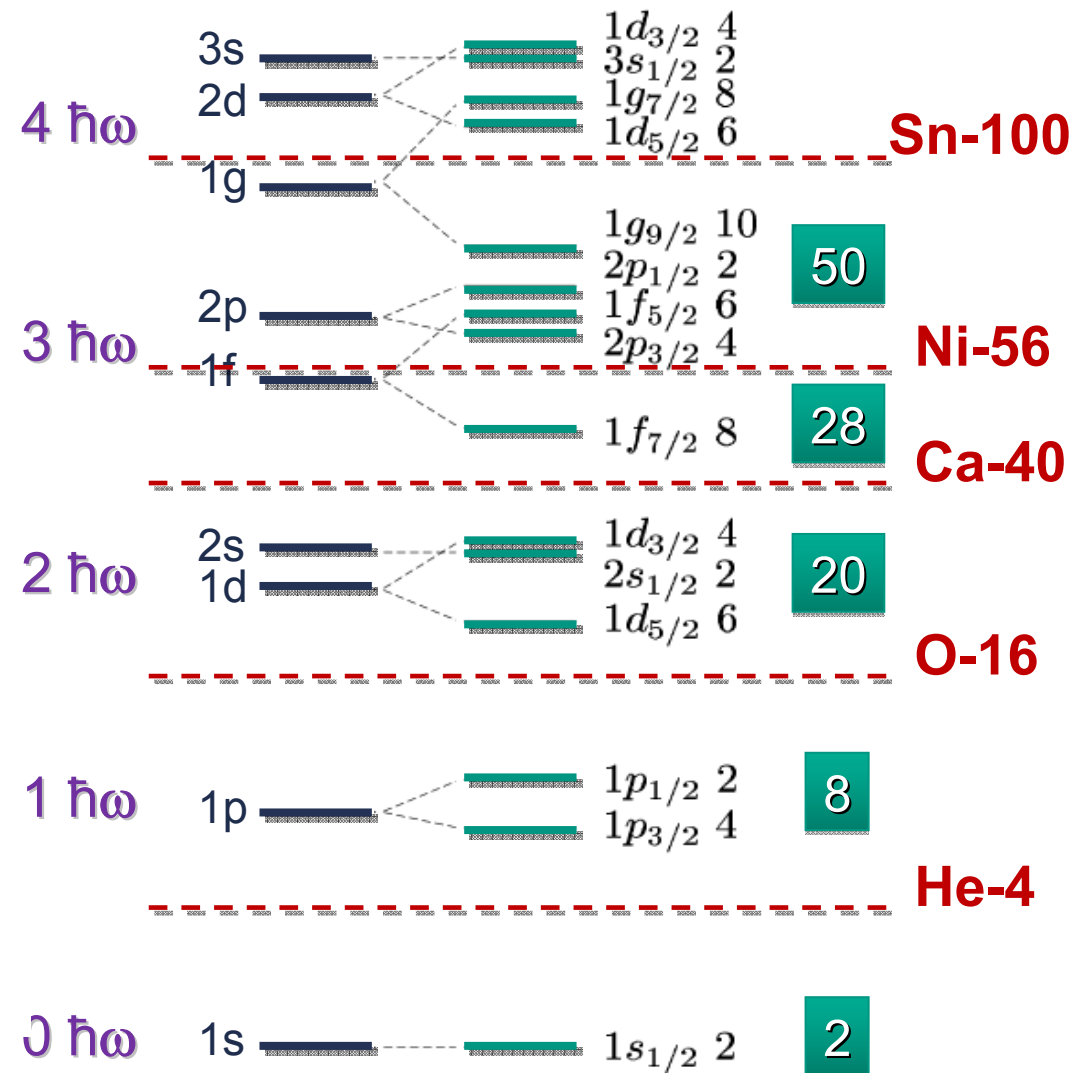
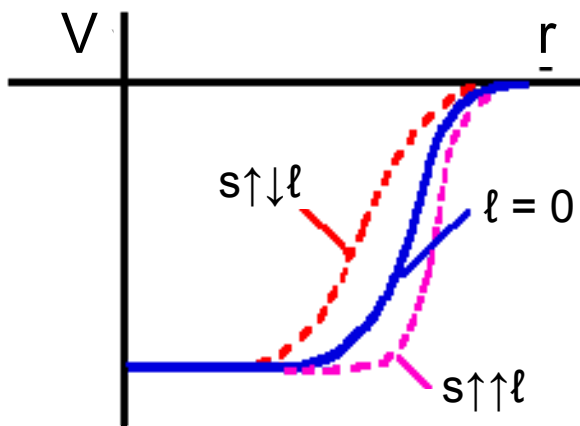
- Atomhülle: kleine Feinstrukturaufspaltung
Kernschalen: große Aufspaltung
Aufspaltung > Niveauabstand
Vorzeichen umgekehrt wie bei Atomen

Beispiel:
Aufspaltung 1p



Auspaltung durch Spin-Bahn Kopplung

- **Kernzustände mit $j = \ell + \frac{1}{2}$ liegen tiefer als $j = \ell - \frac{1}{2}$**
- in jedem Niveau j :
($2j + 1$) Protonen
($2j + 1$) Neutronen
- Einfluss des $V_{\ell s}$ Terms der Spin-Bahn Kopplung auf das Saxon-Woods-Potenzial:
maximale Beiträge von Peripherie

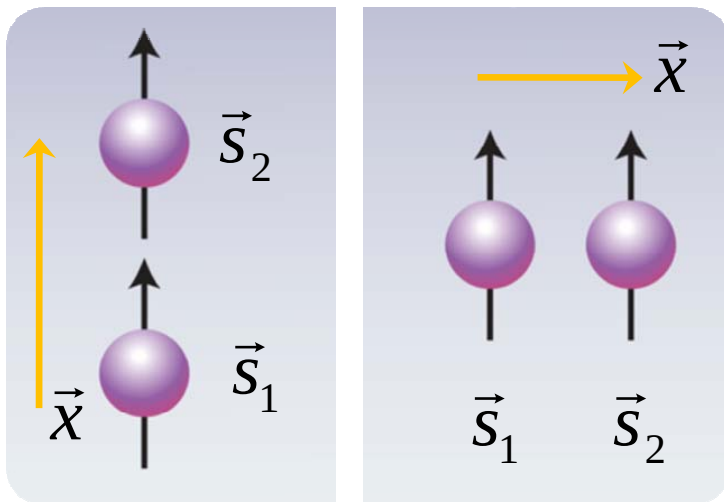


- **Tensorkraft** ist spinabhängig und z.B. verantwortlich für die kleine Deformation des Deuterons (3D_1 -Zustand)
Proton und Neutron: Spin $s = 1/2$, $\hookrightarrow$ daher maximal Dipolmomente möglich

$$\sim V_T(r) \cdot \frac{3}{\hbar^2} \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{x})(\vec{s}_2 \cdot \vec{x})}{r^2} - \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

entspricht formal der Wechselwirkung von 2 magnetischen Dipolen

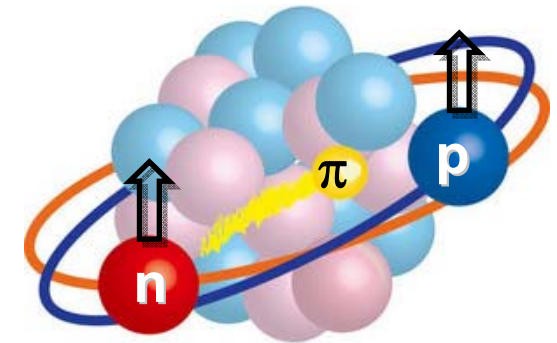
Tensorkraft



anziehend

abstoßend

- keine Tensorkraft für Singulett-Zustände
- Tensorkraft wird vermittelt durch Pionenaustausch, beeinflusst Schalen & magische Zahlen

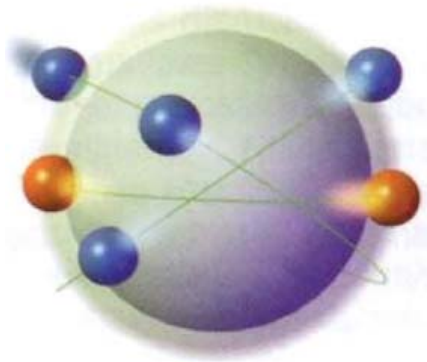


- **gg-Kerne: Spins der Nukleonen heben sich paarweise auf**, Spin $J = 0$
- nichtabgeschlossene Schalen: **Leuchtnukleon** definiert Spin & Parität

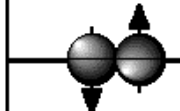
1 Nukleon in äußerster Schale: Gesamtspin $J = j$

$$\text{Parität } P = (-1)^l$$

- **Spiegelkerne** $^{17}\text{O} / ^{17}\text{F}$: 1p/1n in $1d_{5/2}$



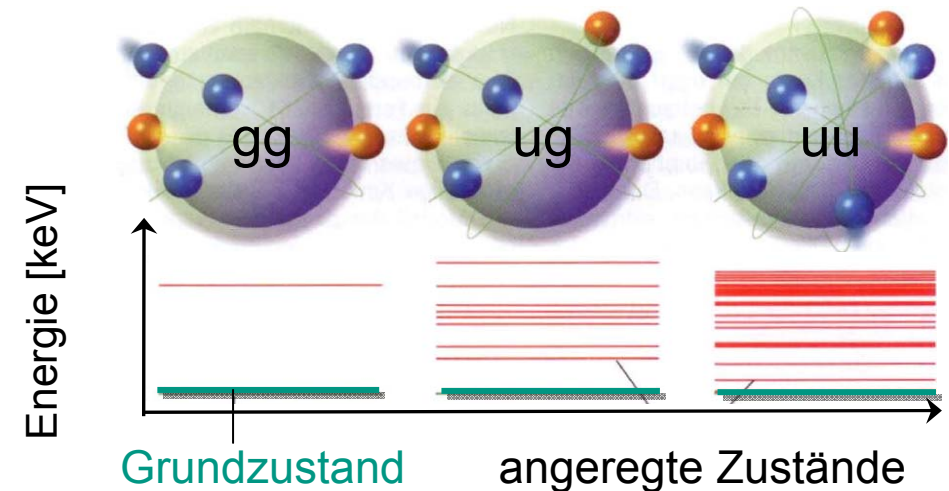
gg-Kern mit abgeschlossener Schale +
4 Neutronen + 2 Protonen: $J = 0$

Protonen	Neutronen	
		2
		1

■ **angeregte Kernzustände**

gg-Kern: 1. angeregter Zustand
liegt bei hoher Energie

uu-Kern: viele angeregte Zustände
bei niedrigen Energien



■ Kurzreichweite der Kernkräfte ($\sim 1\text{-}2\text{ fm}$)

folgt z.B. direkt aus der schwachen Bindungsenergie des Deuterons

Lösung der Schrödinger-Gleichung für Deuteron mit Zentralpotenzial $V_0(r)$:

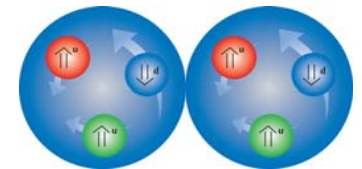
Ansatz eines kastenförmigen Potenzials mit $R_0 = 1.3\text{ fm}$; $B = -2.2\text{ MeV}$

↪ Tiefe des Potenzialtopfes: $V_0 \approx -50\text{ MeV}$

■ Abstoßung bei kleinen Abständen ($< 0.8\text{ fm}$)

Nukleon-Nukleon Streuexperimente bei niedrigen Energien zeigen:

- anziehender Charakter der Kernkraft bis $d \sim 2\text{ fm}$
- abstoßender Charakter der Kernkraft für $d < 0.8\text{ fm}$:



Abstoßung basiert **nicht** auf dem Pauli-Prinzip,

12 Quarks in h^3 : 3 Farbladungen (rbg) , 2 Spinzustände ($\uparrow\downarrow$), 2 Isospins (u,d)

resultiert aus der starken **Spin-Spin Wechselwirkung** der Quarks

wenn 2 Nukleonen „überlappen“: 2 der Quarks im p-Zustand $\Rightarrow$ Abstoßung

Kernkräfte als Austauschkräfte

■ anziehende Kernkräfte: Quark austausch

analog zur kovalenten Bindung der Atome

Modell: Nukleon-Konfiguration aufgebaut aus Diquark und einem Quark

Diquark: (u,d) energetisch günstig falls

Spin $S = 0$ & Isospin $I = 0$

Quark austausch nur subdominanter Beitrag!

■ anziehende Kernkräfte: Mesonenaustausch

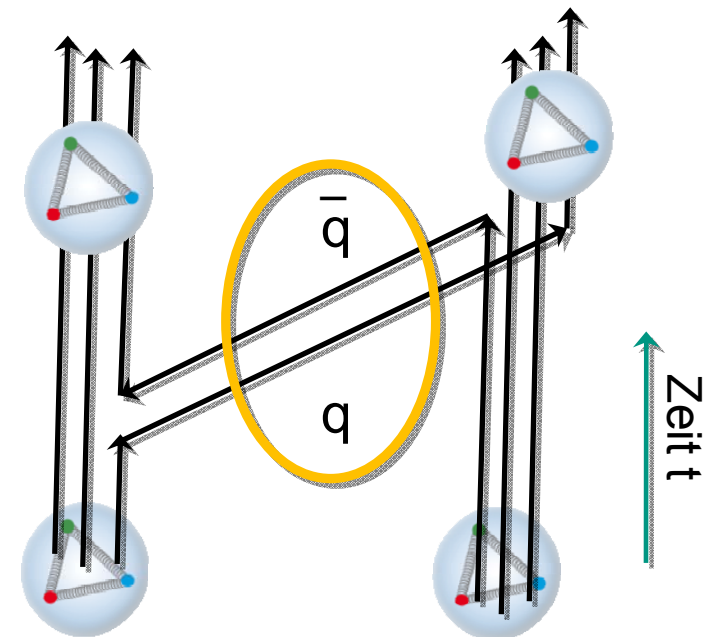
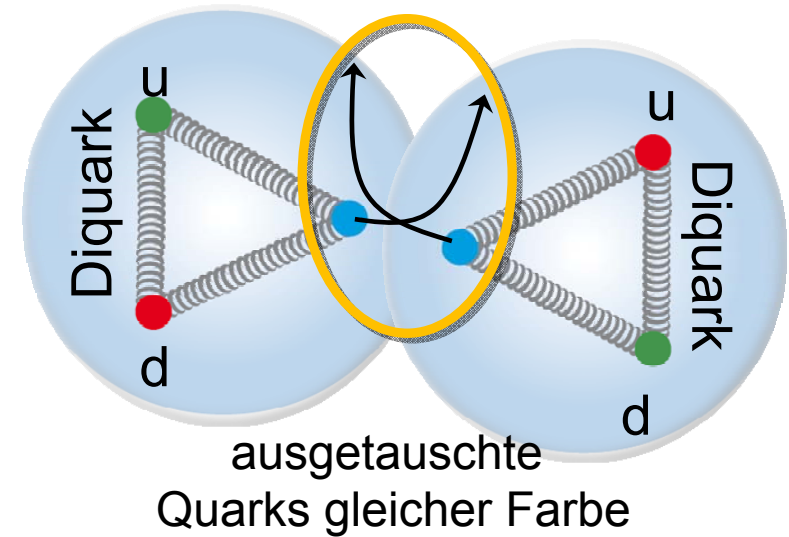
im Nukleon sind virtuelle Quark-Antiquark Paare vorhanden, $\Rightarrow$ Austausch von farbneutralen Quark-Antiquark-Paaren (Mesonen = $q\bar{q}$ Paare)

dominanter Beitrag zur NN-Kraft

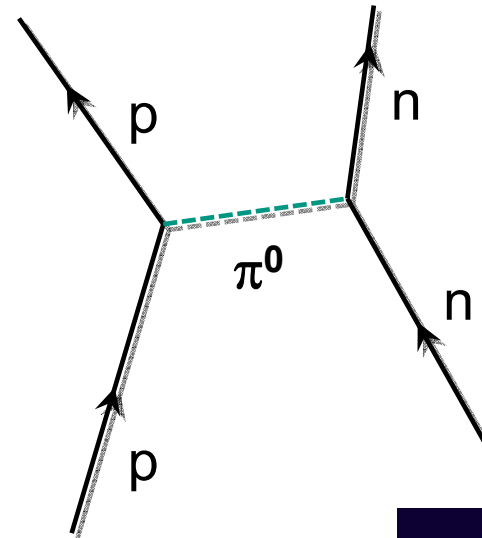
1-Pion-Austausch

aber auch 2-Pionen –Austausch sowie

Austausch von leichten Vektormesonen ρ , ω



- durch die endliche Masse m_π des ausgetauschten Bosons wird die Reichweite der starken Wechselwirkung begrenzt auf $R \sim 1.4 \text{ fm}$
- der Einpionen-Austausch kann nicht alle Eigenschaften des Kernpotenzials erklären: Austausch weiterer Mesonen $\sigma, \omega, \rho, \eta, \delta$
 - ↳ spezielle Form des Wechselwirkungspotenzials (attraktive/repulsive Bereiche) vgl. zu Restwechselwirkung bei Atomen



$$\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \Rightarrow$$

$$c \cdot \Delta t \sim 1.4 \text{ fm}$$

Meson	Masse	Reichweite	Typ der Ww.	Stärke
π	138 MeV	1-2 fm	langreichweitig	14.6
η	548 MeV	0.5-1 fm	Bindung	8
ω	783 MeV	0.7 fm	Repulsion	20
ρ	775 MeV	0.7 fm	LS-Kraft	0.95

