

Kerne und Teilchen

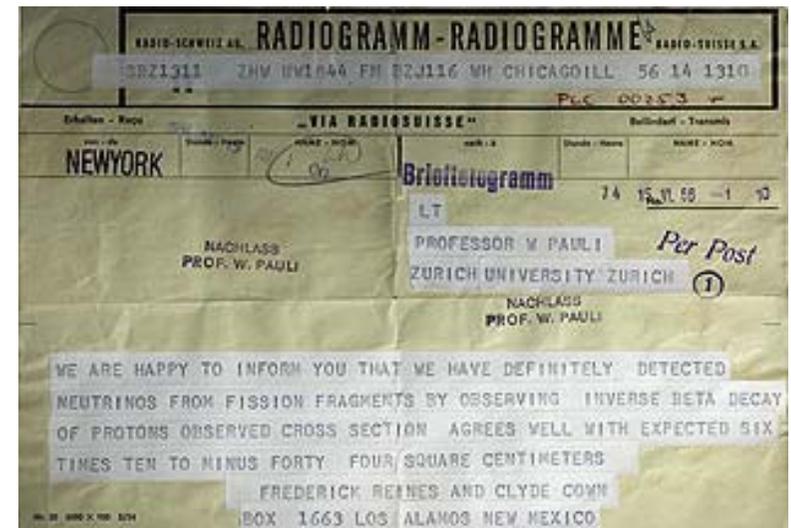
Moderne Physik III

Vorlesung # 08



3. Instabile Kerne

- β -Zerfall: Grundlagen
- Neutrinos: Hypothese & Nachweis
- Klassifizierung von β -Zerfällen:
 β^+ , EC, β^- Zerfälle
- Fermi's Goldene Regel
- γ -Zerfall: Grundlagen, Multipolarität



Radioaktiver Zerfall

- Ensemble $N(t)$ instabiler Kerne/Teilchen mit **Zerfallswahrscheinlichkeit λ** :

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$A(t) = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t)$$

1 Becquerel =
1 Zerfall / s

- Halbwertszeit $t_{1/2}$, Lebensdauer τ & Breite Γ

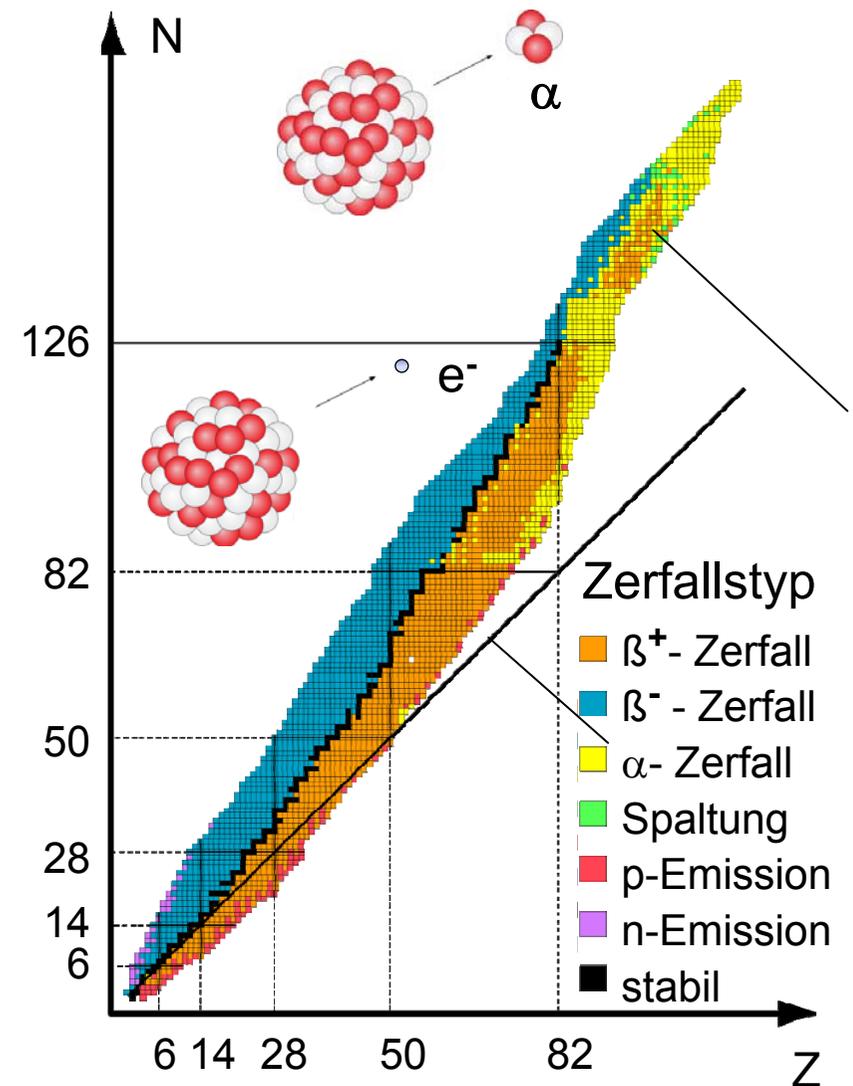
$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 1.443 \cdot t_{1/2}$$

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar \cdot \lambda$$

- Zerfälle mit Verzweigung

$$\tau = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Zerfallsketten von ^{232}Th , ^{235}U , ^{238}U
mit säkularem Gleichgewicht



Alpha- Zerfall

- beim Alpha-Zerfall tunnelt ein im Kerninnern gebildetes α -Teilchen durch den Coulombwall: \hookrightarrow **monoenergetisches α -Spektrum** mit kinetischer Energie $T_\alpha = 4 - 9 \text{ MeV}$

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{v}{2R} \cdot T$$

λ_0 : Wahrscheinlichkeit der Bildung eines α
 $v/2R$: Anzahl der Tunnelversuche / Zeiteinheit

- Transmissionswahrscheinlichkeit T:

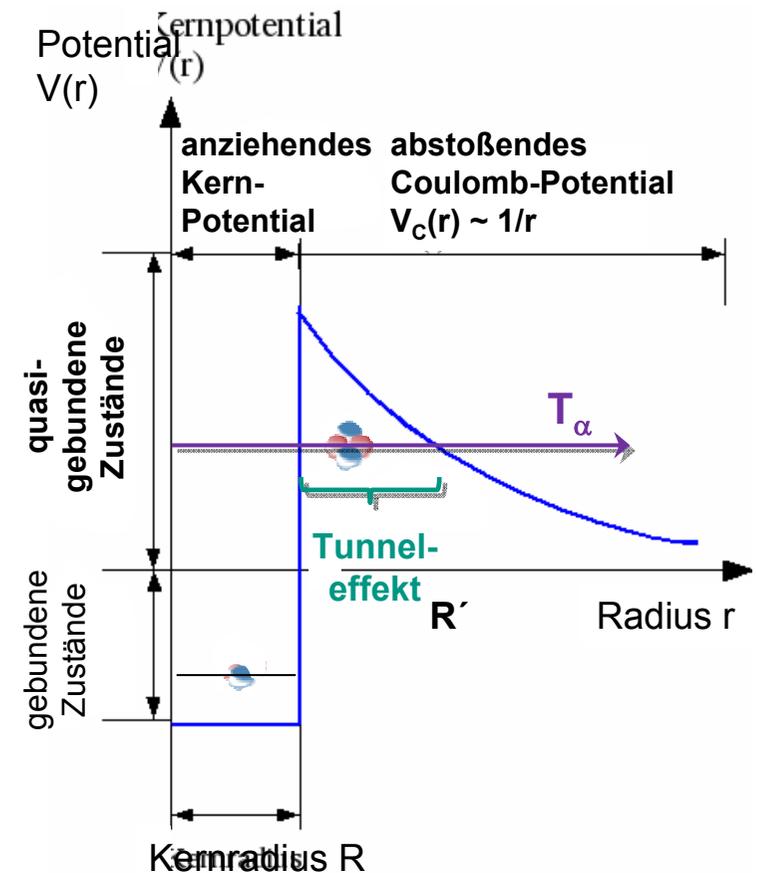
$$T \propto e^{-G}$$

Gamov-Faktor G:

$$G = 2 \cdot \pi \cdot Z \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot m_\alpha}{T_\alpha}}$$

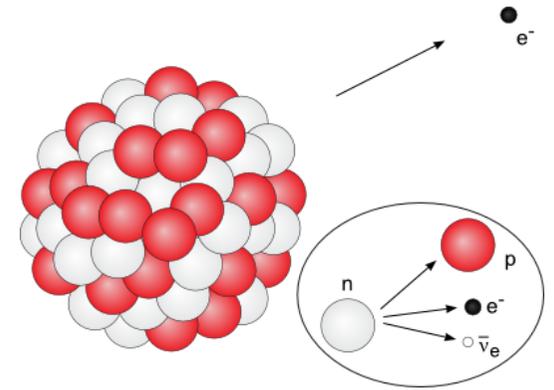
- Geiger-Nuttall Relation:

$$\ln(\tau / \tau_0) = -C' + a \cdot \frac{Z}{\sqrt{T_\alpha}}$$



β -Zerfall

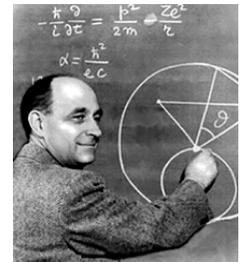
- Beim **β -Zerfall eines Kernes** ändert sich die Ordnungszahl Z durch die Emission eines Elektrons/Positrons mit zugehörigem Antineutrino/Neutrino um eine Einheit



Historie des β -Zerfalls:

- 1914: J. Chadwick beobachtet, dass beim β -Zerfall eines Kerns ein kontinuierliches Energiespektrum entsteht
- 1930: W. Pauli postuliert die Existenz des Neutrinos
- 1934: E. Fermi stellt eine Theorie für die schwache Wechselwirkung auf (goldene Regel)
- 1956: F. Reines & C. Cowan entdecken das Neutrino
- 1958: M. Goldhaber bestimmt die Händigkeit des Neutrinos
- Lee & Yang postulieren Verletzung der Parität
- 1959: Wu-Experiment demonstriert Paritätsverletzung
- 1986: erster experimenteller Nachweis des $2\nu\beta\beta$ -Zerfalles

- Der β -Zerfall basiert auf der **schwachen Wechselwirkung** und ist damit von fundamentaler Bedeutung (vgl. Kap. 9)



Enrico Fermi



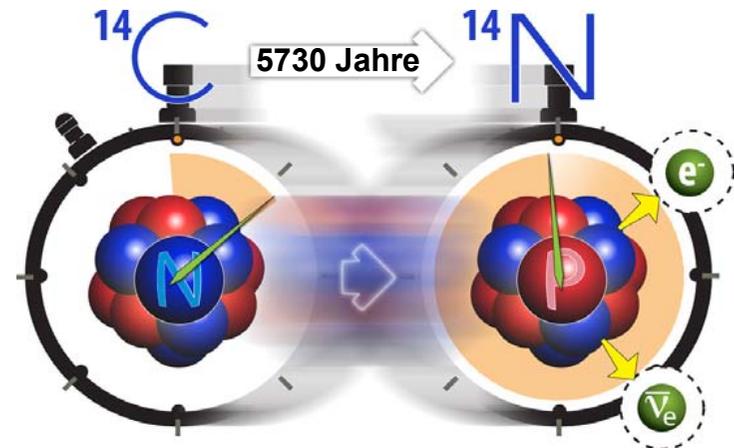
Madame Wu

β-Zerfall: Grundlagen

- β-Zerfälle haben **sehr kleine Übergangswahrscheinlichkeiten** im Vergleich zu starken bzw. elektromagnetischen Prozessen:
 - lange Halbwertszeiten von β-instabilen Kernen: **ms – 10¹⁶ Jahre**
(zum Vergleich: starke Prozesse **10⁻²⁴ s**, elektromagnet. Prozesse **10⁻¹² s**)
 - Lebensdauer τ ist stark abhängig von Übergangsenergie E_0 : $1/\tau \sim (E_0)^5$
- β-Zerfälle treten auf, wenn:
 - Kerne sehr **neutronenreich** sind (**β⁻ Zerfall**)
 - Kerne sehr **protonenreich** sind (**β⁺ Zerfall**, Elektronen-Einfang **EC**)

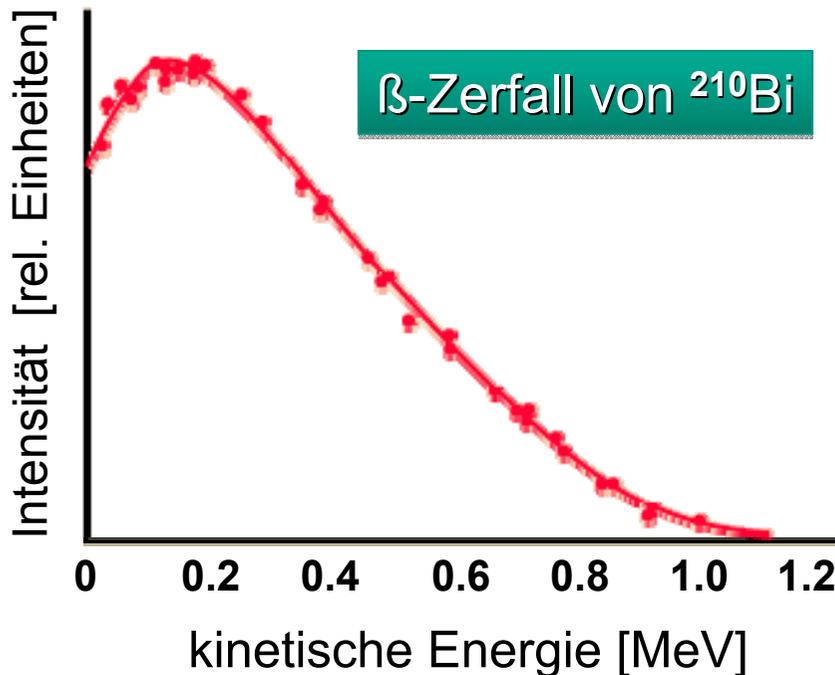
Isotop	Endpunkt [keV]	Halbwertszeit $t_{1/2}$
³ H	18.6	12.23 J
¹⁴ C	156	5730 J
³³ P	248	24.4 T
⁹⁰ Sr	546	27.7 J
⁹⁰ Y	2283	64 h
⁹⁹ Tc	292	$2.1 \cdot 10^5$ J

Übersicht über reine β-Quellen



β -Zerfall: kontinuierliches Spektrum

- Kontinuierliche Energieverteilung** & Spin $s = \frac{1}{2}$ von Elektronen aus dem Kern- β -Zerfall z.B. von $^{14}\text{C}(1^+) \rightarrow ^{14}\text{N}(0^+) + e^-$: Erhaltung von Energie & Drehimpuls erfordern die Existenz eines neutralen, fast masselosen & nur schwach wechselwirkenden Teilchens
- 4. Dezember 1930: Wolfgang Pauli postuliert das **Neutrino** als leichtes, neutrales, Spin $s = \frac{1}{2}$ Partnerteilchen des Elektrons



Offener Brief an die Gruppe der Radioaktiven bei der Gauvereins-Tagung zu Tübingen.

Abschrift

Physikalisches Institut
der Eidg. Technischen Hochschule
Zürich

Zürich, 4. Dez. 1930
Uraniastrasse

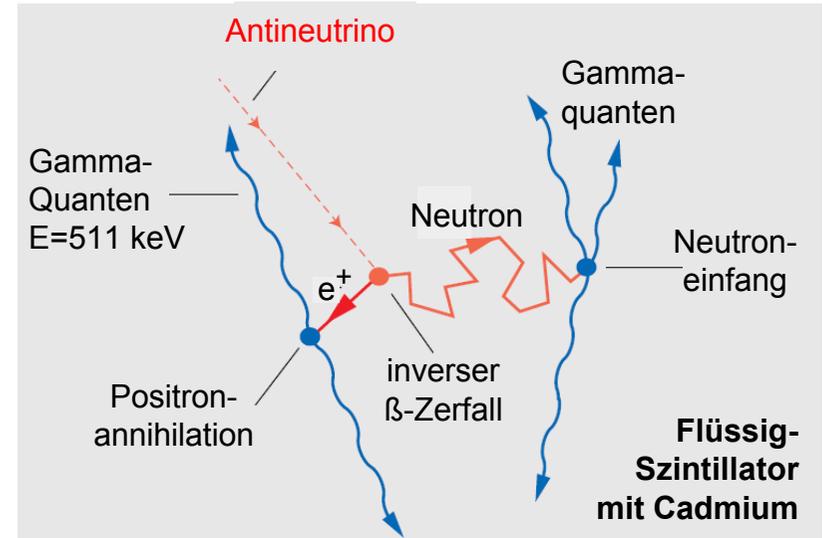
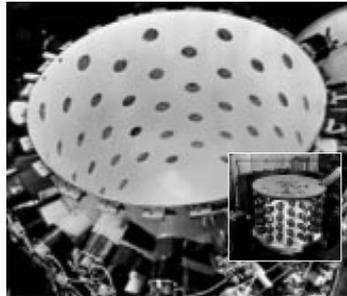
Liebe Radioaktive Damen und Herren,

Wie der Ueberbringer dieser Zeilen, den ich herzlichst anzuhören bitte, Ihnen das näherem auseinandersetzen wird, bin ich angesichts der "falschen" Statistik der N - und Li-6 Kerne, sowie des kontinuierlichen beta-Spektrums auf einen verzweifelten Ausweg verfallen um den "Wechselwitz" (1) der Statistik und den Energiesatz zu retten. Nämlich die Möglichkeit, es könnten elektrisch neutrale Teilchen, die ich Neutronen nennen will, in den Kernen existieren, welche den Spin $1/2$ haben und das Ausschliessungsprinzip befolgen und sich von Lichtquanten ausserdem noch dadurch unterscheiden, dass sie nicht mit Lichtgeschwindigkeit laufen. Die Masse der Neutronen dürfte von derselben Grössenordnung wie die Elektronenmasse sein und jedenfalls nicht grösser als $0,01$ Protonenmasse. Das kontinuierliche beta-Spektrum wäre dann verständlich unter der Annahme, dass beim beta-Zerfall mit dem Elektron jeweils noch ein Neutron emittiert wird, derart, dass die Summe der Energien von Neutron und Elektron konstant ist.

Neutrinos – erster Nachweis

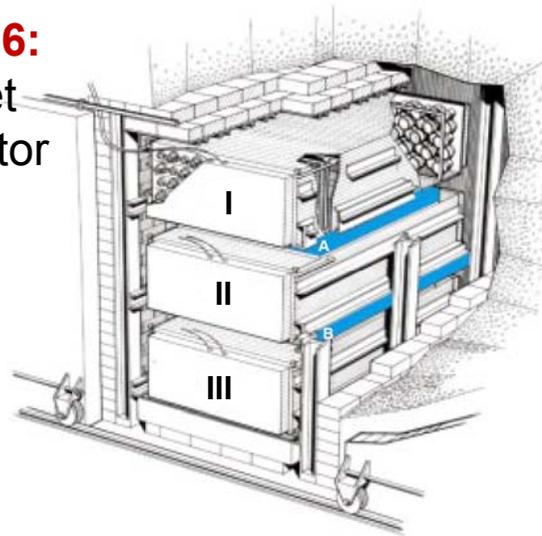
1956: erster Nachweis des Neutrinos durch Fred Reines & Clyde Cowan am Savannah River Reaktor

Hanford 1954: erster Neutrinodetektor 'Herr Auge'
300 l Flüssigszintillator mit 90 PMTs!

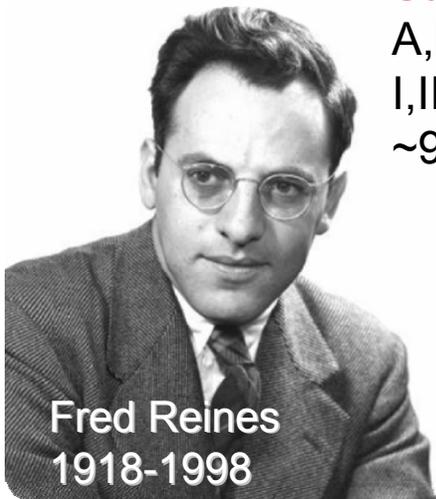


Savannah River 1956:

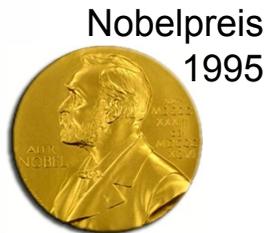
A,B: 200 l H₂O-Target
I,II,III: 4200 l Szintillator
~900 h Messungen!



Projekt Poltergeist



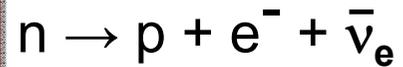
Fred Reines
1918-1998



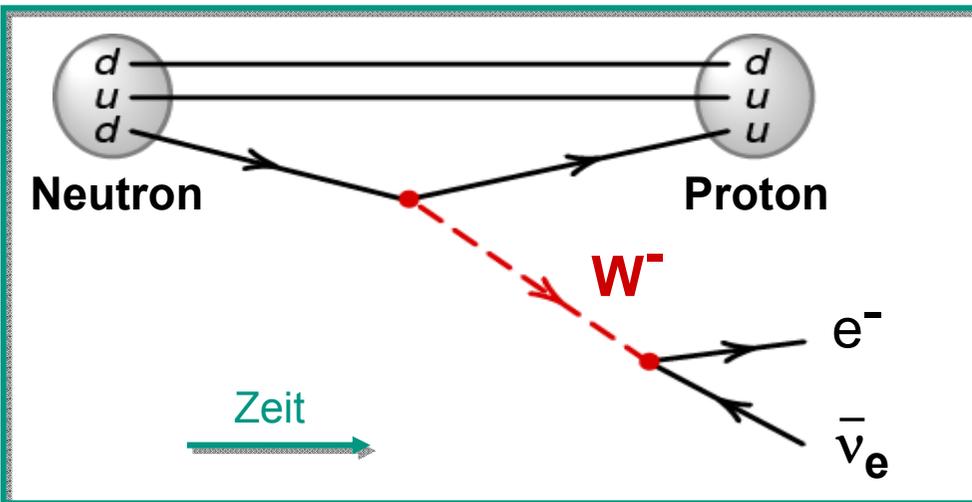
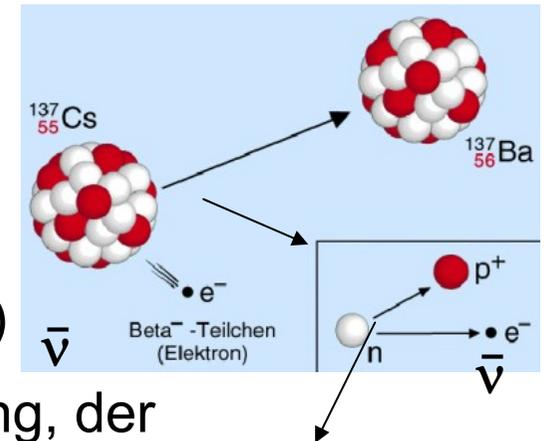
Nobelpreis
1995

β^- -Zerfall: Klassifizierung

β^- -Zerfall



- basiert auf dem Zerfall eines **Neutrons** im Kern
- freie, nicht im Kern eingebundene Neutronen zerfallen mit der Lebensdauer $\tau = 887 \text{ s}$, $Q = 780 \text{ keV}$ ($M_n - M_p$)
- alle β^- -Zerfälle beruhen auf einer neuen Wechselwirkung, der **schwachen Wechselwirkung**
dabei kommt es zum Austausch der sehr schweren **Eichbosonen W^+, W^-**

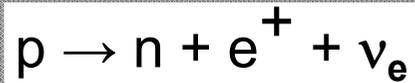


β^- -Zerfall des Neutrons

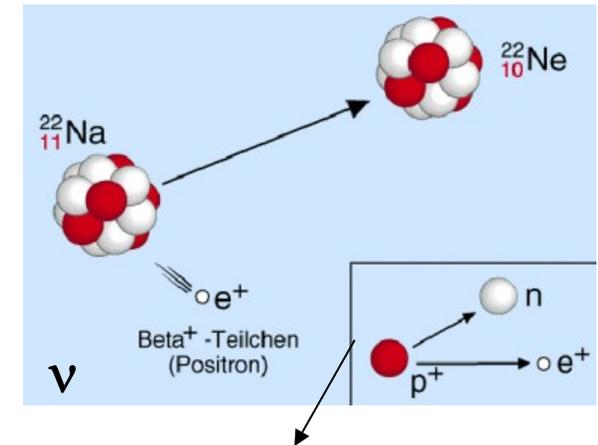
$t_{1/2} = 887 \text{ s}$, Q-Wert $E_0 = 0.78 \text{ MeV}$

- Nukleosynthese im Big Bang
- Kernreaktoren als Neutrinoquelle
- Neutrino-Oszillationsexperimente

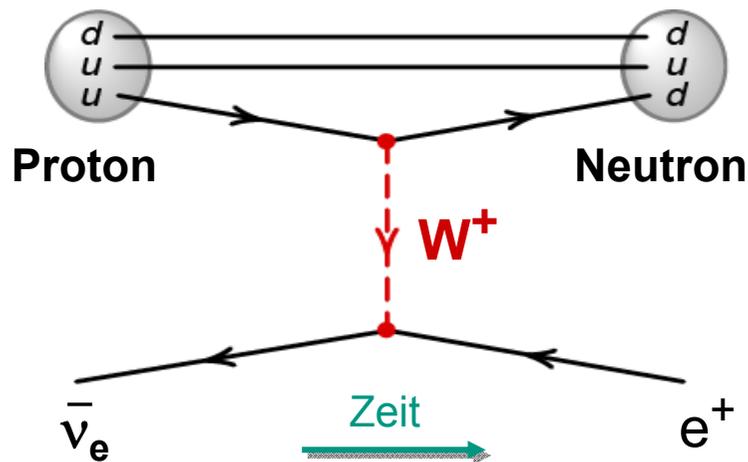
β^+ -Zerfall



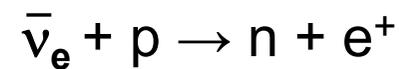
- basiert auf dem Zerfall eines Protons im Kern, falls dies energetisch möglich ist (Q-Wert)
- nicht in Kerne eingebundene Protonen sind stabil, da für den Q-Wert gilt: $Q = M_p - M_n = -1.8 \text{ MeV}$
- bei der Umkehrreaktion, dem sog. **inversen**



β^- -Zerfall kommt es zum Einfang eines Antineutrinos durch ein Proton



inverser β -Zerfall



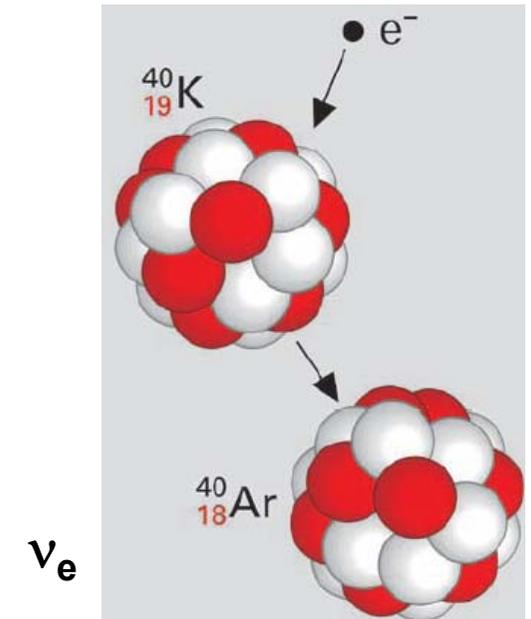
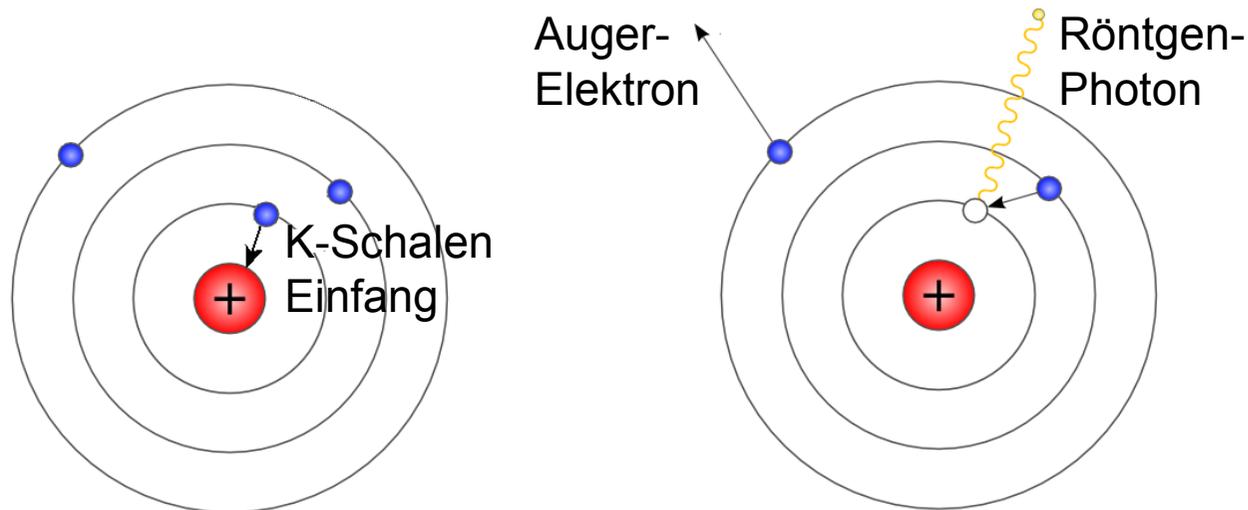
$\sigma \sim 10^{-41} \text{ cm}^2$
im MeV Bereich

'klassische' ν -Nachweisreaktion:

- Oszillationsexperimente
- Supernova-Explosionen

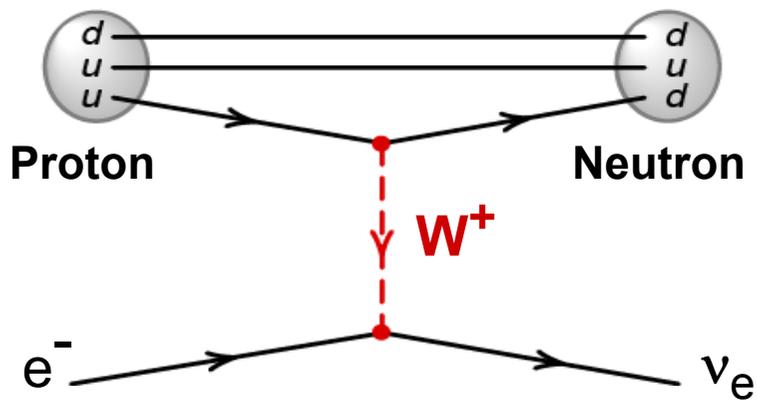
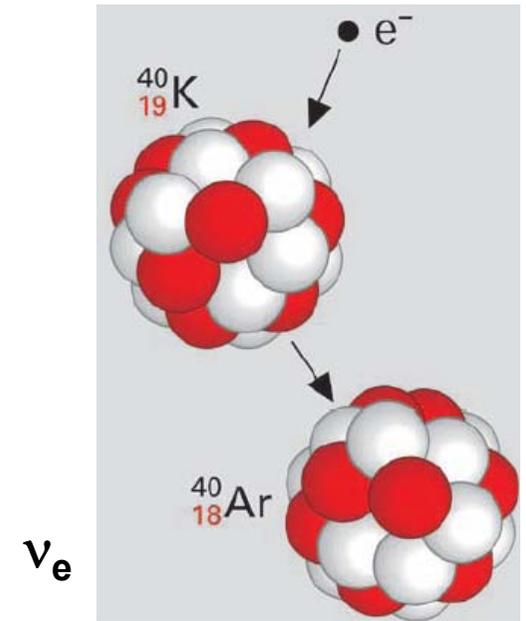
Elektronen-Einfang EC = 'electron capture'

- basiert auf dem **Einfang eines Hüllenelektrons** (meist aus der K-Schale) im Kern, Lücke wird gefüllt durch Emission eines Röntgenquants oder eines Auger-Elektrons
- EC steht oft in direkter Konkurrenz zum β^+ -Zerfall

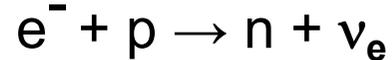


Elektronen-Einfang EC = 'electron capture'

- basiert auf dem **Einfang eines Hüllenelektrons** (meist aus der K-Schale) im Kern, Lücke wird gefüllt durch Emission eines Röntgenquants oder eines Auger-Elektrons
endliche Elektron-Wellenfunktion $|\Psi(r)|^2$ im Kern
- EC steht oft in direkter Konkurrenz zum β^+ -Zerfall



Elektron-Einfang



an freien p und
an Kernen

- SNIa: Neutronisation bei Kernkollaps
radioakt. Zerfallskurve (^{56}Ni , ^{56}Co)
- BBN: thermodynam. Gleichgewicht

β-Zerfall: Isobaren-Zerfallskette

- Bei β-Zerfällen zerfallen Kerne mit hoher Masse in den energetisch günstigsten Kern vgl. Bethe-Weizsäcker-Massenformel:

$$M(Z,A) = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 + \delta \cdot A^{-1/2}$$

$$\alpha = M_n - a_v + a_s \cdot A^{-1/3} + a_A$$

$$\beta = M_n - M_p - m_e + 2 \cdot a_A$$

$$\gamma = (4/A) \cdot a_A + a_C \cdot A^{-1/3}$$

↓

+	für	gg
0	für	ug
-	für	uu

■ ug-Kerne:

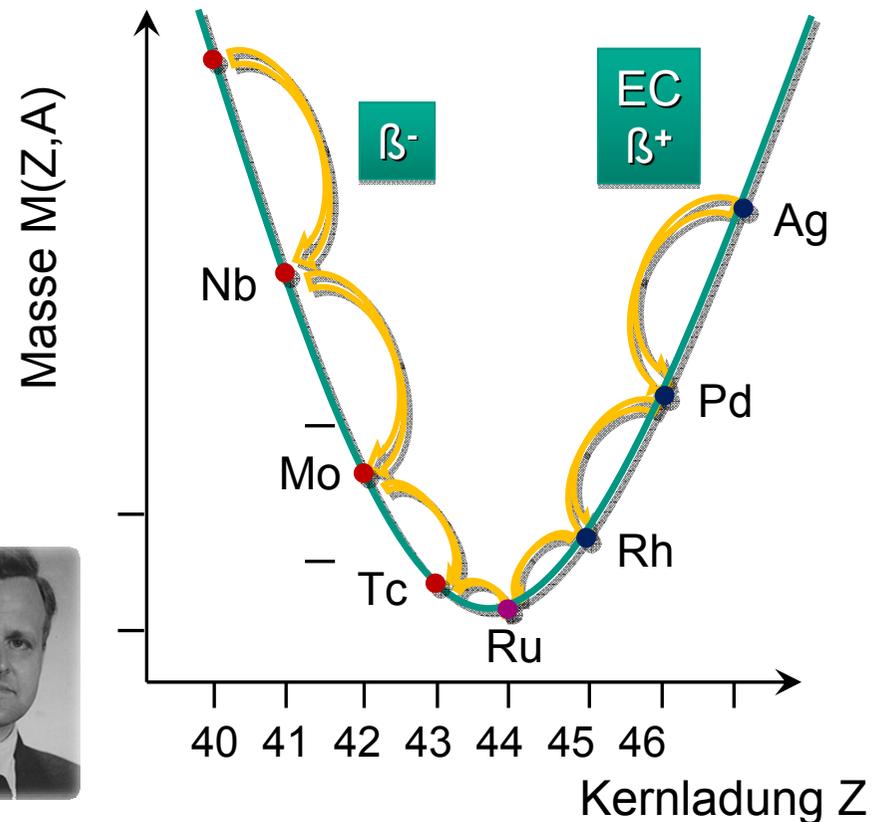
- die Paarungsenergie δ verschwindet
- nur 1 Massenparabel
- **nur ein stabiles Isobar** verbleibt



β-Zerfall in ug-Kernen

Bs.: $A = 101$

- n-Überschuss
- p-Überschuss
- stabil



β -Zerfall: Isobaren-Zerfallskette

■ gg-Kerne:

Paarungsenergie δ positiv für gg-Kerne
Paarungsenergie δ negativ für uu-Kerne

- 2 Massenparabeln
- alle uu Kerne auf der oberen Parabel sind instabil, da tiefer liegende gg Kerne existieren

Ausnahmen: ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$

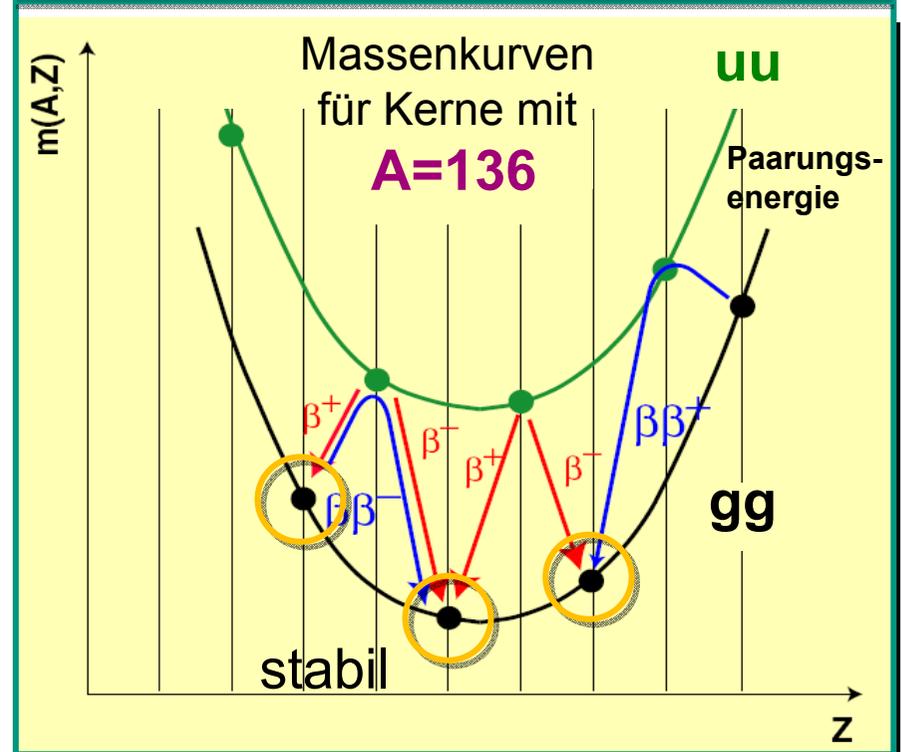
- **mehrere stabile Isotope** verbleiben
- diese können aber durch den extrem schwachen Doppel- β -Zerfall zerfallen (Isotope sind praktisch stabil)

Bsp: ${}^{130}\text{Te} \rightarrow {}^{130}\text{Xe} + 2e^- + 2\nu_e$

$$t_{1/2} = (1.63 \pm 0.14) \cdot 10^{21} \text{ a}$$

(vgl. Kap. 10.3, Suche nach $0\nu\beta\beta$)

Massenparabel für gerade-gerade und uu Kerne (Paarungs-Energie)



β -Zerfall: Q-Werte

- Im β -Zerfall definiert der Q-Wert die maximale Energie des emittierten Elektrons oder Positrons (unter Vernachlässigung der Rückstoßenergie des Kerns und der Neutrinomasse)

mit Kernmassen M :

$$Q(\beta^-) = M(Z, A) - M(Z+1, A) - m_e$$

$$Q(\beta^+) = M(Z, A) - M(Z-1, A) - m_e$$

$$Q(\text{EC}) = M(Z, A) - M(Z-1, A) - m_e$$

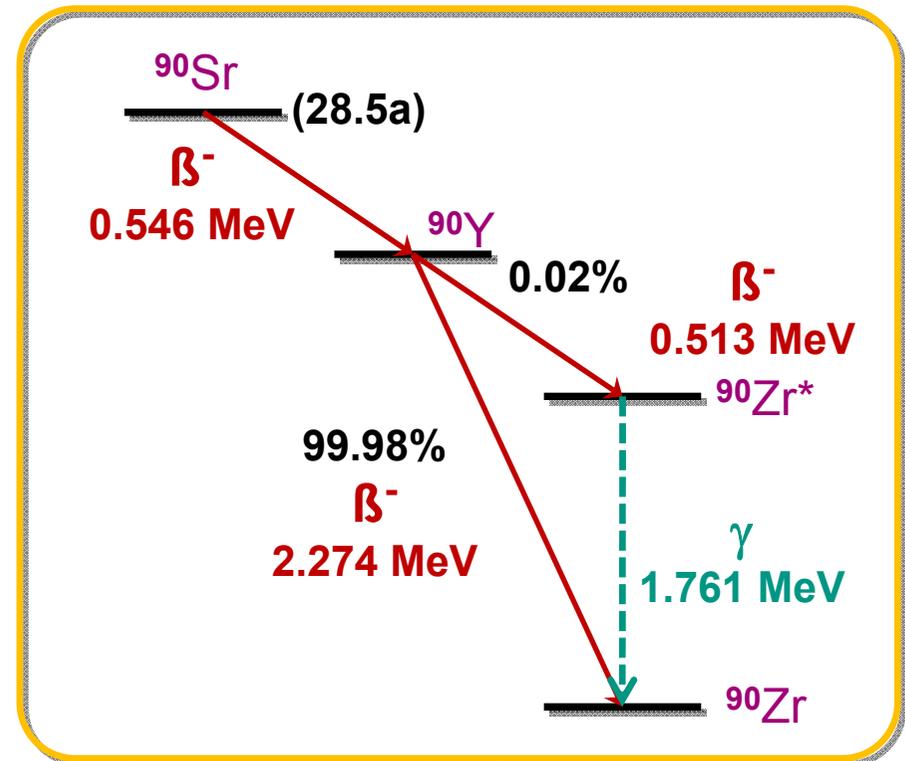
mit Atommassen \mathcal{M} :

$$Q(\beta^-) = \mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z+1, A)$$

$$Q(\beta^+) = \mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z-1, A) - 2 \cdot m_e$$

$$Q(\text{EC}) = \mathcal{M}(Z, A) - \mathcal{M}(Z-1, A)$$

- für den β^+ -Zerfall muss ein Faktor $2 \cdot m_e$ 'abgezogen' werden, der die fehlenden 2 Elektronenmassen berücksichtigt



β-Zerfall: Energiespektrum

- Das Energiespektrum & die Übergangsrate Γ im β -Zerfall lässt sich durch die Fermi-Theorie sehr präzise beschreiben, **Fermi's Goldene Regel**

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot G_F^2 \cdot \left| \langle f | M_{fi} | i \rangle \right|^2 \cdot \frac{dn}{dE}$$

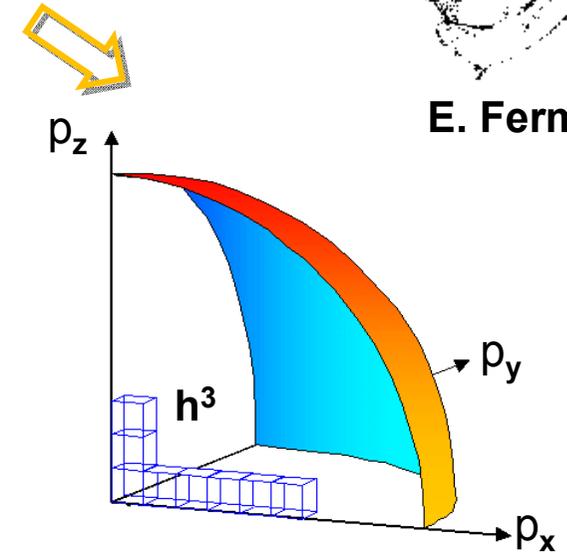
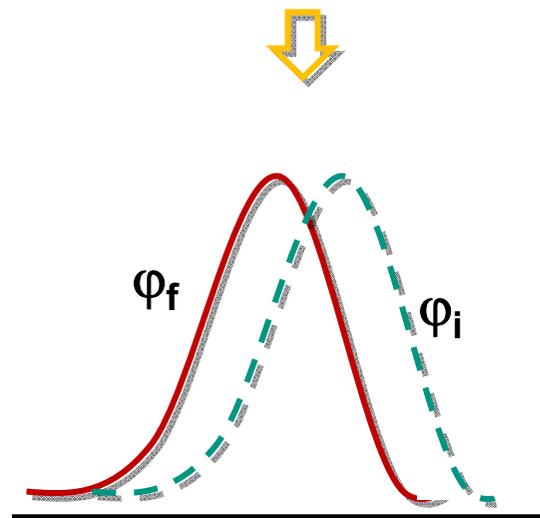
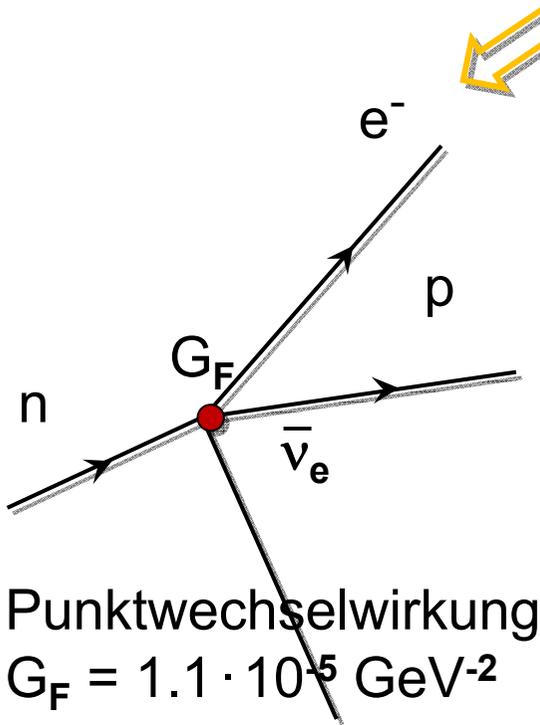
Kopplung G_F

Matrixelement

Endzustandsdichte



E. Fermi



β -Zerfall: Energiespektrum

- Das Energiespektrum mit der Übergangsenergie E_0 wird durch den **Phasenraum-Faktor dn/dE** bestimmt: hierbei sind die Zustände für Neutrino & Elektron zwischen p und $p + dp$ zu berücksichtigen:

$$dn_e = \frac{1}{2\hbar^3 \pi^2} \cdot V \cdot p_e^2 \cdot dp_e \quad dn_\nu = \frac{1}{2\hbar^3 \pi^2} \cdot V \cdot p_\nu^2 \cdot dp_\nu$$

3-Teilchenzerfall: die Impulse von Elektron & Neutrino sind nicht korreliert, daher ist:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6} \cdot p_e^2 \cdot dp_e \cdot p_\nu^2 \cdot dp_\nu$$

für das sehr leichte Neutrino gilt näherungsweise (mit Energiebilanz $E_0 = E + E_\nu$):

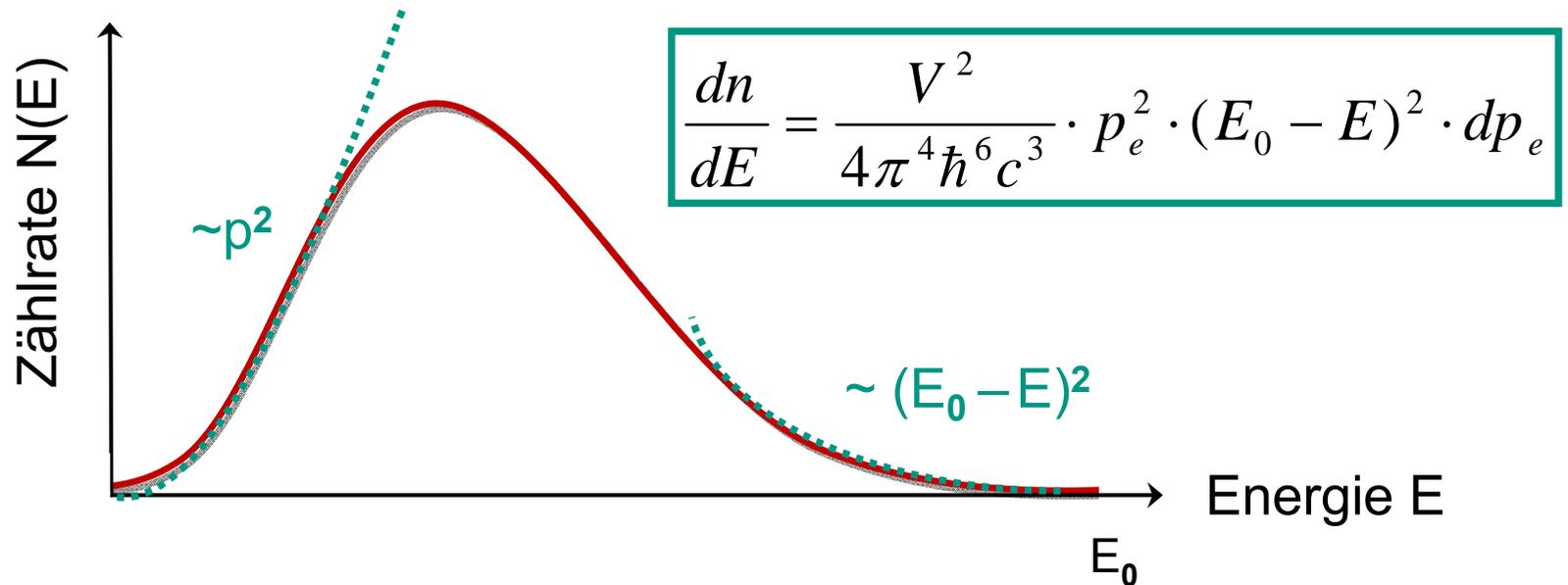
$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} = \frac{E_0 - E}{c}$$

damit :

$$\frac{dn}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \cdot p_e^2 \cdot (E_0 - E)^2 \cdot dp_e$$

β -Zerfall: Energiespektrum

- das Energiespektrum lässt sich im niederenergetischen/hochenergetischen Teil darstellen als:



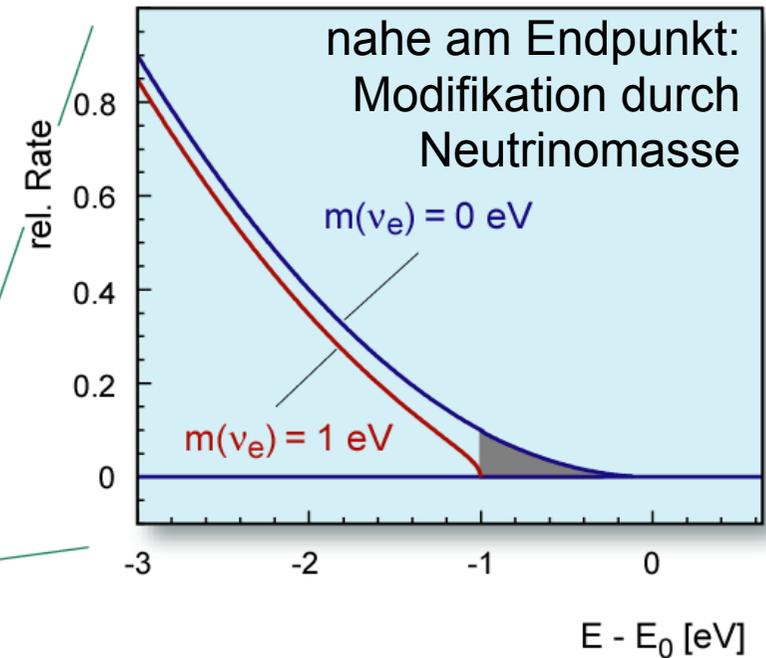
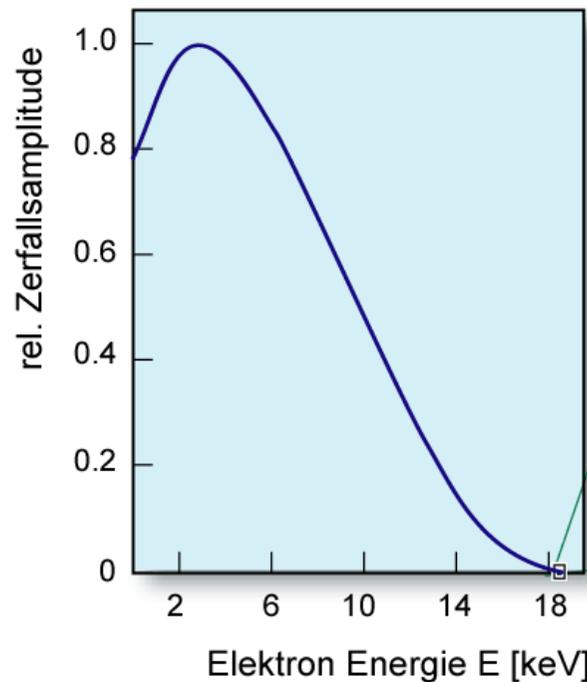
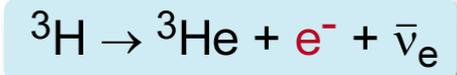
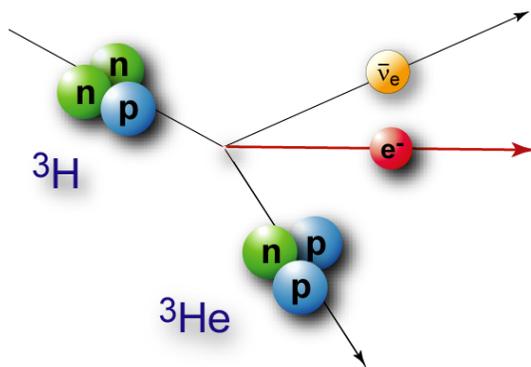
- für kleine Elektronenenergien: $N(E) \sim p^2$, da dort Faktor $(E_0 - E)^2 \sim$ konstant
- für große Elektronenenergien: $N(E) \sim (E_0 - E)^2$, da dort Faktor $p^2 \sim$ konstant
- die Coulombwechselwirkung der Hüllenelektronen mit dem auslaufenden Elektron/Positron verzerrt das Energiespektrum geringfügig: dies wird durch die **Fermi-Funktion $F(E, Z)$** parametrisiert

β -Zerfall: Energiespektrum von Tritium

- das Energiespektrum des **Tritium- β -Zerfalls** lässt sich im Rahmen der Fermi-Theorie sehr genau berechnen (einschließlich $F(Z,E)$, molekulare Anregungen, Rückstoß des Moleküls)

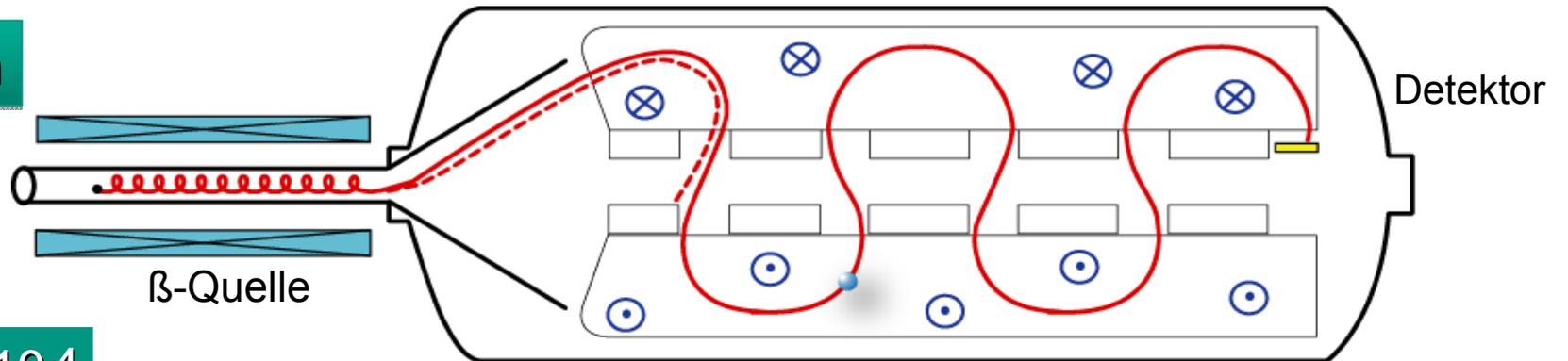
Tritium hat eine sehr niedrige Endpunktsenergie E_0 , ideal zur Untersuchung von Effekten der **Neutrinomasse** nahe am kinematischen Endpunkt E_0 (vgl. Kap. 10.3)

^3H : über-erlaubt	
E_0	18.6 keV
$t_{1/2}$	12.3 a



β -Zerfall: Energiemessung

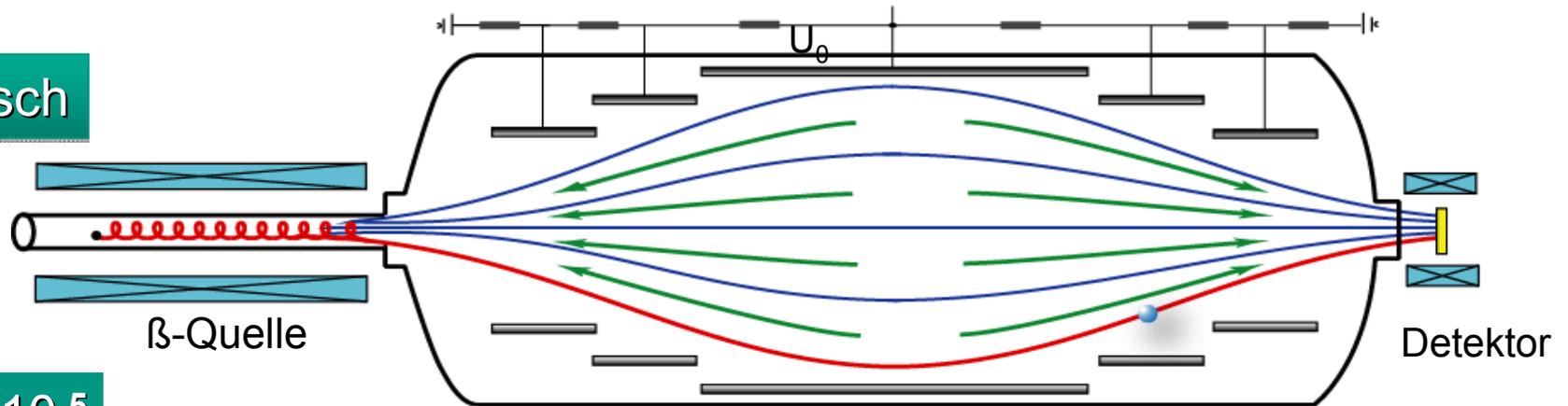
magnetisch



$$\Delta p/p = 7 \times 10^{-4}$$
$$\delta\Omega = 10^{-3}$$

magnetisches Führungsfeld: Impulsanalyse durch Blenden

elektrostatisch

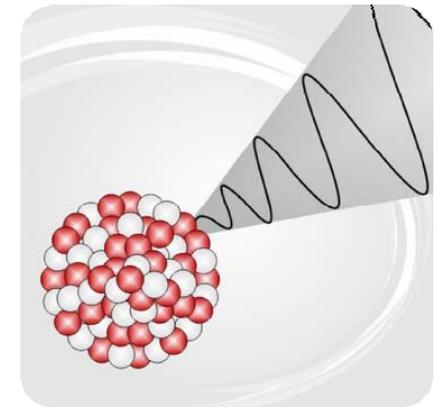


$$\Delta E/E = 1 \times 10^{-5}$$
$$\delta\Omega \sim 2\pi$$

magnetisches Führungsfeld, Energieanalyse durch ein elektrostatisches Retardierungsfeld

3.4 Gamma – Zerfall

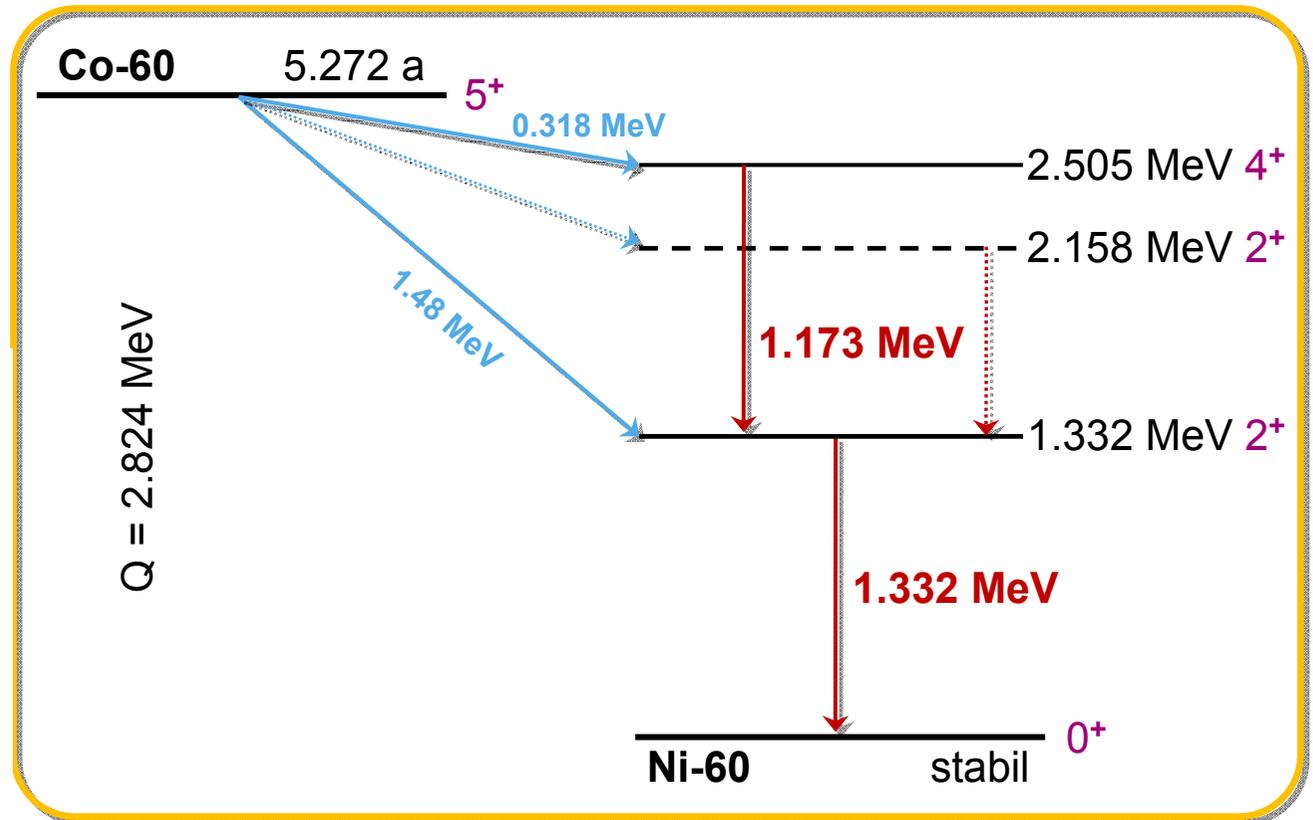
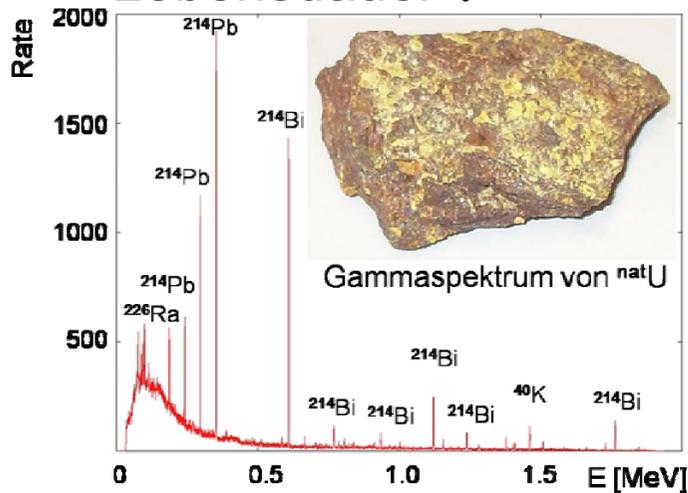
- beim γ -Zerfall werden ein oder mehrere monoenergetische Photonen im Energiebereich von $\sim 100 \text{ keV} - 10 \text{ MeV}$ durch den angeregten Kernzustand A^* emittiert:



diskretes Gammaspektrum

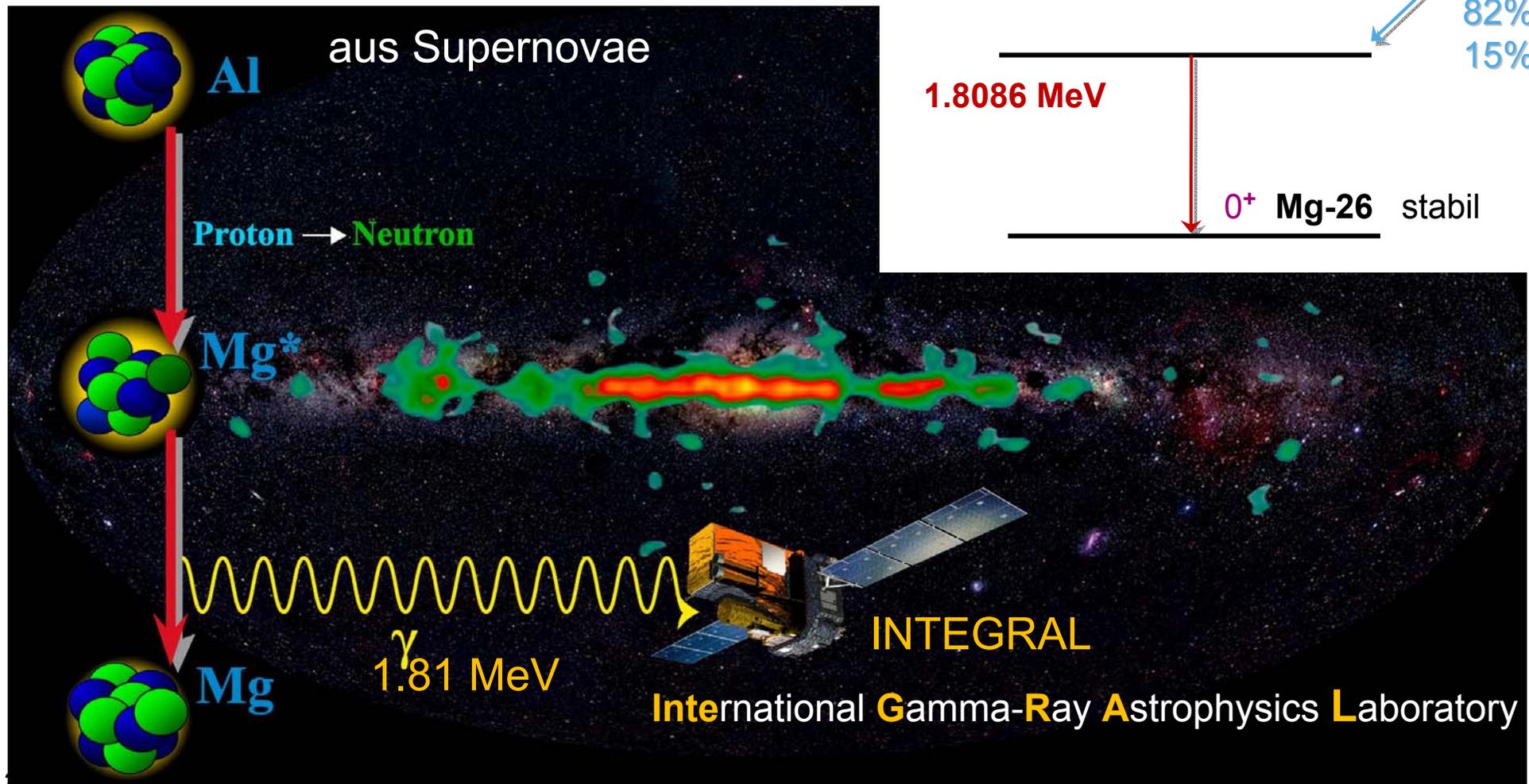
aus γ -Spektrum:

- Energie $E_\gamma \rightarrow E(A^*)$
- Winkelverteilung
- \rightarrow Spin J / Multipolarität
- Lebensdauer τ



Anwendung: Gamma – Zerfall mit INTEGRAL

- Beobachtung von Gammalinien aus dem Zerfall von **radioaktivem ^{26}Al** :



Gamma – Zerfall: Multipolarität

- Photonen haben ganzzahligen Spin $\vec{s} = 1$ und können beim γ -Zerfall auch Bahndrehimpuls \vec{L} wegtragen

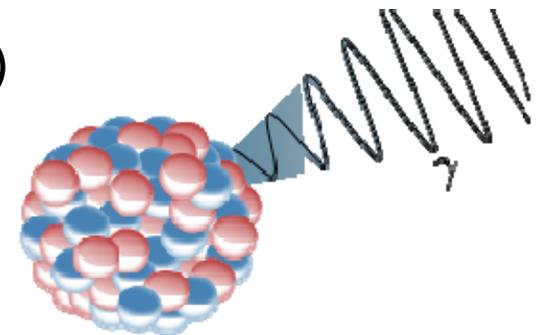
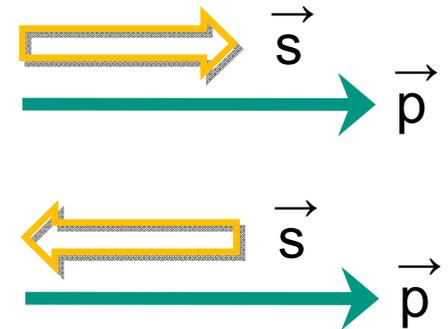
$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{\ell} \quad \text{mit} \quad \vec{\ell} = \vec{L} + \vec{s}$$

die niedrigste **Multipolordnung** des Photons muss sein $\ell = 1$ (Dipolstrahlung), da Photonen nur longitudinal polarisiert sind ($m = \pm 1$), damit gilt

$$|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i - J_f \quad \text{und} \quad \ell \geq 1$$

es gibt damit keine γ -Übergänge zwischen Spin-0-Kernen

- γ -Zerfällen entstehen durch die **elektromagnetische Wechselwirkung**, die **paritätserhaltend** ist (Parität: Verhalten eines Systems unter Rauminversion, jedes Teilchen hat eine intrinsische Parität, z.B. $P(\gamma) = -1$) dies führt zu einer weiteren Auswahlregel



Gamma – Zerfall: Multipolarität & Parität

- Gamma-Übergänge lassen sich sehr effektiv als Überlagerung von **verschiedenen Multipolordnungen** (klassisch: Kugelfunktionen $Y_{\ell m}$) mit jeweils charakteristischen **Winkelverteilungen** beschreiben
die verschiedenen Multipole $\ell = 1, 2, 3, \dots$ werden charakterisiert nach
 - elektrische Multipole: **E1, E2, E3, ...** (schwingender elektrischer 2^ℓ Pol)
 - magnetische Multipole: **M1, M2, M3...** (schwingender magnetischer 2^ℓ Pol)
 - **E1**: 'elektrische Dipolstrahlung', **E3**: 'elektrische Oktupolstrahlung'
 - **M2**: 'magnetische Quadrupolstrahlung'
- für Photonen der **E ℓ** Strahlung gilt: **Parität $P = (-1)^\ell$**
für Photonen der **M ℓ** Strahlung gilt: **Parität $P = (-1)^{\ell+1}$**
- aus den beiden Erhaltungssätzen für
 - den Gesamtdrehimpuls
 - die Paritätwerden die erlaubten Multipolordnungen **E ℓ** und **M ℓ** der elektromagnetischen Übergänge festgelegt

$$|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f \text{ und } \ell \geq 1$$

$$E\ell : P_i = (-1)^\ell \cdot P_f \quad M\ell : P_i = (-1)^{\ell+1} \cdot P_f$$