

Kerne und Teilchen

Moderne Experimentalphysik III
Vorlesung 6

MICHAEL FEINDT
INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE KERNPHYSIK

- ## Streuung
- elastische Streuung am Nukleon
 - quasielastische Streuung

6.1 Formfaktoren des Nukleons (p,n)

- e-Streuung am H und D \Rightarrow Daten über p, n
- aber es gilt zu beachten:
 - a) Rückstoß wichtig
 - b) Magnetisches Moment
 - c) elektrische und magnetische Formfaktoren

Erinnerung:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}^* = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ru} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^*$$

"ohne Rückstoß"

→ $\cos^2(\theta/2)$ für $\beta \rightarrow 1$

mit $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ru} = \frac{4Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} ; E = E' ; |\vec{p}| = |\vec{p}'| ; |\vec{q}| = 2|\vec{p}| \sin \frac{\theta}{2}$

Formfaktoren des Nukleons – a

a) Vgl. $\rho(r)$ -Daten $\Rightarrow R(p) \approx 1 \text{ fm}$

$$\Rightarrow |\vec{q}| = \frac{4.5 \hbar}{R} = \frac{4.5 \cdot 197 \text{ MeV fm}}{1 \text{ fm c}} \approx 900 \text{ MeV/c}$$

- D.h. E_{kin} ist nicht mehr klein gegen $m_p, m_n \approx 938 \text{ MeV}/c^2$.
- Im Mott-WQ ist E und E' enthalten (gut), aber Phasenraumdichte dn/dE_f muss modifiziert werden.
- Es gilt nicht mehr $dE_f = dE' \approx dE$ so einfach ...

Vielmehr gilt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}^* \cdot \left(\frac{dE}{dE'} \right) \quad \text{[Herleitung im Perkins]}$$

- Benutze im Folgenden Lorentz-invariante Größe **Viererimpulsübertrag**:

Def.: $Q^2 := -\tilde{q}^2$

Ersetze $|\vec{q}|^2 \rightarrow \tilde{q}^2$ oder Q^2 im Mott – WQ

$$\begin{aligned} \tilde{q}^2 &= (\tilde{p} - \tilde{p}')^2 \\ &= 2m_e^2 c^2 - 2(E E' / c^2 - |\vec{p}||\vec{p}'| \cos \theta) \\ &\approx \ominus \frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Formfaktoren des Nukleons – b

b) bisher: elektrische WW zwischen e^- und Kernladungen etc.

jetzt: auch die magnetische WW von e-Strom und magnetischem Moment von Proton bzw. Neutron berücksichtigen!

■ Magn. WW ist mit **Umklappen des Nukleonspins** verknüpft (siehe VL 5).

Aus \vec{L} - und \vec{S} -Erhaltung \Rightarrow Drehimpuls und Helizitätserhaltung
unvereinbar bei Streuung um 0°

\Rightarrow Streuung um 180° wird favorisiert

Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt muss bei Umklappen des Nukleonspins mit einem **Zusatzterm** $\propto \sin^2(\theta/2)$ ergänzt werden:

$$\text{magn WQ} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ru} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Formfaktoren des Nukleons – b

■ Aus rel. QM, Dirac-Gleichung:

magnetisches Moment eines punktförmigen (pf) Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens:

$$\mu = \frac{g}{2} \cdot \boxed{\frac{e\hbar}{2M_{pf}}} \quad ; \quad g = 2 \quad \text{"Magneton" : } e\hbar / 2M$$

Die WW zwischen elektrischem Strom und magnetischem Moment ergab einen Zusatzterm $\propto \sin^2(\theta/2)$ im Rutherford-WQ.

Für den Mott-WQ entspricht das einem zusätzlichen tan²-Term:
 ($Rf \cdot \sin^2 = Rf \cdot \cos^2 \cdot \tan^2 = Mott \cdot \tan^2$):

$$\boxed{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{S=1/2}^{pf} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}\right)}$$

↑
elektrisch
 (kein Spin-Flip)

↑
magnetisch
 (Spin-Flip)

$$\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$$

siehe Plausibilitätsbetrachtung
auf nächster Folie

Der magn. Term ist wichtig bei hohem Q²-Übertrag und großen Streuwinkeln.

Formfaktoren des Nukleons – b

Wie erklärt sich der Faktor 2τ ?

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{S=1/2}^{pf} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \cdot \left(1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Das Matrixelement A der magn. WW ist (mit $E_{mag} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$)

$$\left. \begin{array}{l} A \propto \mu \propto 1/M \\ A \propto \vec{B}_{e^-} \propto \text{Ablenkung aus } \int F_B dt \propto Q \end{array} \right\} A \propto Q/M$$

Im WQ geht A^2 ein $\Rightarrow \tau = \frac{Q^2}{4M^2 c^2}$

Für Dirac-Teilchen: $g(e) = g(\mu) = 2$ (aus $g = 2$ -Exp. und QED ✓)

 alles zusammen

p, n bestehen aus Quarks (mit einem anomalen magnetischen Moment, das noch nicht wirklich verstanden ist: Beitrag von Gluonen, virtuellen $q\bar{q}$ u.v.a.m. ...)

gemessen: $\mu_p = \frac{g_p}{2} \mu_N = +2.79 \mu_N$

$\mu_n = \frac{g_n}{2} \mu_N = -1.91 \mu_N$

$p = (\bar{u} \bar{u} \bar{d})$

$n = (\bar{u} \bar{d} \bar{d})$

mit Kernmagneton:

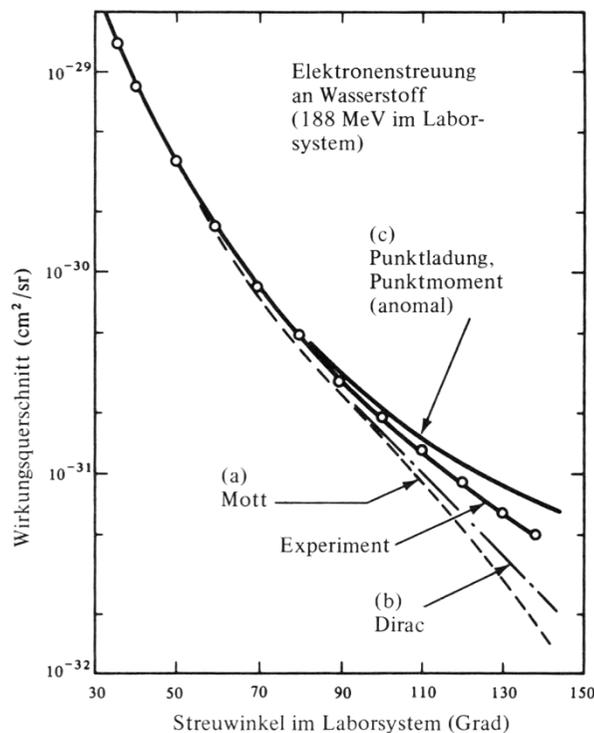
$\mu_N = e\hbar / 2M_p = 3.1 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$

Formfaktoren des Nukleons – c

- c) elektrische $G_E(Q^2)$ und magnetische $G_M(Q^2)$ FF werden benötigt (1950):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + G_M^2 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$G = G(Q^2)$



Im Falle $Q^2 \rightarrow 0$ folgt:

$$G_E(Q^2) \rightarrow \frac{Ze}{e}; \quad G_M(Q^2) \rightarrow \frac{\mu}{\mu_N}$$

Also für Nukleonen:

Protonen:

$$G_E^p(Q^2 = 0) = 1$$

$$G_M^p(Q^2 = 0) = 2.79$$

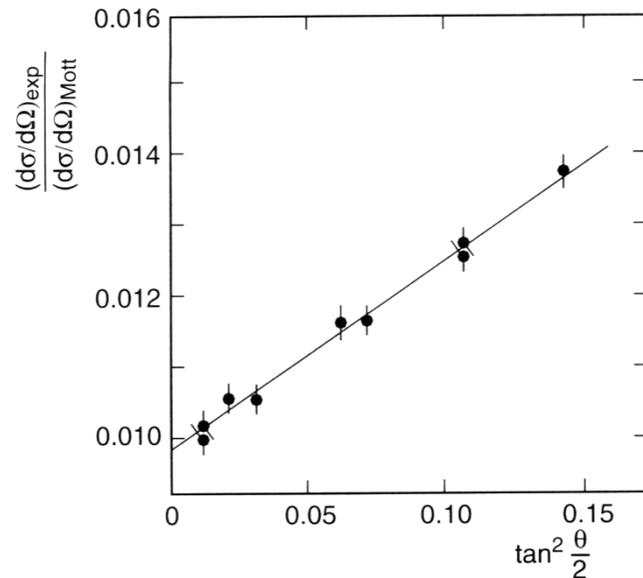
Neutronen:

$$G_E^n(Q^2 = 0) = 0$$

$$G_M^n(Q^2 = 0) = -1.91$$

Rosenbluth – Diagramm

Experimentell bestimmt man $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}$ als Funktion von $\tan^2 \frac{\theta}{2}$:



Beschuss von
Wasserstoff-Targets mit e^- :
 $E = 400 \text{ MeV} - 16 \text{ GeV}$

genaue Messung von E' und θ in
 Magnetischen Spektrometern

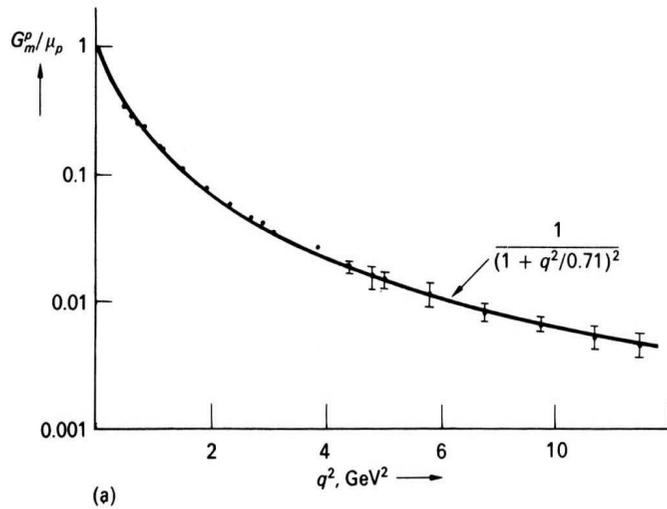
[Perkins Kap. 6, Anh. G;
 Cheng/O'Neill, Ch. 4]

Quotient aus gemessenem und Mott-WQ $\sigma_{\text{exp}}/\sigma_{\text{Mott}}$ als Funktion von $\tan^2(\theta/2)$
 bei einem Viererimpulsübertrag von $Q^2 = 2.5 \text{ GeV}^2/c^2$ [aus Taylor, 1967]

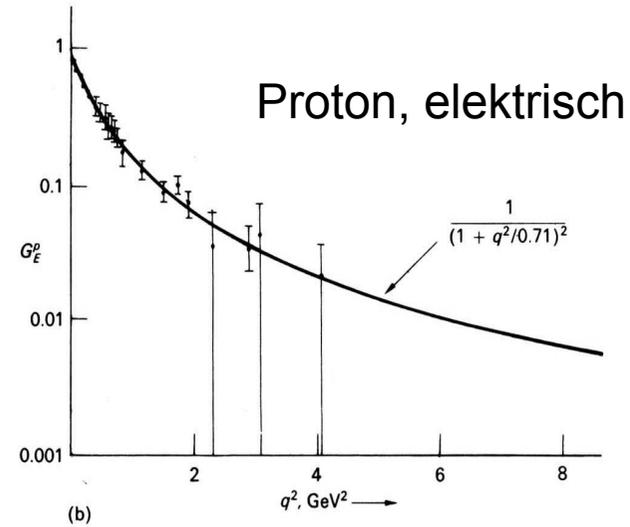
Gerade mit Steigung $G_M^p(Q^2)$ und Achsenabschnitt $\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau}$ bei $\theta = 0^\circ$

Für verschiedene Q^2 durchführen $\Rightarrow G_E(Q^2)$ und $G_M(Q^2)$ separat

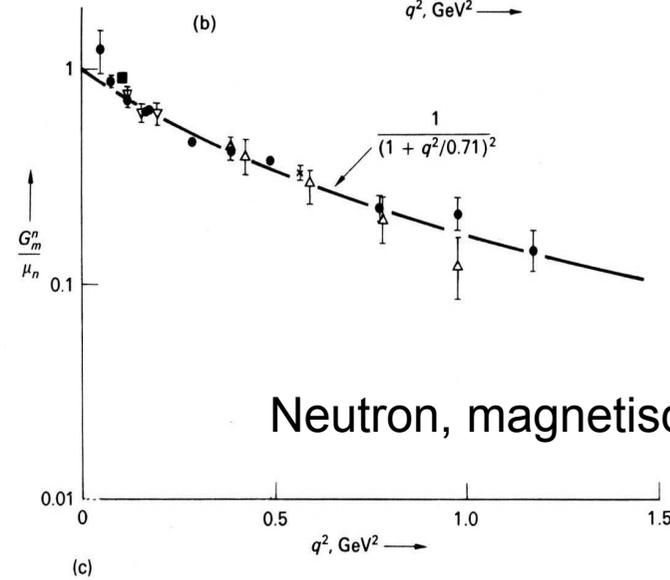
elektrische und magnetische Formfaktoren



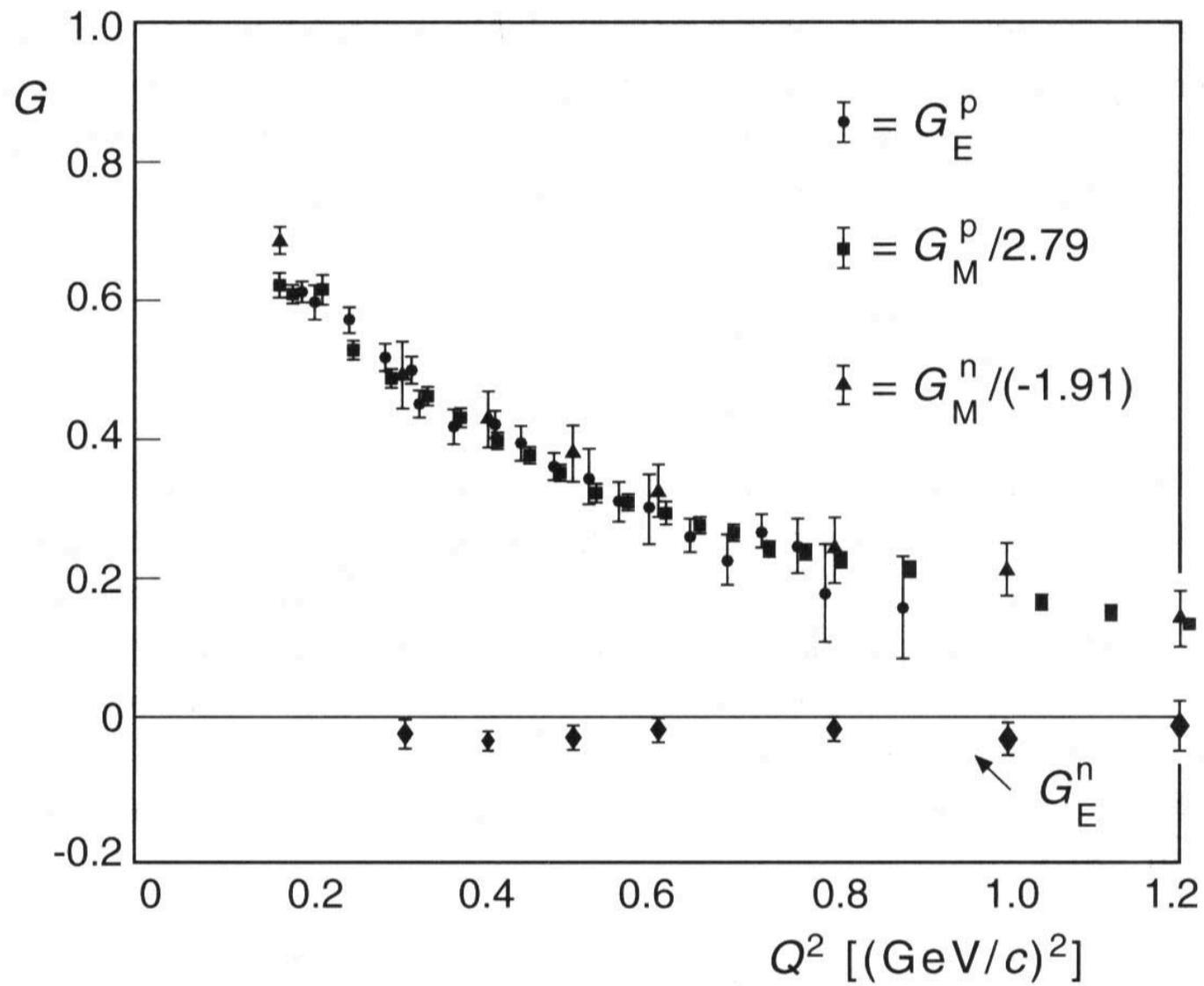
Proton, magnetisch



Proton, elektrisch



Neutron, magnetisch



elektrische und magnetische FF von p und n

Gemeinsame Beschreibung von p und n durch Dipolfit:

$$\rho_N(r) = \rho(0) \cdot e^{-ar} \quad \text{mit } a = 4.27 \text{ fm}^{-1}$$

⇒ Nukleonen sind diffuse Gebilde

- "Dipolskalierung":

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{2.79} = \frac{G_M^n(Q^2)}{-1.91} = G^{\text{Dipol}}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71(\text{GeV}/c)^2}\right)^{-2}$$

Vgl. $\rho(r)$ und FF-Tabelle!

- "Radien" aus Steigung von $G_{E,M}(Q^2)|_{Q^2=0}$:

$$\langle r^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{dG^{\text{Dipol}}}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \frac{12}{a^2} = 0.66 \text{ fm}^2$$

und somit: $\langle r^2 \rangle_{\text{Dipol}}^{1/2} = 0.81 \text{ fm}$

neuere Daten ergeben: $\langle r^2 \rangle_p^{1/2} = 0.862 \text{ fm}$

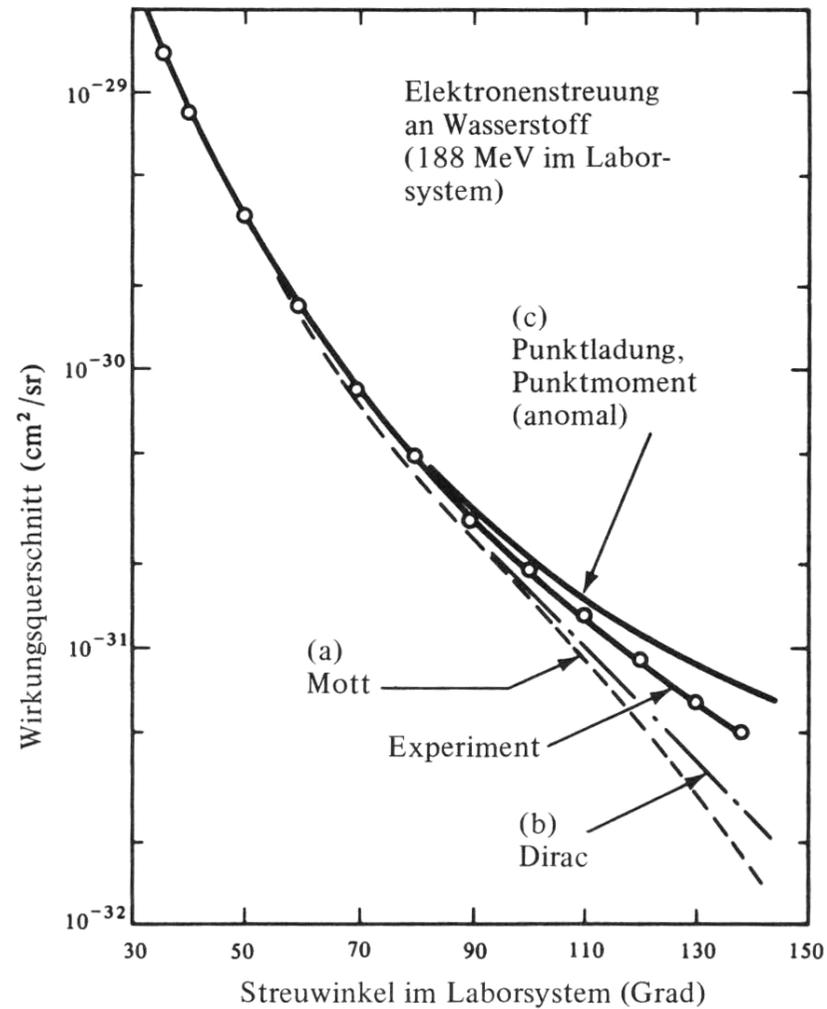
elektrische und magnetische FF von p und n

- $G_E^n(Q^2)$ ist schwierig zu messen: über eD-Streuung und nachträgliches Subtrahieren des eH-Anteils.
- Eleganter: Reaktor-Neutronen an Atom-Elektronen streuen, dabei ist Q^2 klein. e-Nachweis (& zusätzlicher Foldy-Term) führt zu:

$$-6\hbar^2 \frac{dG_E^n(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2=0} = \langle r^2 \rangle = -0.133(5) \text{ fm}^2$$

- ⚡ ⇒ Neutron nur nach außen neutral;
- ⇒ geladene Konstituenten im Inneren, die auch das magn. Moment tragen!

Elastischer Wirkungsquerschnitt



Energiespektrum

Erinnerung: e^- – Streuung (Laborenergie E)
 an ruhenden Nukleonen (Masse M)

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} (1 - \cos \theta)}$$

feste Relation zwischen E' und θ

Jetzt: Experiment mit **gebundenen Nukleonen** durchführen
 \Rightarrow Energiespektrum wird komplizierter

Bsp: $H_2^{16}O$ (ee') am MAMI (Mainzer Mikrotron)
 Überlagerung von $p(ee')$ und $^{16}O(ee')$

Interpretation:

(q.e.) quasielastische Streuung an den
 Nukleonen im ^{16}O – Kern

Breite: Dopplereffekt

Verschiebung: Austrittsarbeit aus Kernpotential

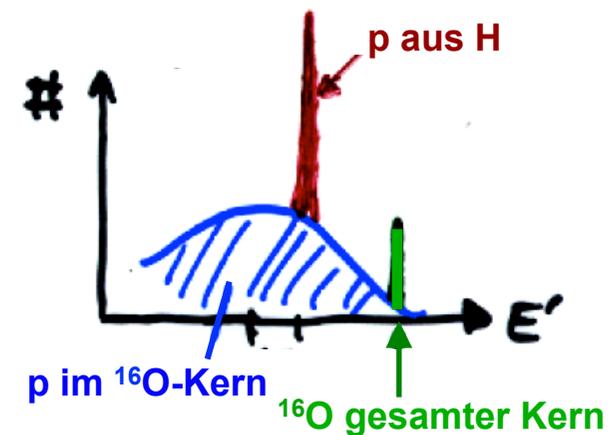
Modell:

Stoßnäherung: e^- – WW mit einzelnen Nukleonen

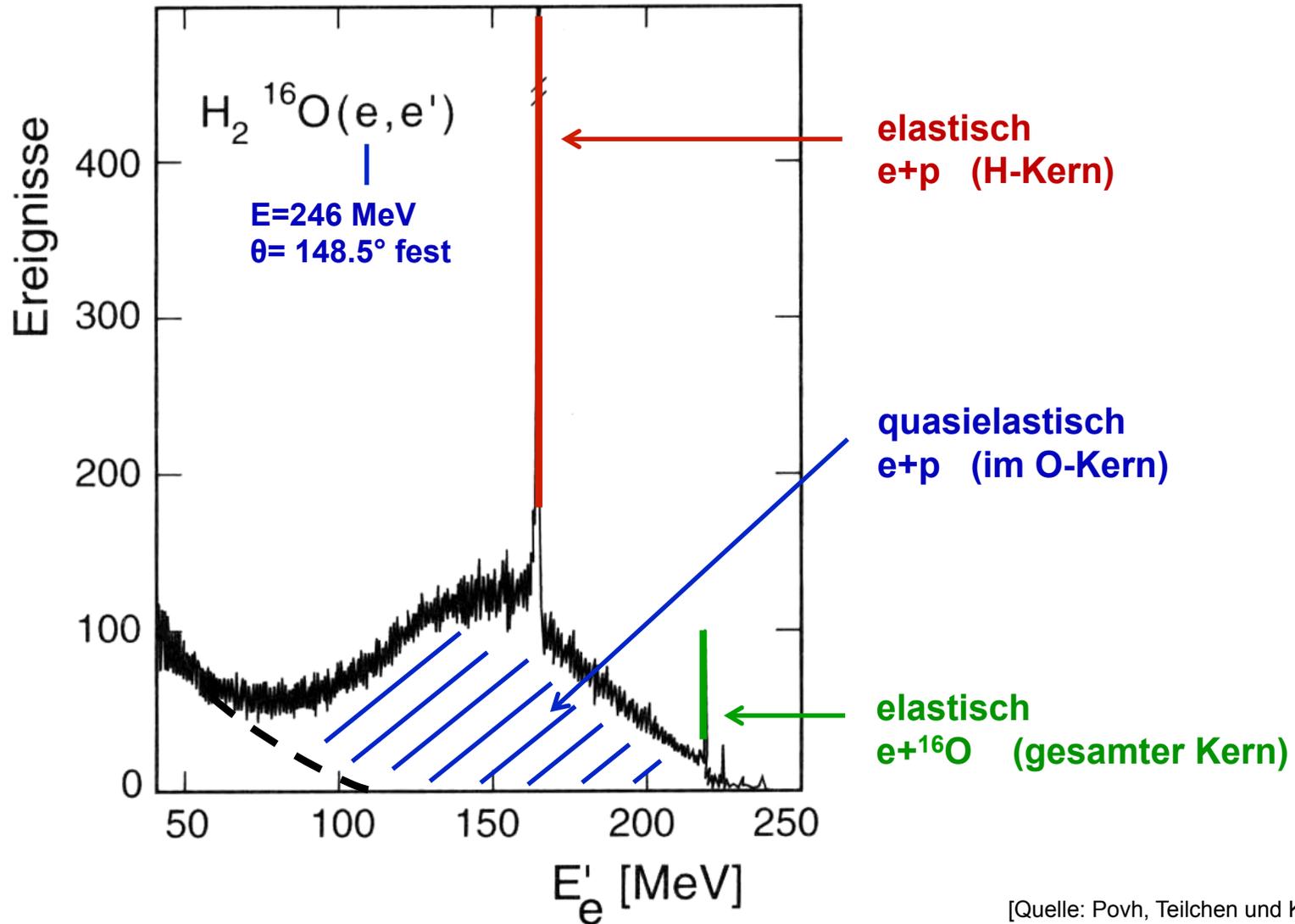
Herauslösen aus dem Kernverband: Austrittsarbeit $\Rightarrow \Delta E$

Breites Spektrum: Nukleonen bewegen sich schnell und \sim frei im Kern

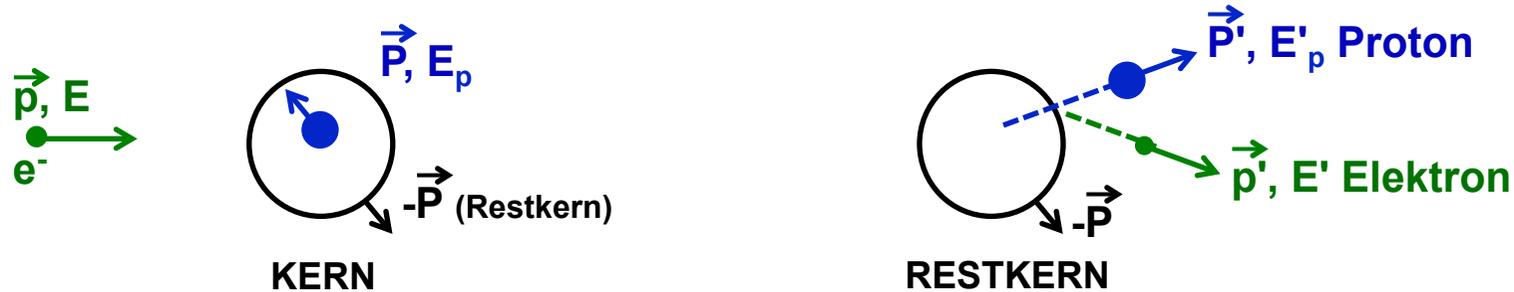
\Rightarrow Dopplereffekt



Elektron – Wasser – Streuung (MAMI)



Energieübertrag ν



- Proton bewegt sich mit Impuls \vec{p} im effektiven mittleren Kernpotential S

- Bindungsenergie := $S - p^2/2M$

- Kinematik:

Impulserhaltung e, p	$\vec{p} + \vec{P} = \vec{p}' + \vec{P}'$
Impulserhaltung γ, p	$\vec{P}' = \vec{q} + \vec{P}$
Energieerhaltung e, p	$E + E_p = E' + E'_p$

- Energieübertrag von e^- auf p : \Rightarrow

für: - "hohe e^- -Energie"
 $E, E \gg m_e c^2$
 - kleine Impulsüberträge
 $p, p' \ll Mc$

$$\begin{aligned}
 \nu &= E - E' = E'_p - E_p &= Mc^2 + \frac{\vec{P}'^2}{2M} - (Mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2M} - S) \\
 &= \frac{\vec{q}^2}{2M} + S + \frac{\vec{q} \cdot \vec{P}}{2M} &= \frac{1}{2M} (\vec{P}'^2 - \vec{P}^2) + S \\
 &= \frac{|\vec{q}| \cdot |\vec{P}| \cdot \cos \alpha}{M} &= \frac{1}{2M} (\vec{q}^2 + \vec{P}^2 + 2\vec{q}\vec{P} - \vec{P}^2) + S
 \end{aligned}$$

$\alpha = \angle(\vec{q}, \vec{P})$

mittlerer Nukleonenimpuls

- kugelsymmetrische Verteilung von $\vec{P} \Rightarrow$ zeitl. Mittel $\Rightarrow \langle \vec{q} \cdot \vec{P} \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = v_0 = \frac{\vec{q}^2}{2M} + S$$

mit Breite $\sigma_v = \sqrt{\langle (\underbrace{v - v_0}_{\text{Def. Varianz}})^2 \rangle} = \sqrt{\langle \frac{|\vec{q}|^2 |\vec{P}^2| \cos^2 \alpha}{M^2} \rangle} = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\langle \vec{P}^2 \cos^2 \alpha \rangle} = \frac{|\vec{q}|}{M} \sqrt{\frac{1}{3} \langle \vec{P}^2 \rangle}$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\cos \alpha=-1}^1 \cos^2 \alpha \, d \cos \alpha \, d\varphi = \dots = \frac{1}{3}$$

- ΔE in $\text{H}_2\text{O}(ee') \sim 15 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S \approx 15 \text{ MeV}}$

- $\sigma_{E'} \sim \sigma_v \approx 70 \text{ MeV FWHM} / 2.3 \Rightarrow \langle \vec{P}^2 \rangle = \left(\sigma_v \cdot \frac{M}{|\vec{q}|} \right)^2 \cdot 3$
 $\approx 30 \text{ MeV}$
 $= \left(30 \cdot \frac{936}{378} \right)^2 \cdot 3 = 128^2$
 $\nearrow q^2 = \frac{4EE'}{c^2} \sin^2 \theta / 2 = 4 \cdot 246 \cdot 150 \cdot \sin^2 74^\circ = 143000 \approx 378^2$

\Rightarrow mittlerer Nukleonimpuls im Kern ist 128 MeV (sehr hoch!)

\Rightarrow was bedeutet das? Modell: Fermi – Gas

Einschub: Fermi – Gas – Modell

- siehe Povh 17.1
- p,n unabhängige Fermionensysteme mit Fermi-Dirac-Statistik; freie Bewegung im Kernvolumen; Pauli-Prinzip
- Jedes Nukleon "sieht" die Superposition der Kernpotentiale der anderen Nukleonen \Rightarrow effektiver Potentialtopf \square

- **Zahl der Zustände**
(in Vol. V und $p \dots p+dp$)

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V$$

Grundzustand (T=0):
alle Zust. bis $p_{\max} = p_F$ besetzt

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}$$

Teilchenzahlen:
(wg. Spin: 2/Zustand)

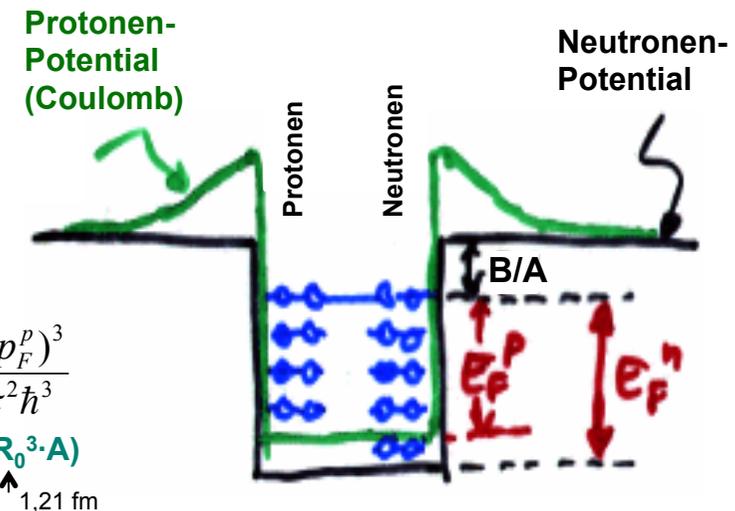
$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3}; \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3}$$

(mit $V = 4/3 \pi R^3 = 4/3 \pi R_0^3 \cdot A$)

- Isoskalärer Kern: $N=Z=A/2$ ergibt:

$$p_F = p_F^p = p_F^n = \hbar / R_0 (9\pi/8)^{1/3} \approx 250 \text{ MeV}$$

\Rightarrow **Die Nukleonen können sich im Kern mit hohem Impuls bewegen**
(vgl. Unschärferelation $\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar$ für ein auf Δx lokalisiertes Teilchen)



"Fermi – Energie"

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{ MeV}$$

⇒ Tiefe des Potentialtopfs:
 $V_0 = E_F + B/A \approx 40 \text{ MeV}$

$B/A \sim 7\text{-}8 \text{ MeV /Nukleon}$

- unabhängig von A
- nicht extern vorgegeben, sondern durch WW unter den Nucleonen erzeugt
- **KEINE** gute Näherung für **kleine A**

- E_F konstant ⇒ konstante Kerndichte
- Zunahme der Niveaudichte wg. des mit A größeren Kernvolumens

- $N > Z$ für schwere Kerne: $E_F^n \leq E_F^p$ für stabile Kerne, sonst β -Zerfall
 - p sind wegen der Coulomb-Abstoßung schwächer gebunden als n: $N > Z$
 - ⇒ "n-Topf tiefer als p-Topf"

- Verbindung mit $\langle \vec{p}^3 \rangle$ aus quasi-elastischer Streuung (Breite der E'-Verteilung):

$$\underbrace{\langle E_{kin} \rangle}_{\text{pro Nukleon}} = \frac{\int_0^{p_F} E_{kin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{\int_0^{p_F} \frac{p^2}{2M} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \stackrel{\text{allg.}}{=} \frac{\langle p^2 \rangle}{2M}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_F^2 = \frac{5}{3} \langle p^2 \rangle}$$

Datenbeispiele aus quasielastischer e⁻-Streuung

- 1971 – 1974, 320-500 MeV, $\theta=60^\circ$

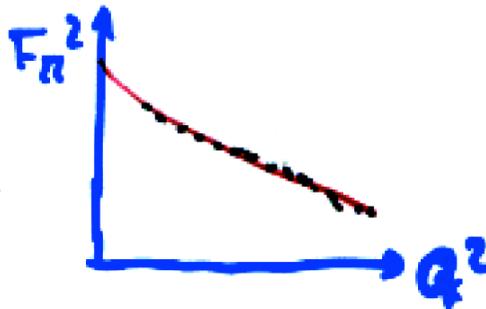
	⁶ Li	¹² C	⁵⁹ Ni	²⁰⁸ Pb	
p_F [MeV/c]	169	221	260	265	±5
S [MeV]	17	25	36	44	±3

Ladungsradien von Mesonen aus Formfaktoren

- Formfaktoren von π , K :
 - $q\bar{q}$ – Systeme mit Spin 0
 - \Rightarrow nur elektrische Formfaktoren
 - $m_\pi=140$ MeV ; $m_K=494$ MeV

Streuung an H -Hüllenelektronen: $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\cos\theta) \rightarrow FF(Q^2)$

Fit an Monopol-Form:

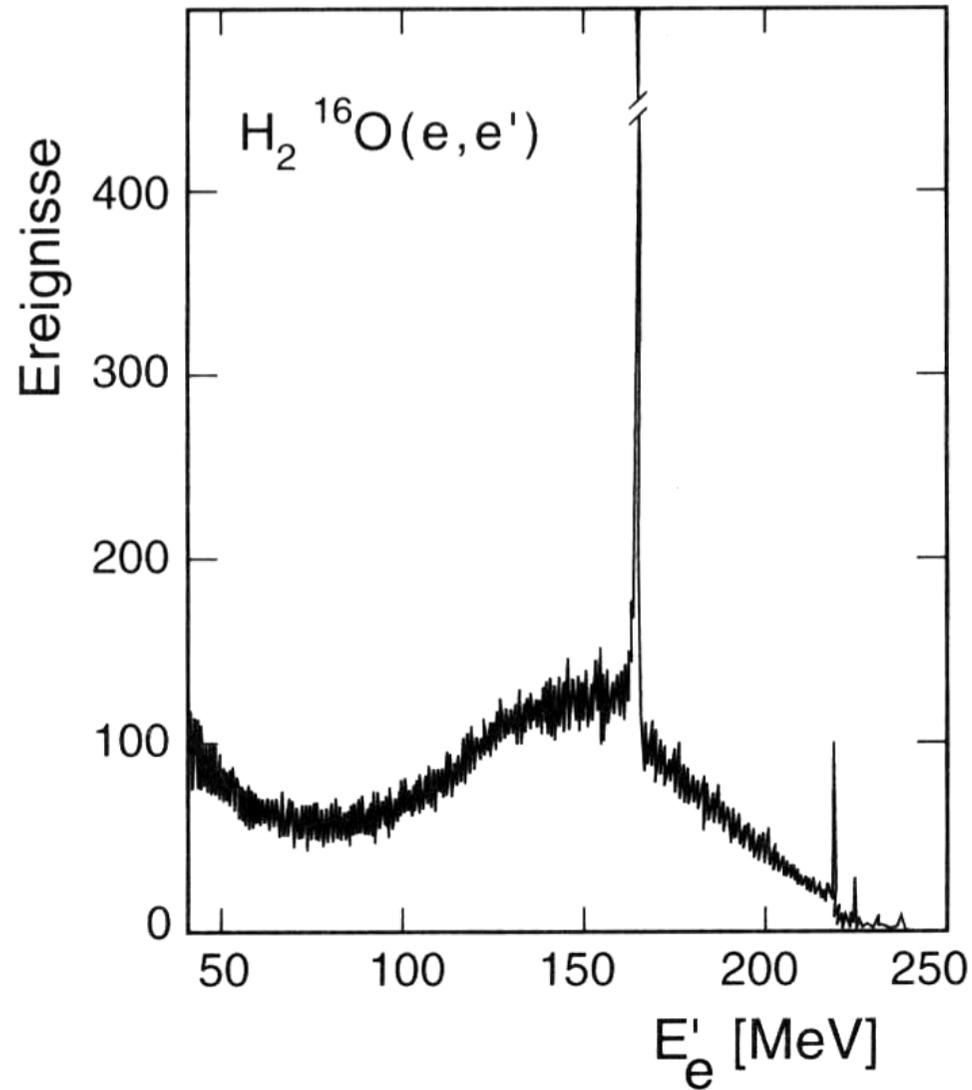


$$F(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{n^2\hbar^2}\right)^{-1}$$
$$a^2 = 6 / \langle r^2 \rangle$$

$$\pi : \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.67(2) \text{ fm} \quad (\text{u}\bar{\text{d}})$$

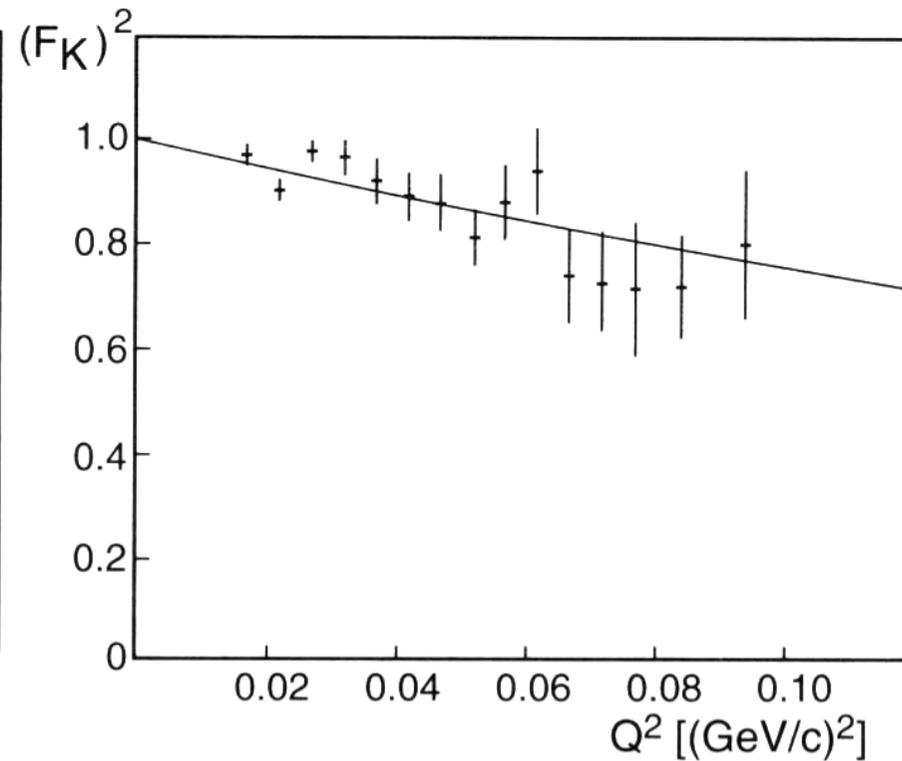
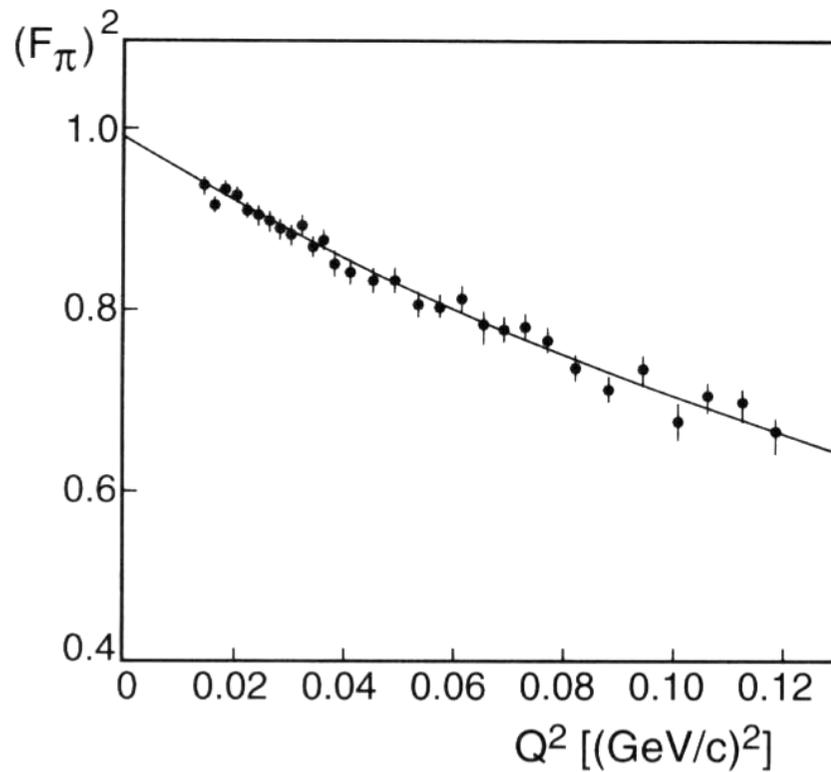
$$K : \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.58(2) \text{ fm} \quad (\text{s}\bar{\text{u}}), \text{ kleiner } \Rightarrow \text{ stärker gebunden}$$

Elektron – Wasser – Streuung (MAMI)



[Quelle: Povh, Teilchen und Kerne]

Pion- und Kaon-Formfaktoren



[Quelle: Povh, Teilchen und Kerne]