

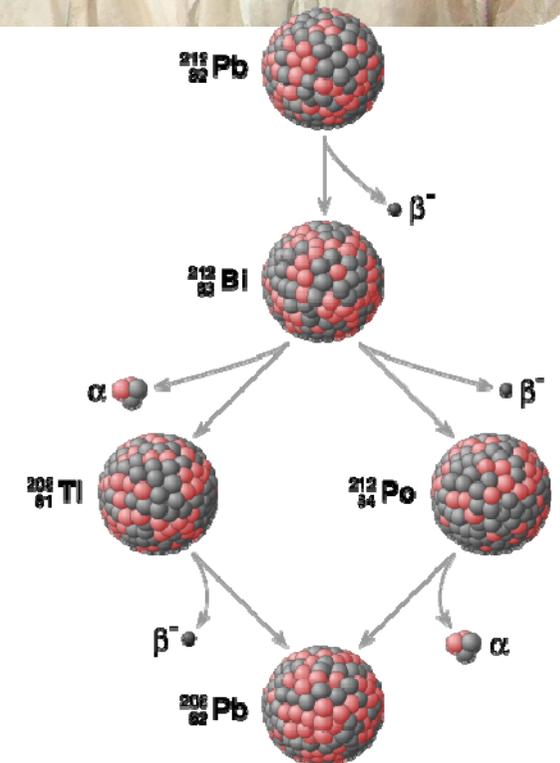
Kerne und Teilchen

Moderne Physik III

Vorlesung # 07

3. Instabile Kerne

- radioaktiver Zerfall: Grundlagen
- Lebensdauer, Zerfallskonstante
- Verzweigung bei Zerfällen
- α -Zerfall: Grundlagen
- Zerfallsketten von primordialen Elementen
- Tunneleffekt: Transmissionswahrscheinlichkeit

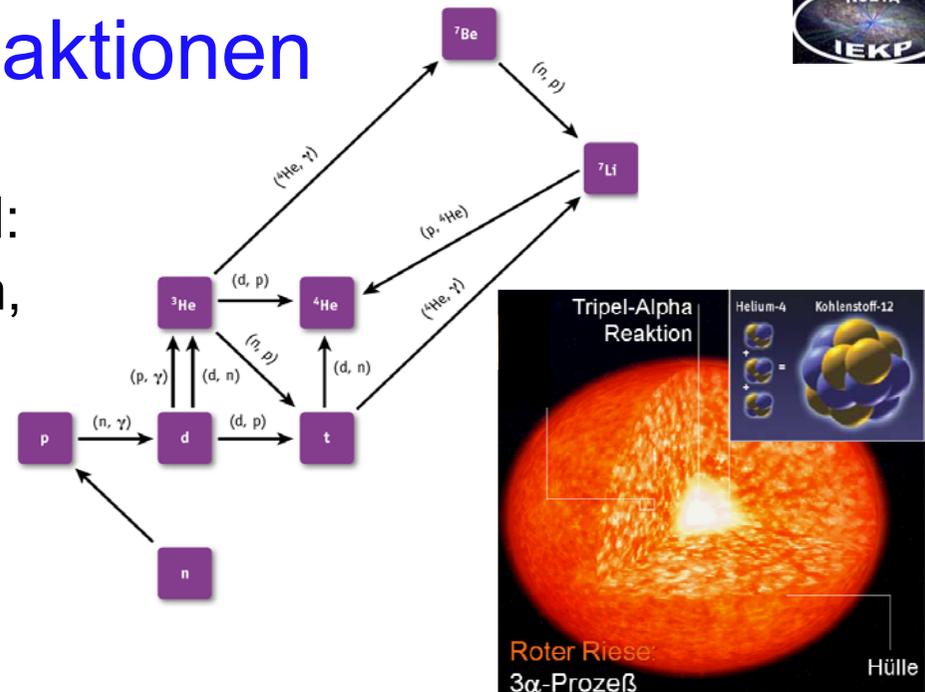


WH: Fusionsreaktionen

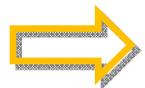


- **primordiale Nukleosynthese** im Urknall: Bildung der leichten Elemente Deuterium, Helium & Lithium

↳ Baryonengehalt im Universum (4 %)
 ↳ Zahl der Teilchengenerationen (N=3)



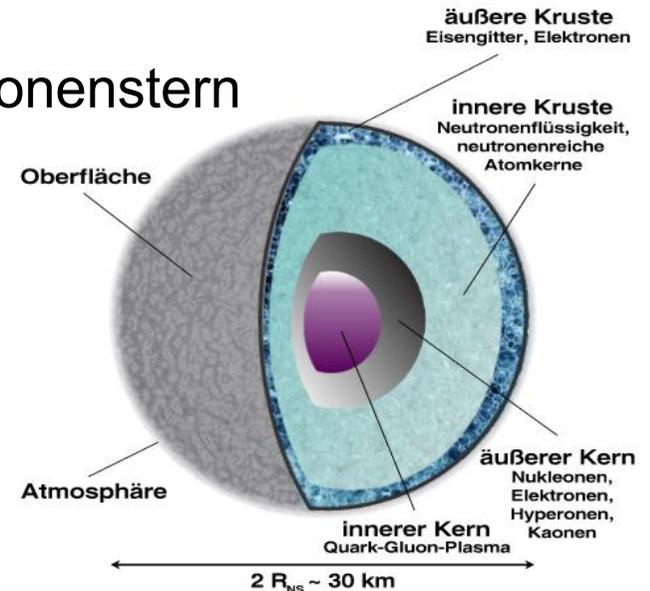
- **Elementsynthese** in Sternen:
 - pp-Fusion/CNO-Zyklus in Sternen
 - Tripel-Alpha Reaktion in Roten Riesen (über 7.6 MeV ^{12}C -Resonanz)
 - schwere Sterne: Fusion bis Fe, Ni
 - Kernkollaps: Supernova (SNa)



- **Elementsynthese** jenseits Fe-56:
 - explosiv/schnell: r-Prozess in Super-N
 - langsam: s-Prozess in roten Riesen
 - Anlagerung von Neutronen, β -Zerfälle

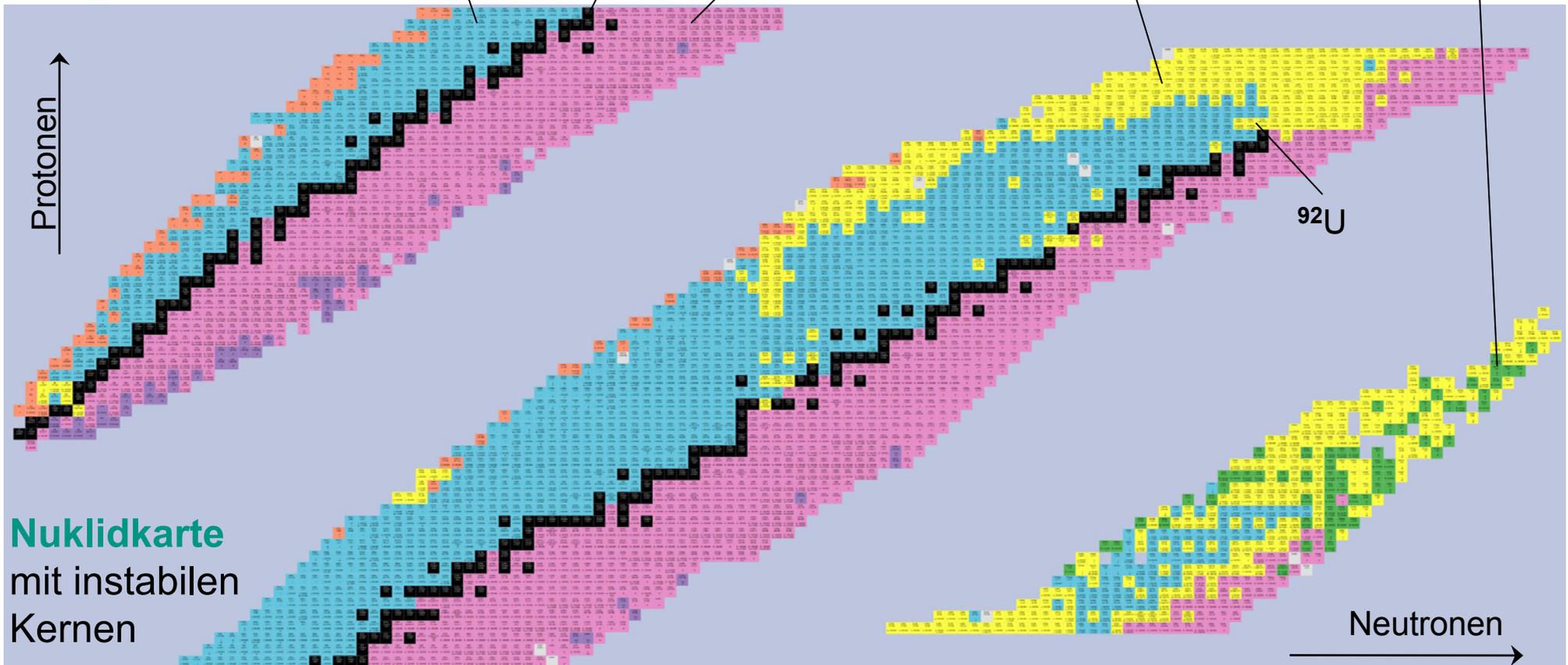
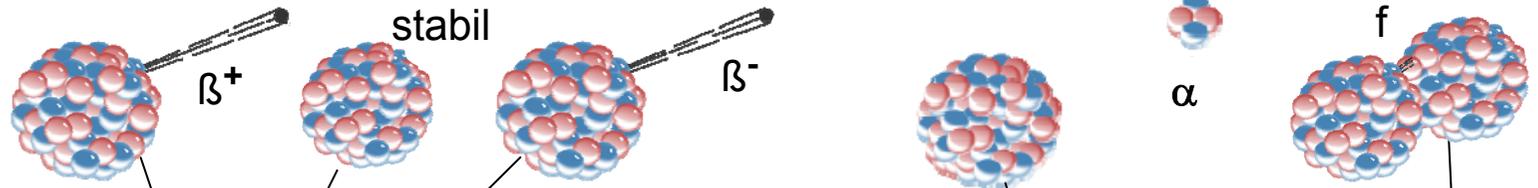
2 - Anlagerung von Protonen bei Neutron-reichen Kernen, p-Prozess

Neutronenstern



3. Instabile Kerne

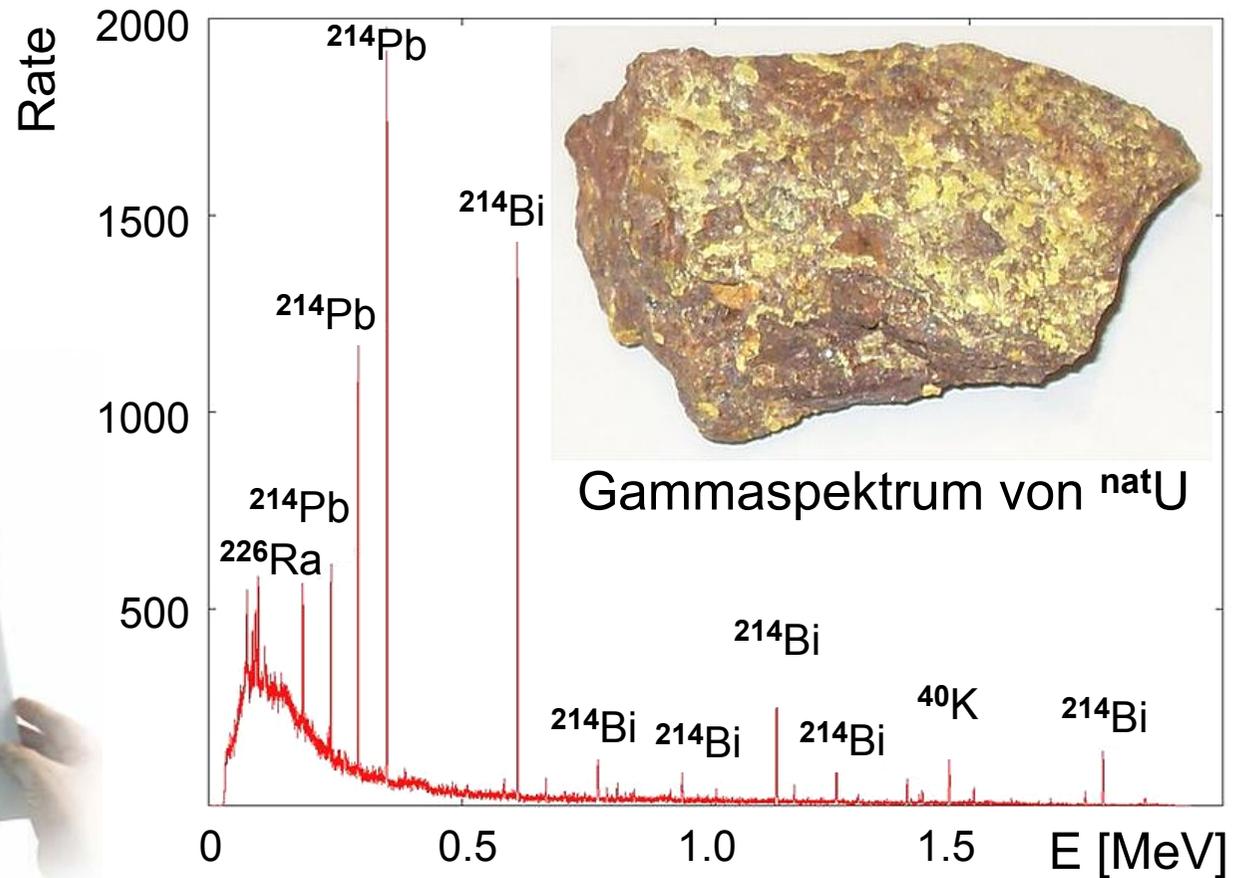
Instabilität durch
 α, β, γ -Zerfall
bzw. Spaltung



Nuklidkarte
mit instabilen
Kernen

Radioaktiver Zerfall - Nuklidkarten

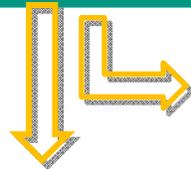
- Karlsruher Nuklidkarte (seit 1958) gibt einen umfassenden Überblick über alle bekannten stabilen und instabilen Kerne & ihre Zerfallsdaten:
 - Isotopenhäufigkeit
 - Zerfalls-art, -parameter
 - Spin & Parität
 - ...
 - online verfügbar unter www.nucleonica.net



3.1 radioaktiver Zerfall

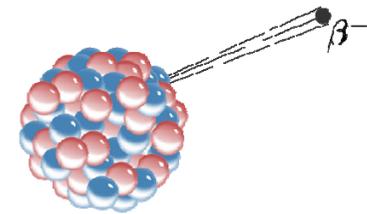
- in einem Ensemble (Quelle) mit einer großen Anzahl N instabiler Teilchen bzw. radioaktiver Kernen führen radioaktive Zerfälle in einem Zeitintervall dt zu einer Abnahme dN der Ensemble-/Kern-Anzahl

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$



Zerfallskonstante λ

neg. Vorzeichen, da Teilchenabnahme



- Zerfallskonstante λ ist Teilchen- bzw. Kern-spezifisch, λ in $[s^{-1}]$**

Beispiel: α -Zerfall von ^{226}Ra :

$$\lambda = 1.4 \cdot 10^{-11} / s$$

Maß für statistische Wahrscheinlichkeit, im Zeitintervall $dt = 1s$ zu zerfallen



$$A = \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

Aktivität A einer Quelle (keine Konstante!):

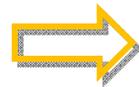
~ zur Zerfallskonstanten λ ,

~ Ensembleanzahl N (nimmt ab, damit auch A)

Exp. Zerfallsgesetz & Halbwertszeit $t_{1/2}$

- in einem Ensemble $N(t)$, das zum Zeitpunkt $t = 0$ aus $N(0)$ Kernen besteht, beobachtet man eine **exponentielle Abnahme** der Zahl der Kerne

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int_0^t dt$$



$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

exponentielles
Zerfallsgesetz



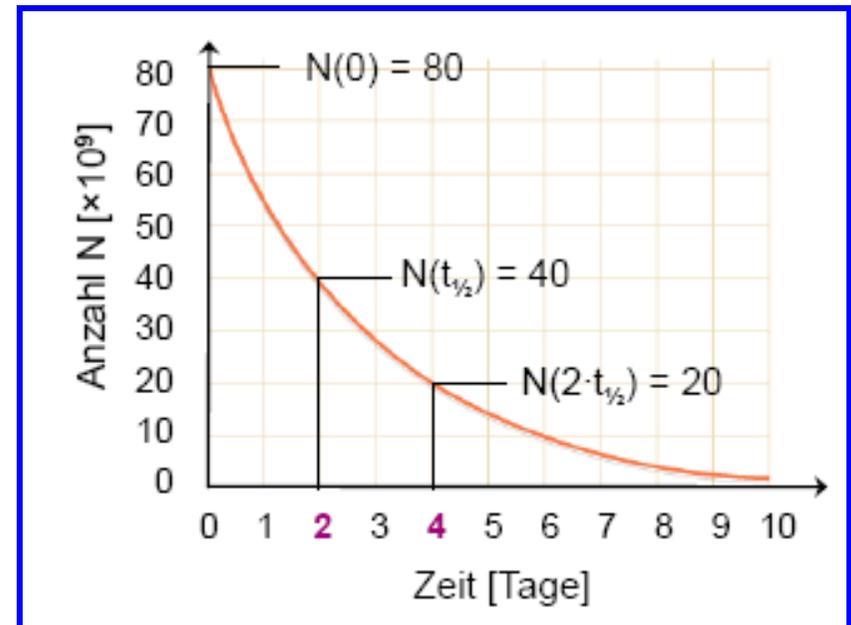
$t = 0$ ist beliebig wählbar !

- bei exponentiellen Zerfällen mit einer Zerfallskonstanten λ lassen sich 2 charakteristische Zeiten definieren:

1. Halbwertszeit $t_{1/2}$:

nach dem Zeitintervall $t = t_{1/2}$ sind noch die Hälfte der ursprünglichen Kerne vorhanden, d.h. eine Hälfte $N(0)/2$ des Ensembles ist bereits zerfallen

$$N(t_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N(0) \leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{(-\lambda \cdot t_{1/2})}$$



2. mittlere Lebensdauer τ :

nach einem Zeitintervall $t = \tau$ (d.h. der mittleren Lebensdauer) sind noch $N(\tau) = N(0)/e$ radioaktive Kerne vorhanden ($1/e = 36.8\%$)

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad \text{mittlere Lebensdauer = Inverses der Zerfallskonstanten}$$

$\tau = 10^{-24} \text{ s } (\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+) \Rightarrow \dots \tau = 12.3 \text{ a } (T_2 \beta\text{-Zerfall}) \Rightarrow \dots 10^{21} \text{ a } (2\nu\beta\beta) \dots$

$$t_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0.693 \cdot \tau \quad \tau = 1.443 \cdot t_{1/2}$$

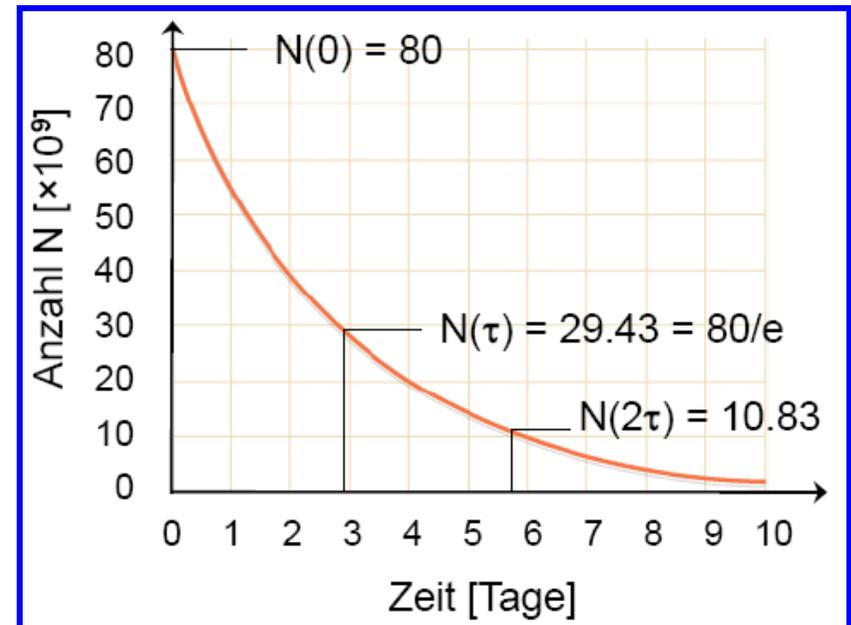
$$t_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0.693 / \lambda$$

Zerfallsbreite Γ :

ein instabiler Zustand (Resonanz) hat eine charakteristische Energie-Breite Γ

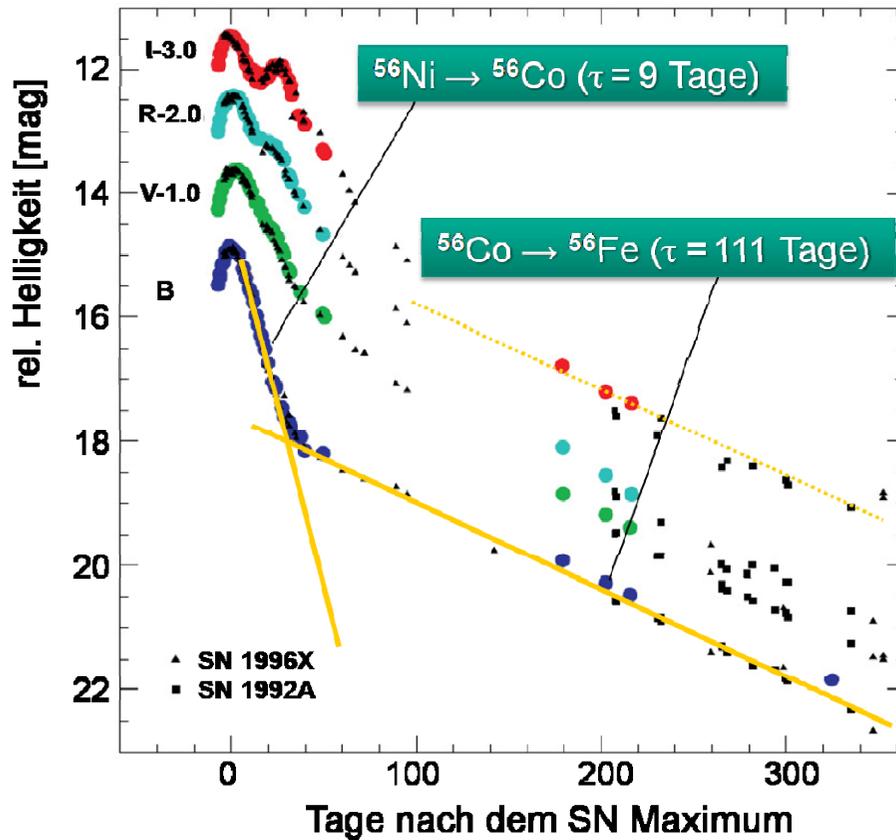
$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \cdot \lambda$$

Heisenbergsche
Unschärferelation



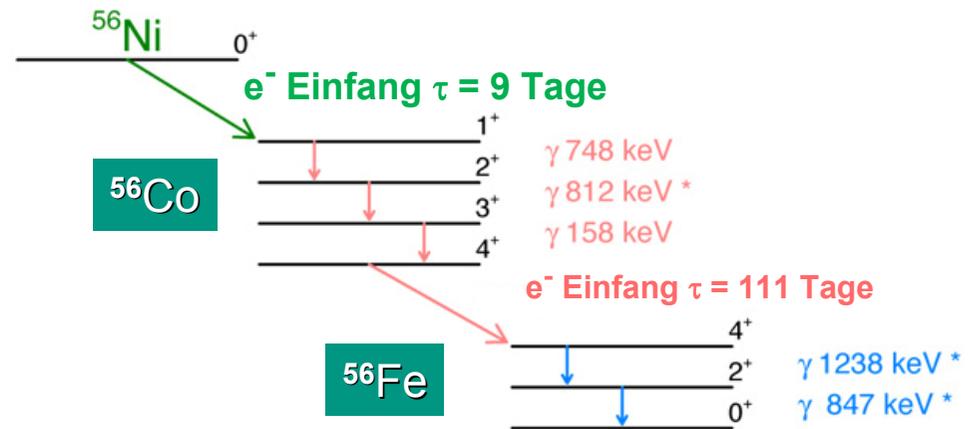
Radioaktive Lebensdauer: SN1a Lichtkurve

SN1a: bei der thermonuklearen Detonation eines weißen Zwergs werden bei $t = 0$ große Mengen an ^{56}Ni erzeugt, das mit einer mittleren Lebensdauer $\tau(^{56}\text{Ni}) = 9$ Tage durch Elektroneneinfang zerfällt, erzeugtes ^{56}Co zerfällt weiter radioaktives Zerfallsschema $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$



SN-Lichtkurven folgen τ des Zerfalls

Gammaquanten aus radioaktiven Zerfällen heizen die umgebende Materie auf –
 ↳ **optische Luminosität einer SN1a folgt der Lebensdauer τ von ^{56}Ni , ^{56}Co**



Aktivität einer Quelle: Einheiten

Aktivität $A(t) = -dN/dt$ beschreibt die Zahl dN der Zerfälle pro Zeiteinheit dt

$$A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

mit wichtiger (s.o.) Relation **$A(t) = \lambda \cdot N(t)$**

die Aktivität einer Quelle nimmt exponentiell ab

1 Bq = 1 Zerfall / s 1 Becquerel = $2.70 \cdot 10^{-11}$ Ci (nach Henri Becquerel)

1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Zerfälle / s alte Einheit Curie, = Aktivität 1 g Radium (^{226}Ra)
(nach Pierre Curie)

abgeleitete Größen:

- spezifische Aktivität [Bq/kg], Aktivitätskonzentration [Bq/m³]
- Beispiele: ^3H hat $3.6 \cdot 10^{14}$ Bq/g, ^{14}C hat $1.7 \cdot 10^{11}$ Bq/g
 ^{133}Xe hat $6.8 \cdot 10^{15}$ Bq/g, $^{\text{nat}}\text{U}$ hat $2.5 \cdot 10^4$ Bq/g

Energiedosis einer Quelle, neue Einheit: **1 Gray**
 = absorbierte Energie einer Quelle in einer Materialprobe
 mit dem Volumen V und der Dichte ρ
 alte Einheit: 1 rad = 10^{-2} J/kg

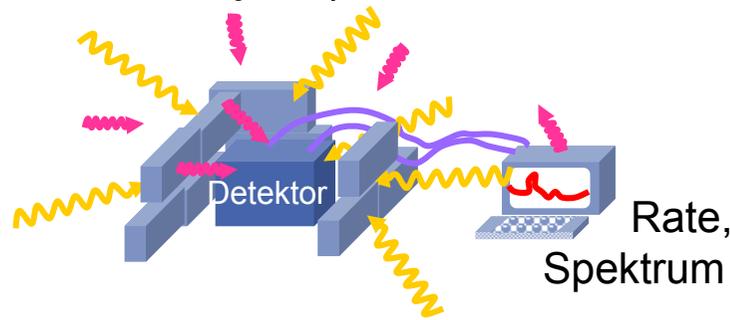
$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J / kg}$$

Beispiele für Aktivitäten:

- **extrem untergrundarme Materialien** für Astroteilchenphysik:

~100 nBq/kg für die Suche nach der dunklen Materie,
 $0\nu\beta\beta$ -Zerfall (Neutrino-Physik)

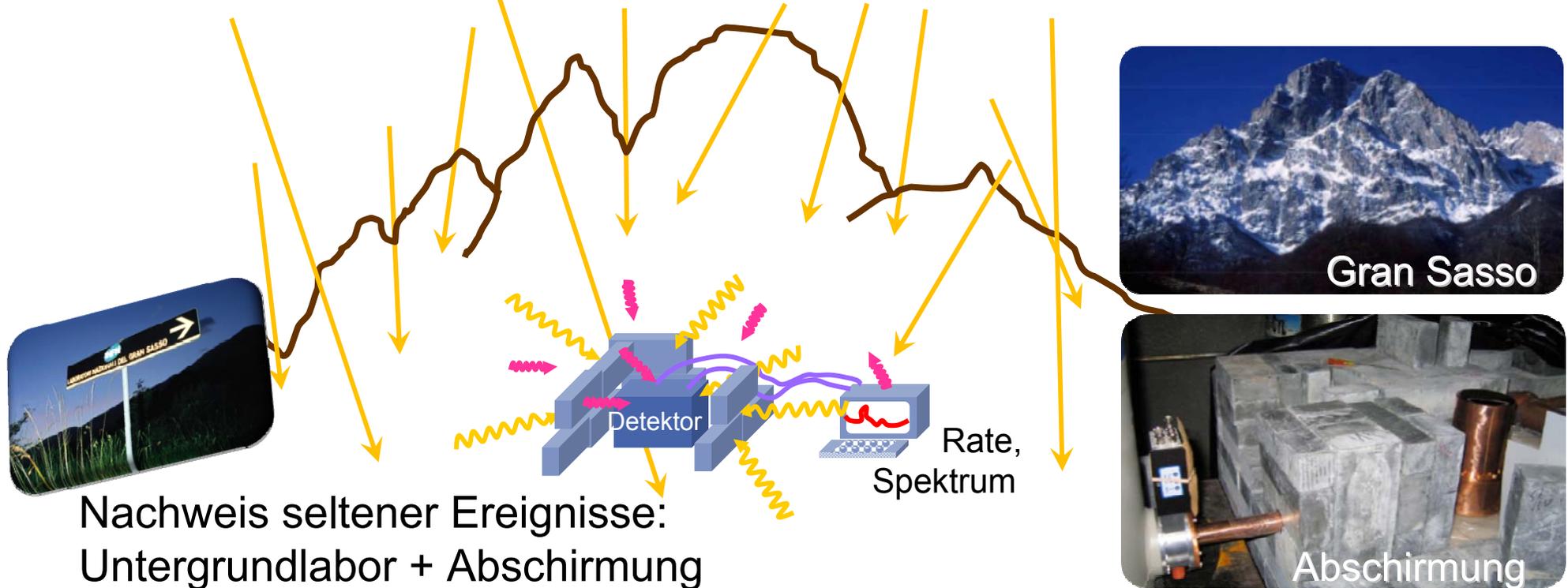
Gestein:
 10^{-6} g(Th) / g
 Stahl:
 10^{-9} g(Th) / g



- menschlicher Körper: $A \sim 3.7$ kBq (^{40}K , ^{14}C)
- Haus: Luft $A \sim 1$ kBq durch Radon (^{222}Rn),
 100 m² Wände mit $\sim 10^{-6}$ (^{232}Th)/g $\Rightarrow 10^{10}$ γ 's/Jahr
- Laborquellen/Praktikum: $A \sim$ einige mCi
- KATRIN β -Zerfallsquelle: $A \sim 10^{11}$ β -Zerfälle/s (~ 4 Ci)
- Eichquellen für solare Neutrinos: mCi, GCi



Radioaktiver Untergrund & Anforderungen



Quelle und Abschirmung	Ereignisse/kg/s	Ereignisse/kg/Tag
natürlicher Raumuntergrund	100	10^7
innerhalb einer Bleiabschirmung		10^2
kosmische Myonen an Erdoberfläche	0.1	10^4
Detektoren der Astroteilchenphysik		10^{-2}

■ ein instabiler Kern (Mutternuklid) kann sich über verschiedene Zerfallsarten in das Tochternuklid umwandeln:

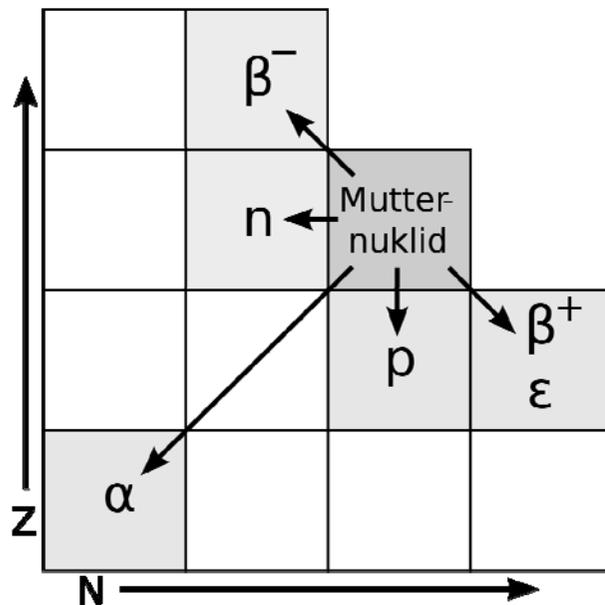
α -Zerfall: Änderung der Kernladung $\Delta Z = -2$, $\Delta A = 4$, schwere Kerne

β -Zerfall, Elektron-Einfang: Änderung $|\Delta Z| = 1$, $\Delta A = 0$

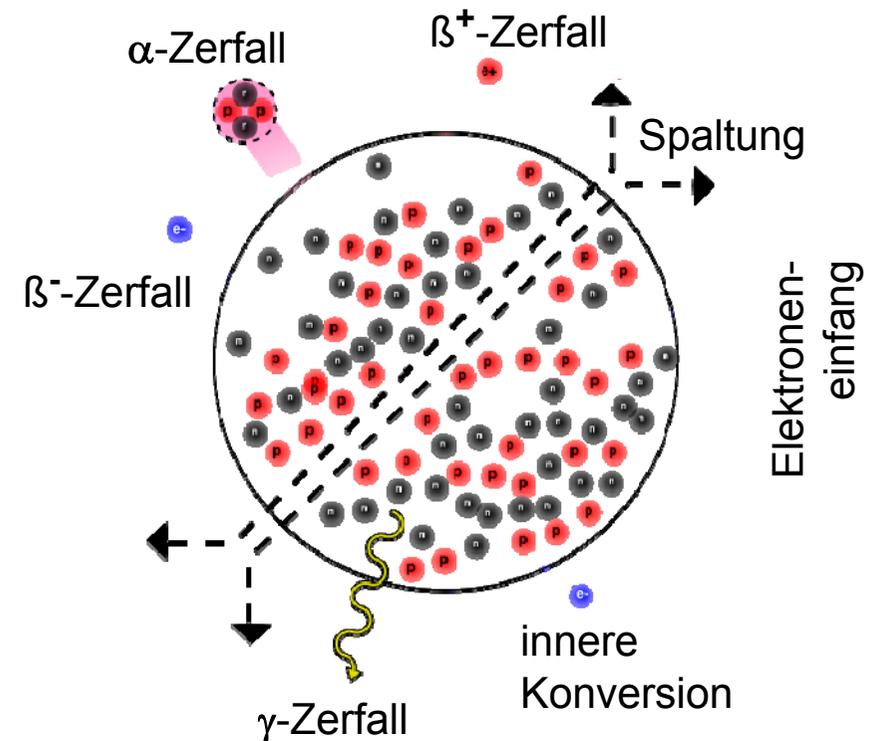
γ -Zerfall: Änderung $\Delta Z = 0$, $\Delta A = 0$

Spaltung: Änderung $\Delta Z \gg 1$, $\Delta A \gg 1$

Teilchenzerfall: Emission p, n



Zerfallsarten von Kernen



Zerfälle mit Verzweigung

radioaktive Zerfälle können in verschiedene Kanäle erfolgen

Beispiele: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ oder $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ (Pionzerfall in Myon/Positron)

$^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{212}\text{Po} + e^- + \nu_e$ (64%) oder $^{212}\text{Bi} \rightarrow ^{208}\text{Tl} + \alpha$ (36%)

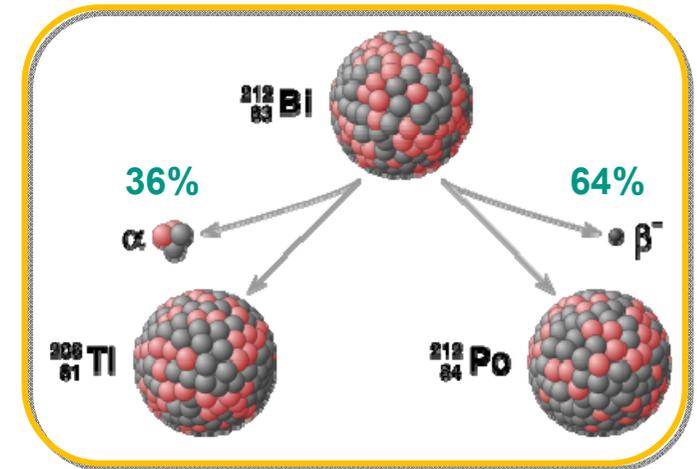
zeitliche Abnahme dN/dt des Mutterkerns/Ausgangsteilchens:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N = N(0) \cdot e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

λ : totale Breite
 λ_i : Partialbreite

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$



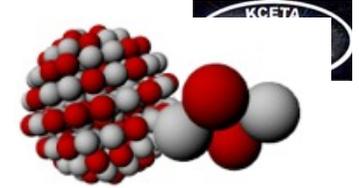
Definition der Verzweungsverhältnisse
 (**branching ratios**) f_1, f_2 :

$$f_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} \quad f_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

β -Aktivität: $A_\beta(t) = N \cdot \lambda \cdot f_1 = N \cdot \lambda_1$

α -Aktivität: $A_\alpha(t) = N \cdot \lambda \cdot f_2 = N \cdot \lambda_2$

3.2 Alpha – Zerfall



schwere Kerne mit $A > 150$ (Sm) können durch **α -Emission** zerfallen – falls:

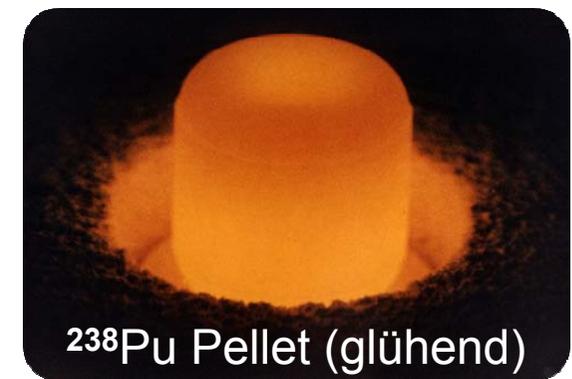
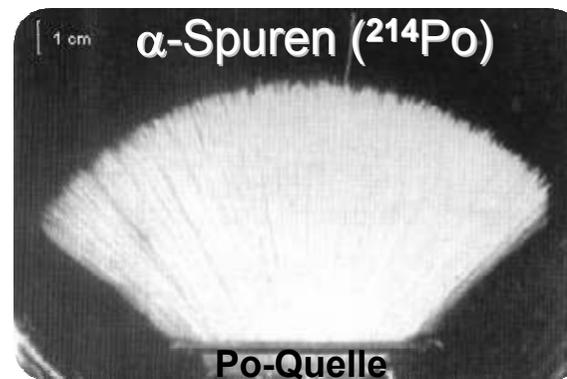
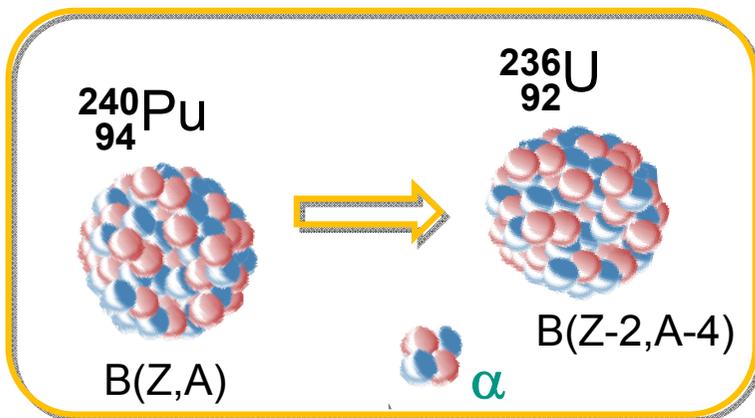
$$Q_\alpha = B(Z - 2, A - 4) - B(Z, A) + B_\alpha(28.3 \text{ MeV}) > 0$$

der Q-Wert Q_α ist entscheidend für die Halbwertszeit $t_{1/2}$ des Isotops:

- langsamster α -Zerfall: $^{232}\text{Th} \rightarrow ^{228}\text{Ra} + \alpha$ $t_{1/2} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ a}$
- schnellster α -Zerfall: $^{212}\text{Po} \rightarrow ^{208}\text{Pb} + \alpha$ $t_{1/2} = 3.5 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

α -Teilchen sind mono-energetisch (typischer Wert: $E_{\text{kin}} \sim$ einige MeV)

- Visualisierung in Nebelkammer-Aufnahmen: gleiche Reichweite
- Alpha-Teilchen haben eine hohe Ionisationsrate & geringe Reichweite:
 ↳ radiologische Konsequenzen, Verwendung von Radionuklidbatterien



α – Zerfall: kinetische Energien

Energiebetrachtung beim α -Zerfall:

- vor dem α -Zerfall: ruhender Mutterkern $E_{kin}(MK) = 0$
- nach dem α -Zerfall: kinetische Energie α -Teilchen $E_{kin}(\alpha)$
Rückstoß-Energie des Tochterkerns $E_{kin}(TK)$

mit Massenverhältnis

$$\frac{M_{\alpha}}{M_{TK}} \cong \frac{4}{A-4}$$

ergeben sich folgende kinetische Energien:

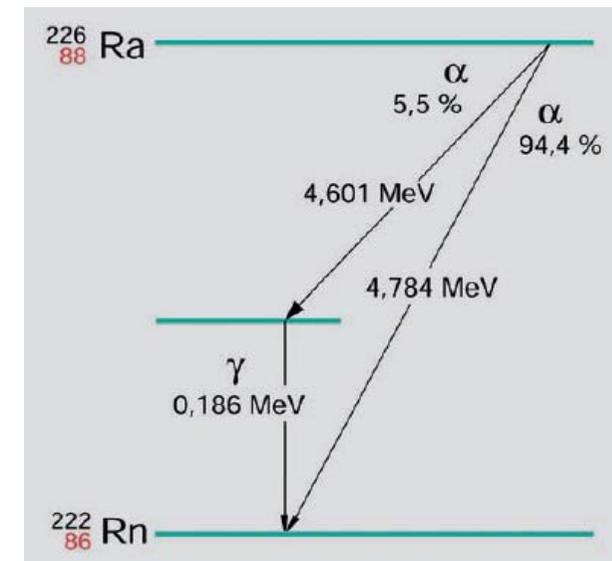
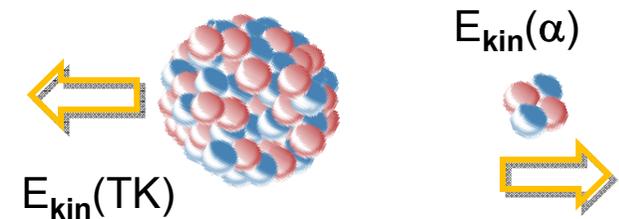
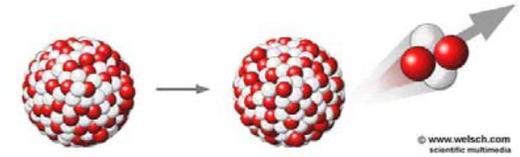
$$E_{kin}(TK) \cong \frac{4}{A} \cdot Q_{\alpha}$$

$$E_{kin}(\alpha) \cong \frac{A-4}{A} \cdot Q_{\alpha}$$

$$E_{kin}(\alpha) \gg E_{kin}(TK)$$

α -Zerfälle können auf angeregte Niveaus des Tochterkerns führen

^{226}Ra Zerfallsschema verschiedene α -Energien



α-Zerfallsketten

es werden natürliche radioaktive Zerfallsketten (α- & β- Zerfälle) der langlebigen 'primordialen' Elemente ^{235}U , ^{238}U , ^{232}Th aus SN-Explosionen beobachtet

Uranserie ^{238}U $A = 4 \cdot j + 2$



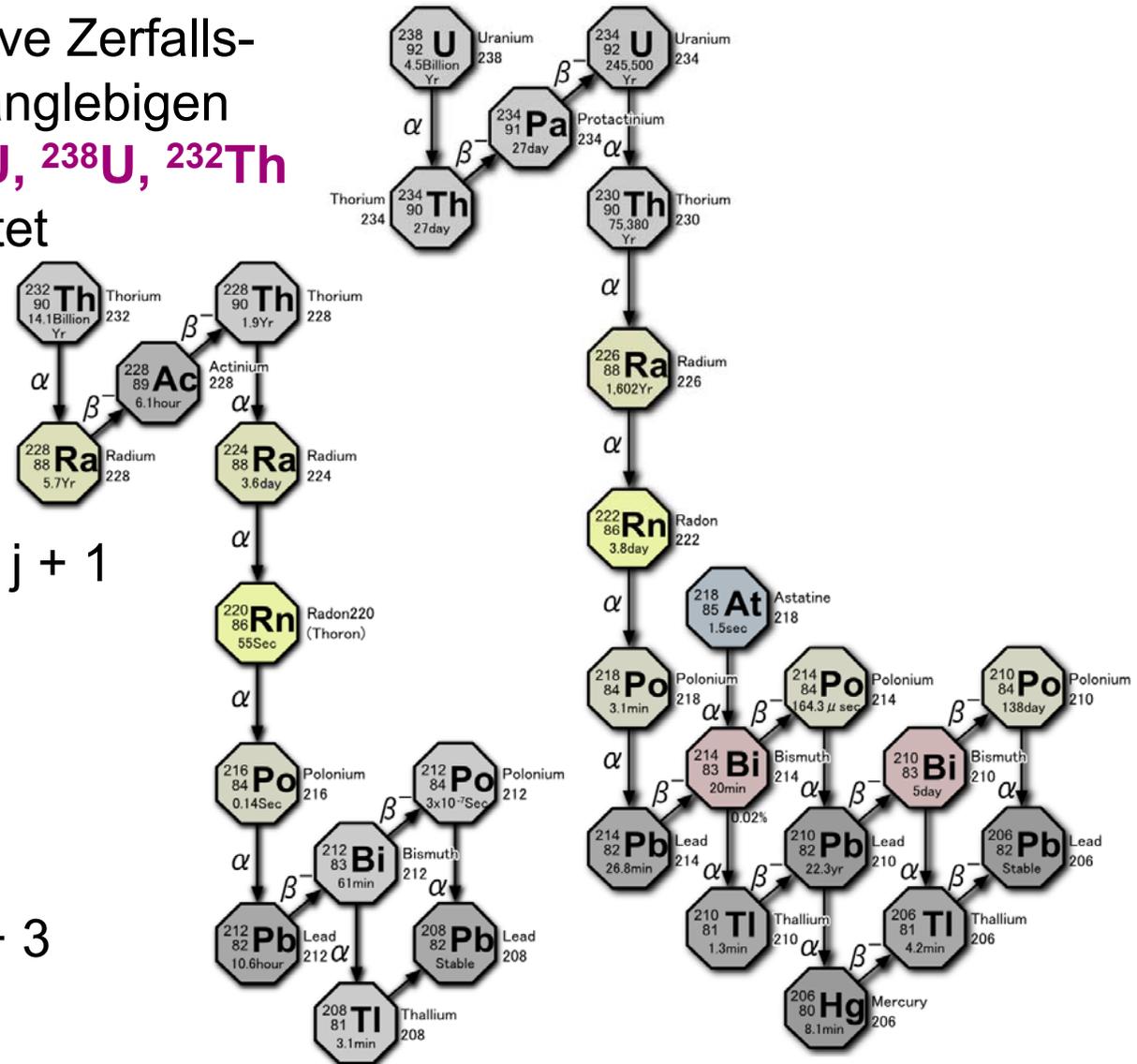
Neptuniumserie ^{237}Np $A = 4 \cdot j + 1$



Thoriumserie ^{232}Th $A = 4 \cdot j$

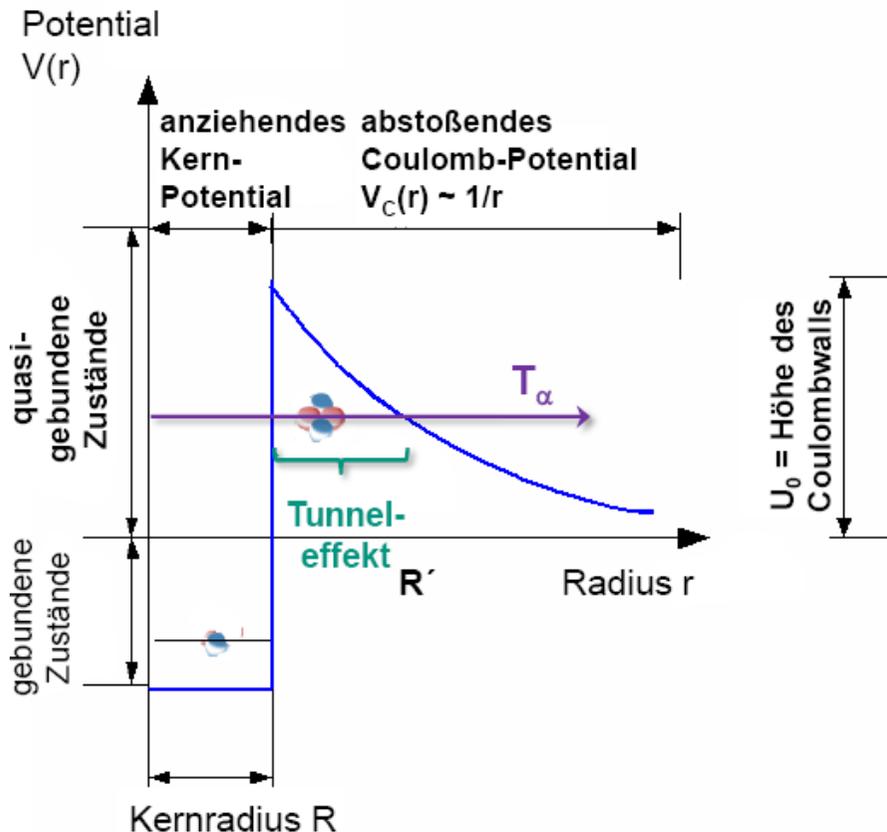


Aktiniumserie ^{235}U $A = 4 \cdot j + 3$



Der Tunneleffekt beim α -Zerfall

- die Emission eines α -Teilchens aus einem Kern beruht auf dem quantenmechanischen **Tunneleffekt** (1929: G. Gamov & E. Condon)
 - Beschränkung auf 1 dim. Schrödinger-Gleichung (effektive 1-dim. Potenziale)



numerisches Beispiel:



$$T_\alpha = 4.05 \text{ MeV (kinet. Energie des } \alpha)$$

$$\tau(^{232}\text{Th}) = 1.39 \cdot 10^{10} \text{ a}$$

$$R = 7.4 \text{ fm}$$

$$V_0 = 14 \text{ MeV (Z } \sim 90, \text{ Coulombbarriere)}$$

$$U_0 = 40 \text{ MeV [Tiefe des Kernpotenzials]}$$

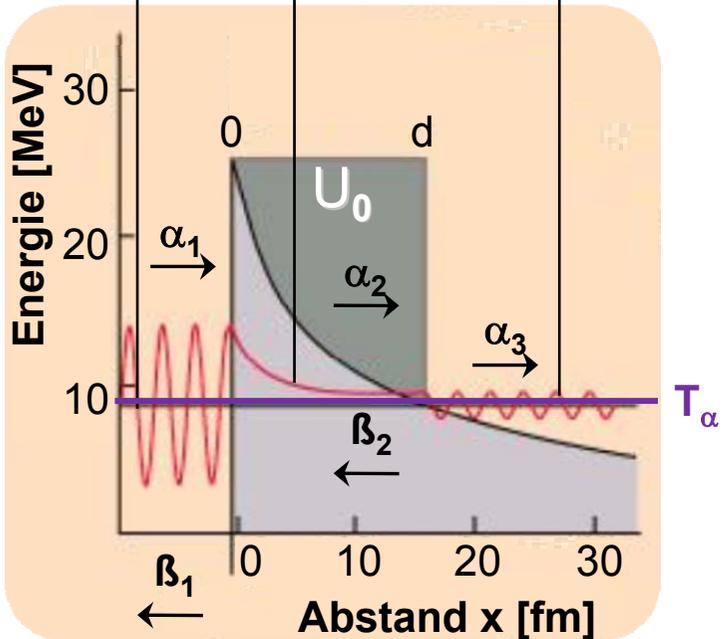
- Bestimmung der Transmissions-Wahrscheinlichkeit T durch die Coulombbarriere $V_C(r)$

Lösungen der 1-dim. Schrödinger-Gleichung: Wellenfunktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3

$$\Psi_1 = \alpha_1 \cdot e^{ik_1x} + \beta_1 \cdot e^{-ik_1x}, \quad k_1 = \sqrt{2mT_\alpha} \quad \text{aus-/einlaufende Welle vor Barriere}$$

$$\Psi_2 = \alpha_2 \cdot e^{-k_2x} + \beta_2 \cdot e^{k_2x}, \quad k_2 = \sqrt{2m \cdot (U_0 - T_\alpha)} \quad \text{in Barriere}$$

$$\Psi_3 = \alpha_3 \cdot e^{ik_3x}, \quad k_3 = \sqrt{2mT_\alpha} \quad \text{auslaufende Welle nach Barriere}$$



Stetigkeitsbedingungen bei

$$x=0 : \Psi_1 = \Psi_2 \quad \Psi'_1 = \Psi'_2$$

$$x=d : \Psi_2 = \Psi_3 \quad \Psi'_2 = \Psi'_3$$

(für α -Zerfälle mit $\Delta l = 0$)

Transmissionskoeffizient T

$$T = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|^2 = \left(1 + \frac{U_0^2}{U_0^2 - (2T_\alpha - U_0)^2 \cdot \sinh^2 k_2 d} \right)^{-1}$$

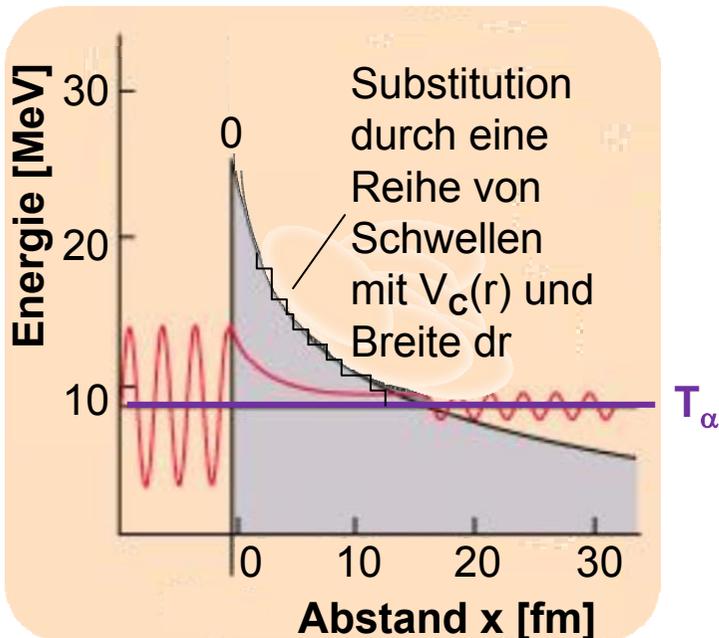
Lösungen der 3-dim. Schrödinger-Gleichung: Wellenfunktionen Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3
 Zerlegung der Coulomb-Schwellen $V_c(r)$ mit Breite dr

$$T \propto e^{-G} \quad \text{mit}$$

Transmissions-
wahrscheinlichkeit

$$G = 2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{T_\alpha}}$$

Gamov-Faktor für
 α -Teilchen mit $z = 2$
 Masse m_α und
 kinetischer Energie T_α



Berechnung der Zerfallskonstanten λ :

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v}{2R} \cdot T$$

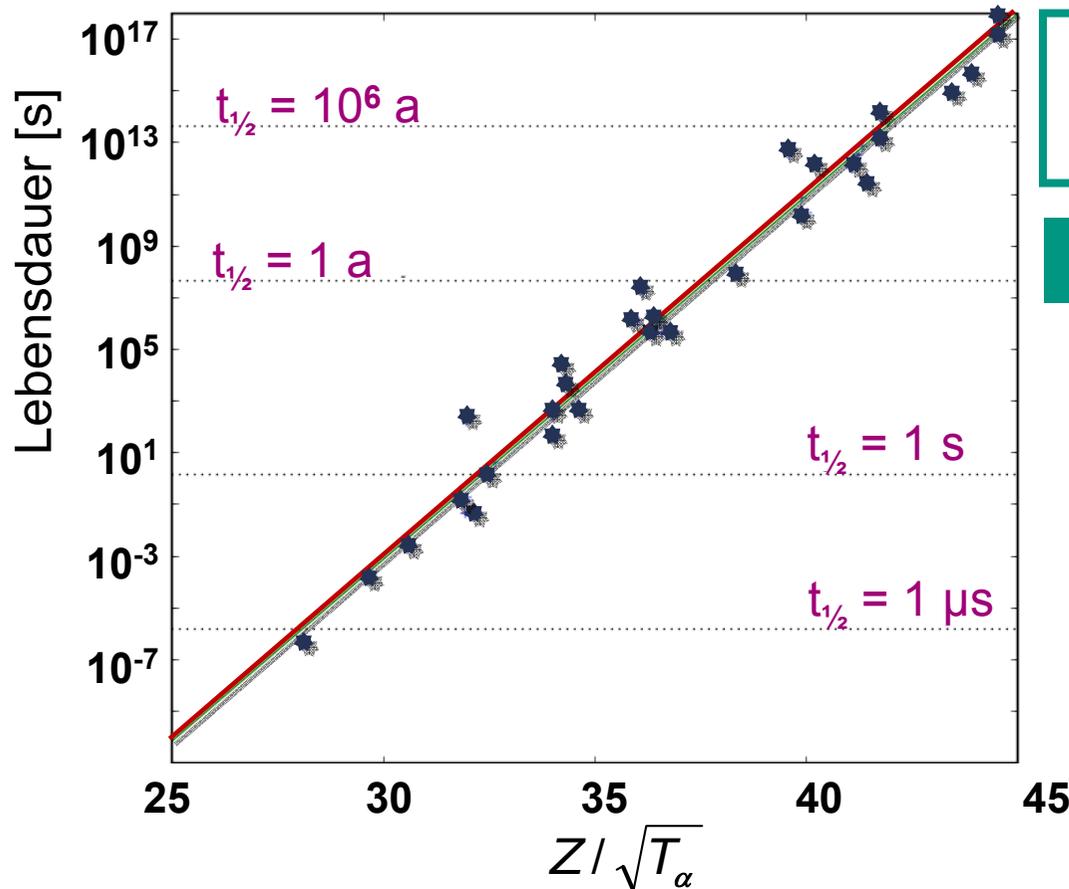
λ_0 : Wahrscheinlichkeit der Bildung eines α
 $v/2R$: Anzahl der Tunnelversuche / Zeiteinheit
 T : Transmissionswahrscheinlichkeit

$$\lambda = C(T_\alpha, R) \cdot e^{-G}$$

Geiger – Nuttall Regel

der Gamov-Faktor G wird mit ansteigender α -Energie T_α rasch kleiner, dadurch reduziert sich die Halbwertszeit $t_{1/2}$ für den Zerfall sehr stark

Auftragung der Lebensdauer/Halbwertszeit über Faktor $Z / \sqrt{T_\alpha}$



$$\ln(\tau / \tau_0) = -C' + a \cdot \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$

Geiger-Nuttall Regel

bereits 1911 von Geiger & Nuttall empirisch gefundene Regel zwischen der Reichweite von α -Teilchen (T_α) & der gemessenen Halbwertszeit $t_{1/2}$ des Zerfalls

Kern	$t_{1/2}$	T_α
^{212}Po	0.3 μs	8.78 MeV
^{224}Ra	3.6 Tage	5.7 MeV
^{232}Th	$1.39 \cdot 10^{10}\text{a}$	4.05 MeV