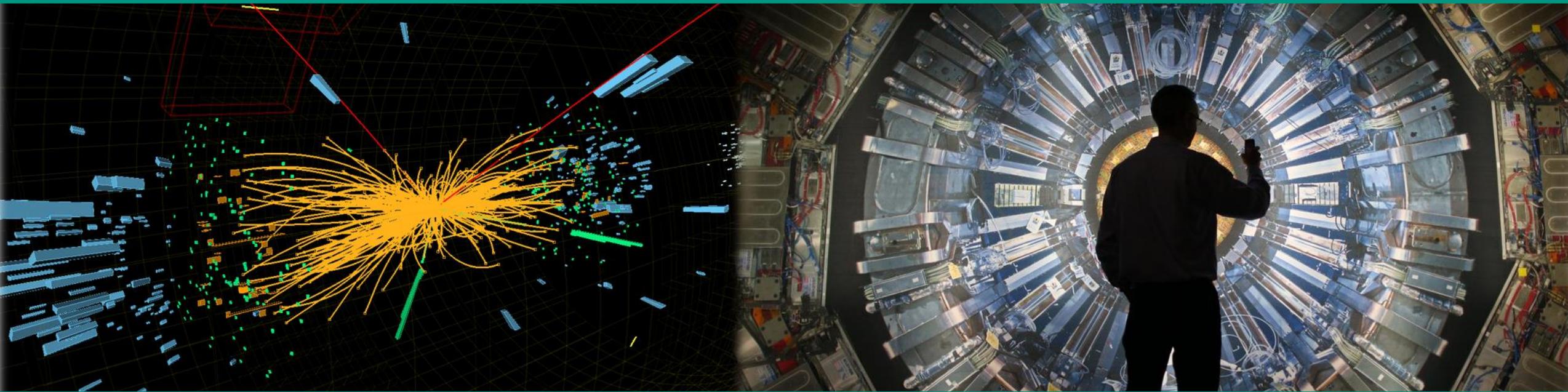


# Moderne Experimentalphysik III – Teilchen und Hadronen

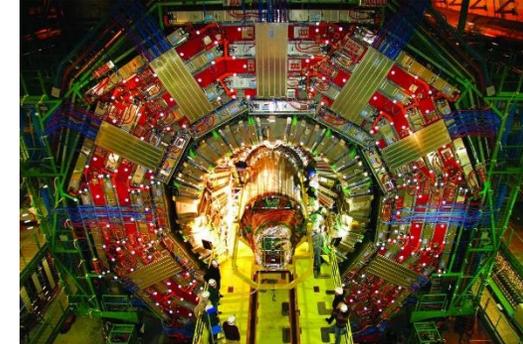
Vorlesung 2

20.4.2023



# Recap: Tools, natürliche Einheiten

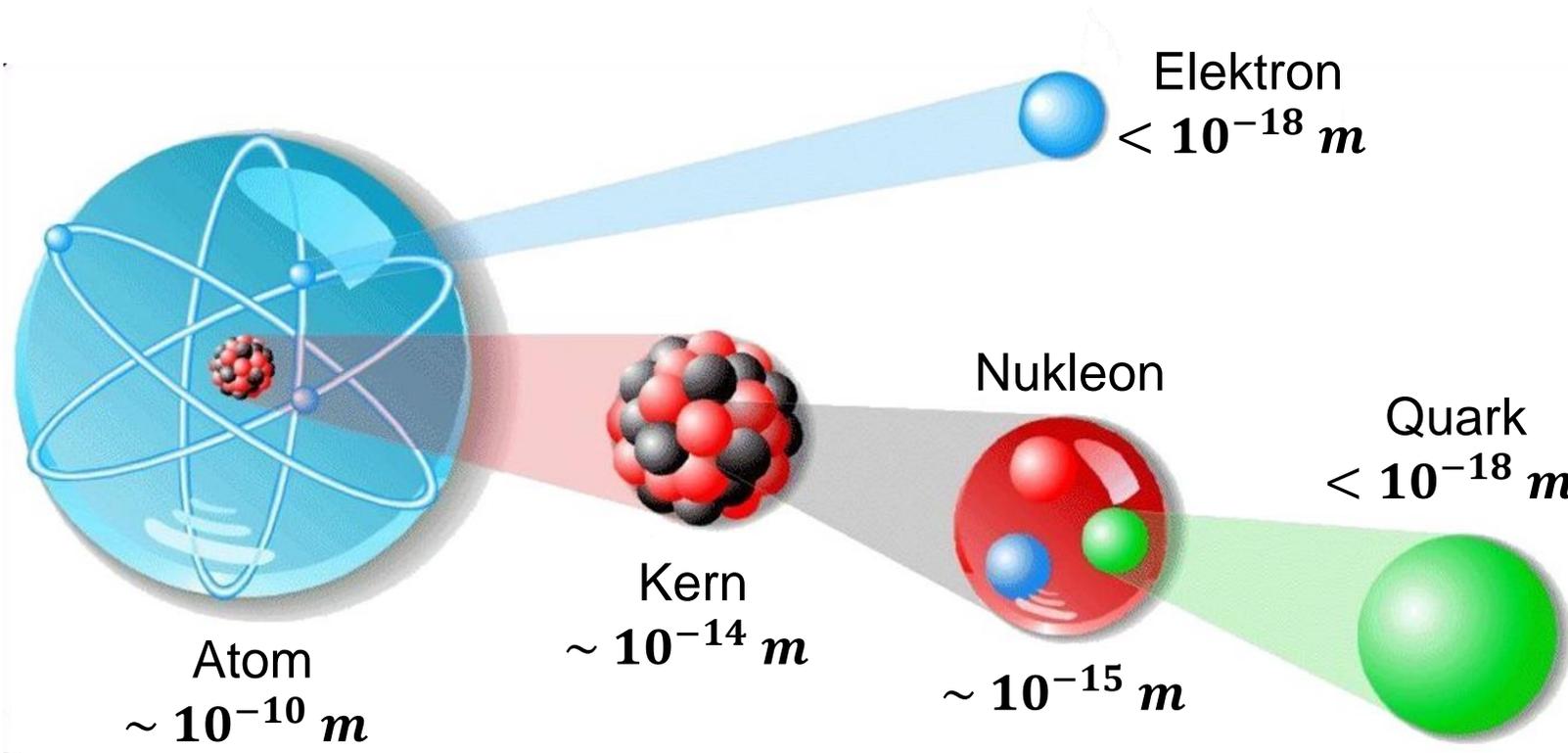
## ■ Tools: Beschleuniger, Detektoren, Wechselwirkungen



## ■ Teilchenphysik: Verwendung von natürlichen Einheiten

**natürliche Einheiten**  $\hbar = c = k_B = 1$

Länge in inverser Energie	$0,1975 \text{ fm}$	$= 1 \text{ GeV}^{-1}$
Zeit in inverser Energie	$6,582 \cdot 10^{-25} \text{ s}$	$= 1 \text{ GeV}^{-1}$
Temperatur in Energie	$11,604 \cdot 10^{12} \text{ K}$	$= 1 \text{ GeV}$



# KAPITEL 2 – VOM ATOM ZUM ELEMENTAR- TEILCHEN

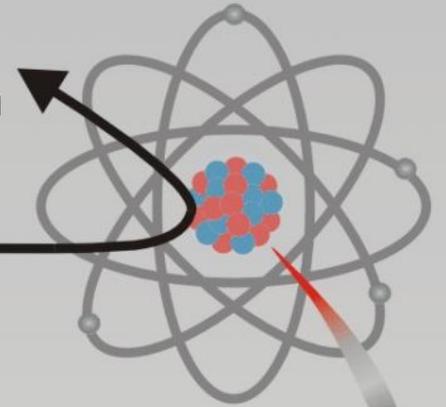
# Überblick: Streuexperimente zur Strukturanalyse

## ■ Die Aufklärung der Struktur der Materie

- zentrales Leitmotiv:  
benutze **Streuexperimente**
- **Rutherford & Marsden:**  
 $\alpha$  –Teilchen ( $4,8 \text{ MeV}$ ) aus Quelle zum  
**Nachweis des punktförmigen Kerns**
- **Robert Hofstadter:**  
Elektronen (bis  $\sim 600 \text{ MeV}$ ) zum  
**Nachweis der Ladungsverteilung  
des Kerns & Proton-Formfaktors**

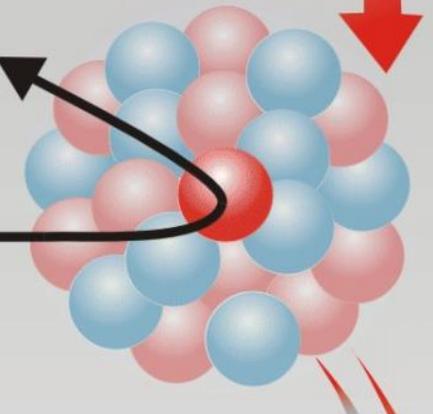
Rutherford, 1908  
Entdeckung Atomkern

$\alpha$ -Teilchen



Hofstadter, 1956  
Ausdehnung der Kerne  
Proton-Formfaktor

Elektronen



Q: spektrum

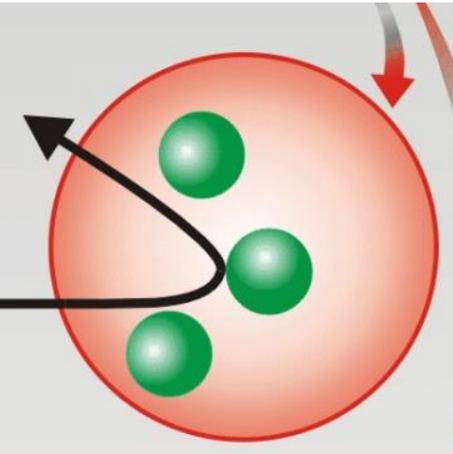
# Überblick: Streuexperimente zur Strukturanalyse

## ■ Die Aufklärung der Struktur der Materie

- Friedman, Kendall, Taylor (1962):  
*20 GeV* Elektronen vom SLAC zum  
**Nachweis von punktförmigen Quarks**
- zahlreiche *HE\**-Streuexperimente an Beschleunigern mit Elektronen, Myonen und Neutrinos (u.a. DESY):  
**Nachweis des komplexen Aufbaus von Protonen: Gluonen, Seequarks, (Partonen), Spin-Eigenschaften**

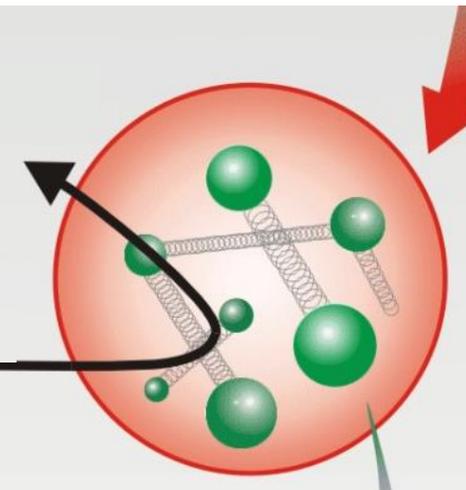
Friedman, 1962  
Entdeckung Quarks

Elektronen



HERA (DESY), 1992  
Aufbau des Protons

Elektronen, Myonen,  
Neutrinos

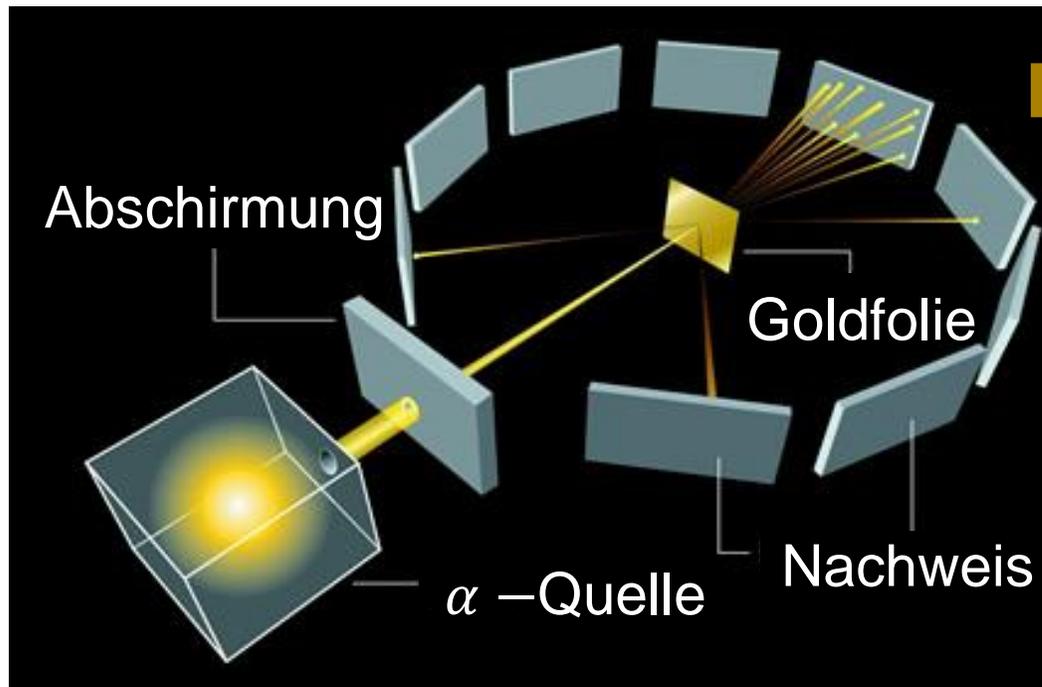


Q: spektrum

# Streuexperimente: Fortschritte

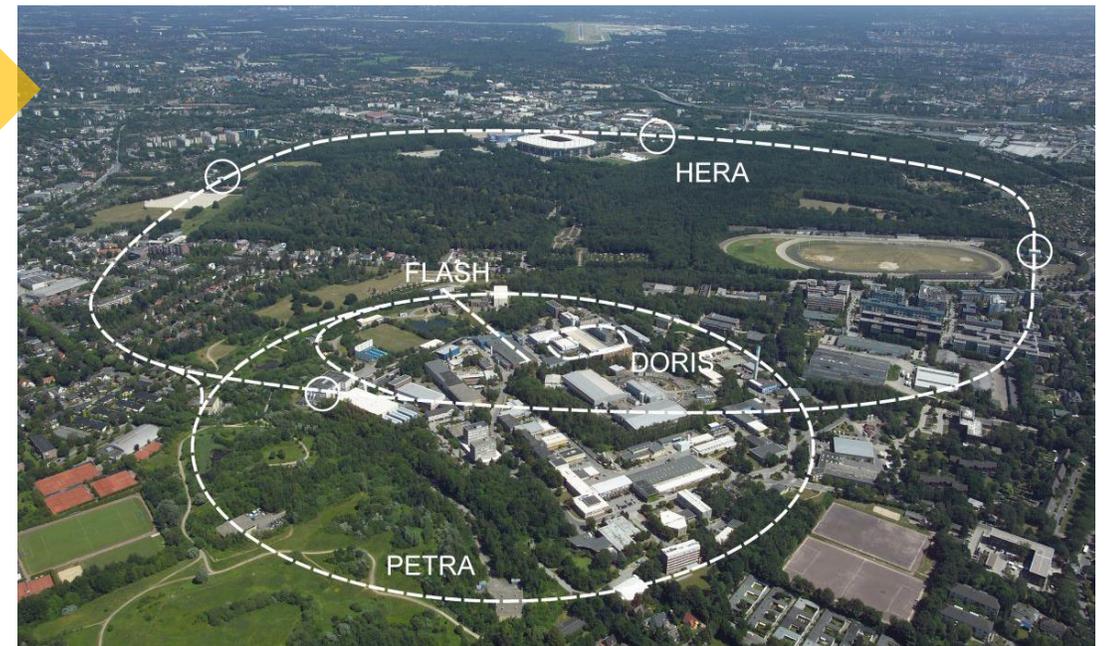
## ■ Streuexperimente: Messungen bei immer höherer Energie

- moderne **Beschleuniger** mit immer höherer Energie & besserer Auflösung



Q: nach: spektrum

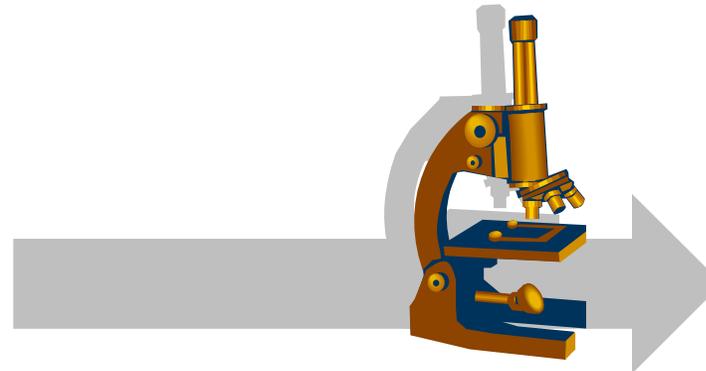
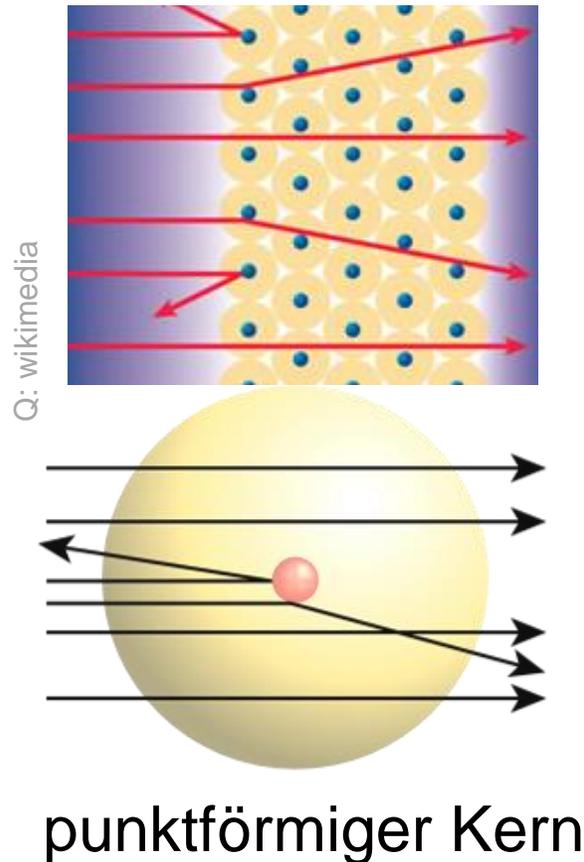
$\alpha$  – Energie: **5 MeV**     $p$  – Energie: **800 GeV**  
 $e^-$  – Energie: **30 GeV**



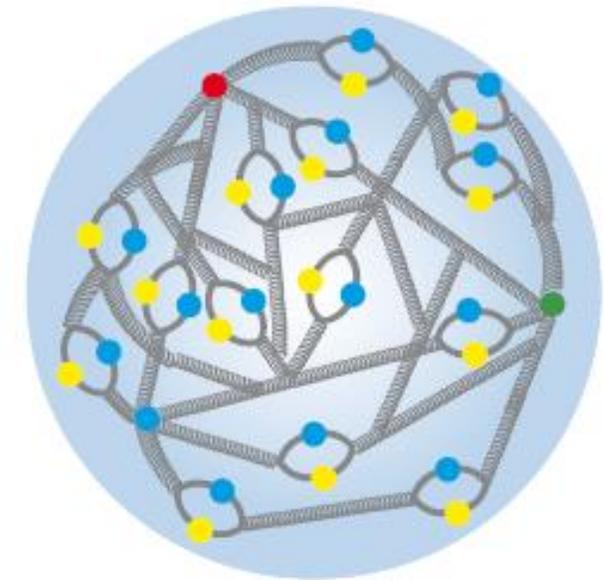
# Streuexperimente: Fortschritte

## ■ Streuexperimente: Messungen bei immer höherer Energie

- moderne **Beschleuniger** mit immer höherer Energie & besserer Auflösung

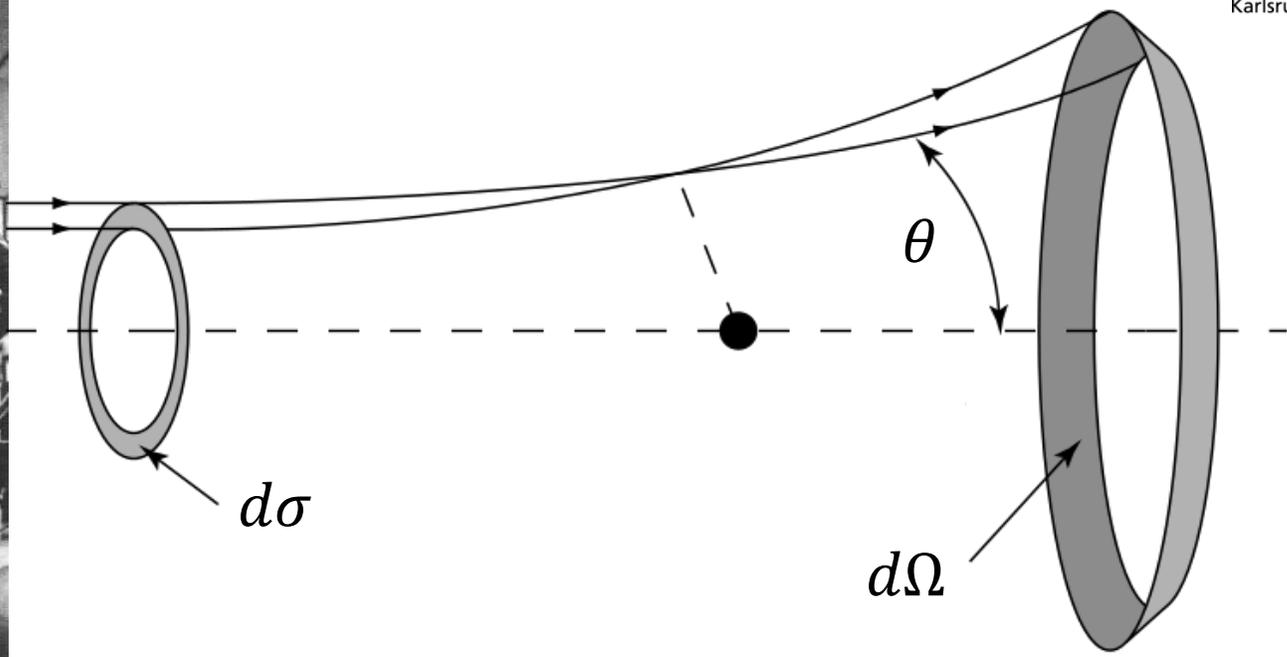
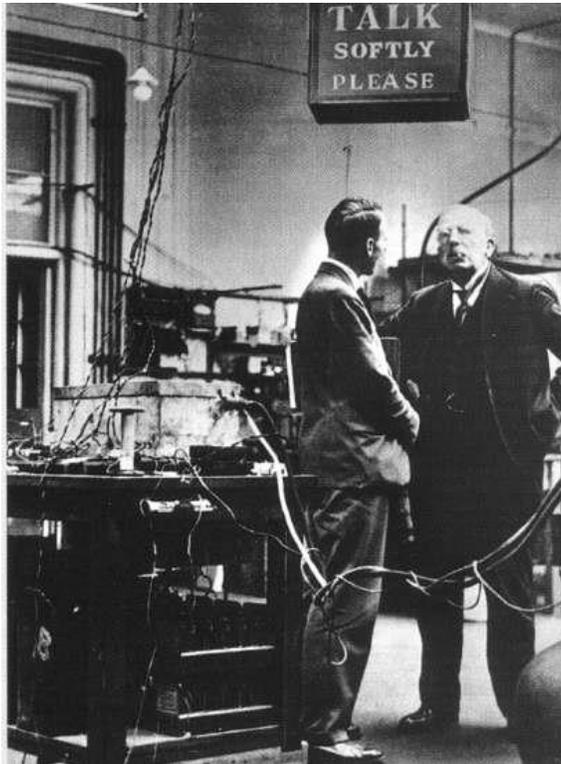


$$0,197 \text{ fm} \\ = \\ 1 \text{ GeV}^{-1}$$



komplexes Nukleon bestehend aus Partonen: **Valenzquarks**, **Seequarks**, **Gluonen**

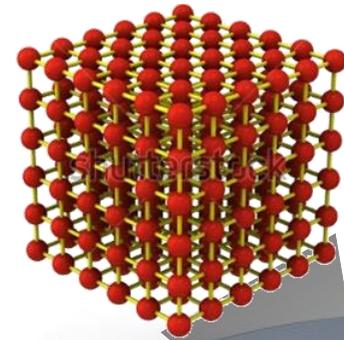
Q: nzgeo, physics forums



# KAPITEL 2.1 – RUTHERFORD-STREUUNG & WIRKUNGSQUERSCHNITT

# 2.1 Rutherford-Streuung\* & Wirkungsquerschnitt

- Streuexperimente:  
Winkelverteilung  $d\sigma/d\Omega$   
gibt Aufschluss über  
Struktur des Targets

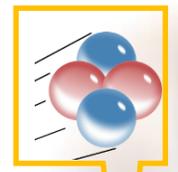


Goldkerne ( $Au - 197$ )

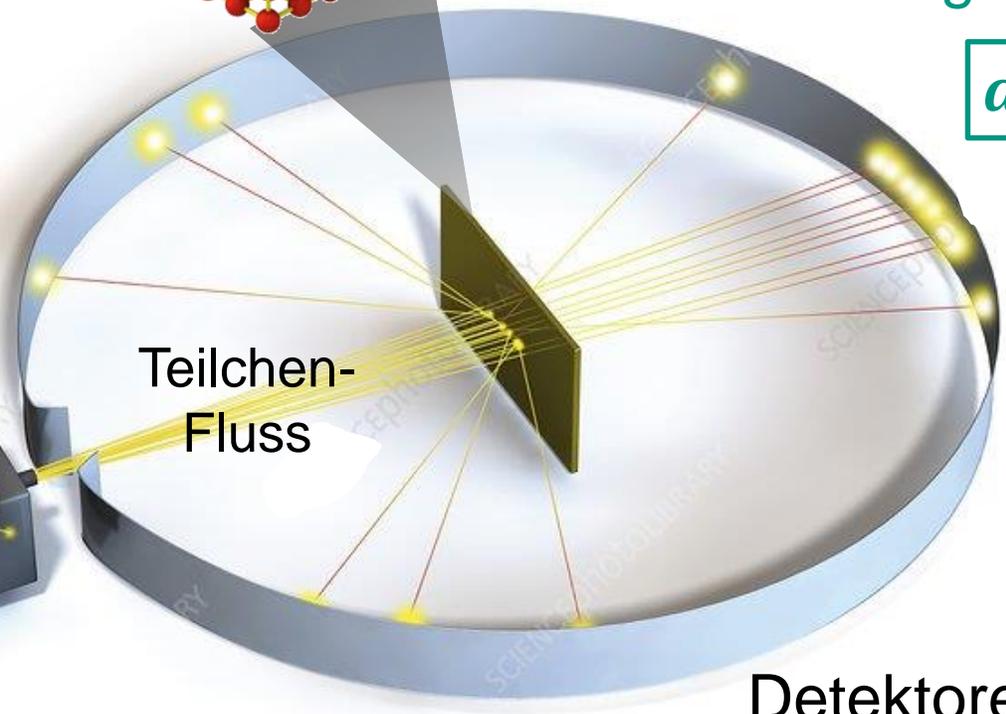
Differentieller  
Wirkungsquerschnitt

$d\sigma/d\Omega$

Projektil:  
 $\alpha$  – Kerne



Teilchen-  
Fluss



Lord Rutherford

$Ra$  – Quelle mit  
 $E_{kin}(\alpha) = 4,78 MeV$

Detektoren ( $ZnS$  – Szintillator)

Q: fineartamerica

Q: sertec

# Aufbau eines Streuexperimentes

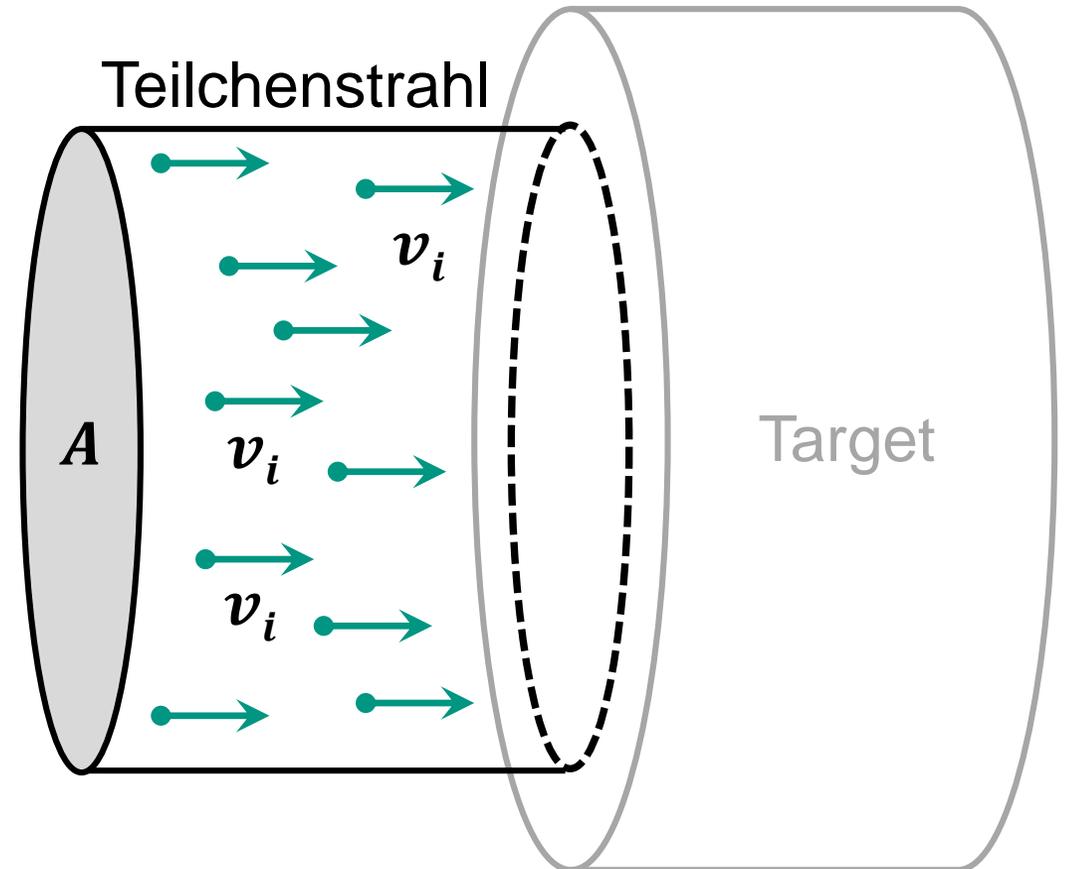
## ■ **Teilchenstrahl** treffe senkrecht auf dünnes Target

### - Parameter des einfallenden Strahls

- Querschnittsfläche  $A$  [ $\text{cm}^2$ ]
- Geschwindigkeit  $v_i$  [ $\text{cm}/\text{s}$ ]
- Anzahldichte  $n_s$  [ $\text{cm}^{-3}$ ]
- **Flussdichte  $J$**  [ $\text{cm}^{-2}/\text{s}^{-1}$ ]
- **Fluss  $\Phi$**  [ $\text{s}^{-1}$ ]

$$J = n_s \cdot v_i$$

$$\Phi = J \cdot A = n_s \cdot v_i \cdot A$$



# Aufbau eines Streuexperimentes

## ■ Teilchenstrahl treffe senkrecht auf **dünnes Target**

Avogadro-Zahl  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} / \text{mol}$

### - Parameter des dünnen Targets

- Dichte  $\rho$  [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ]

- Länge  $L$  [ $\text{cm}$ ]

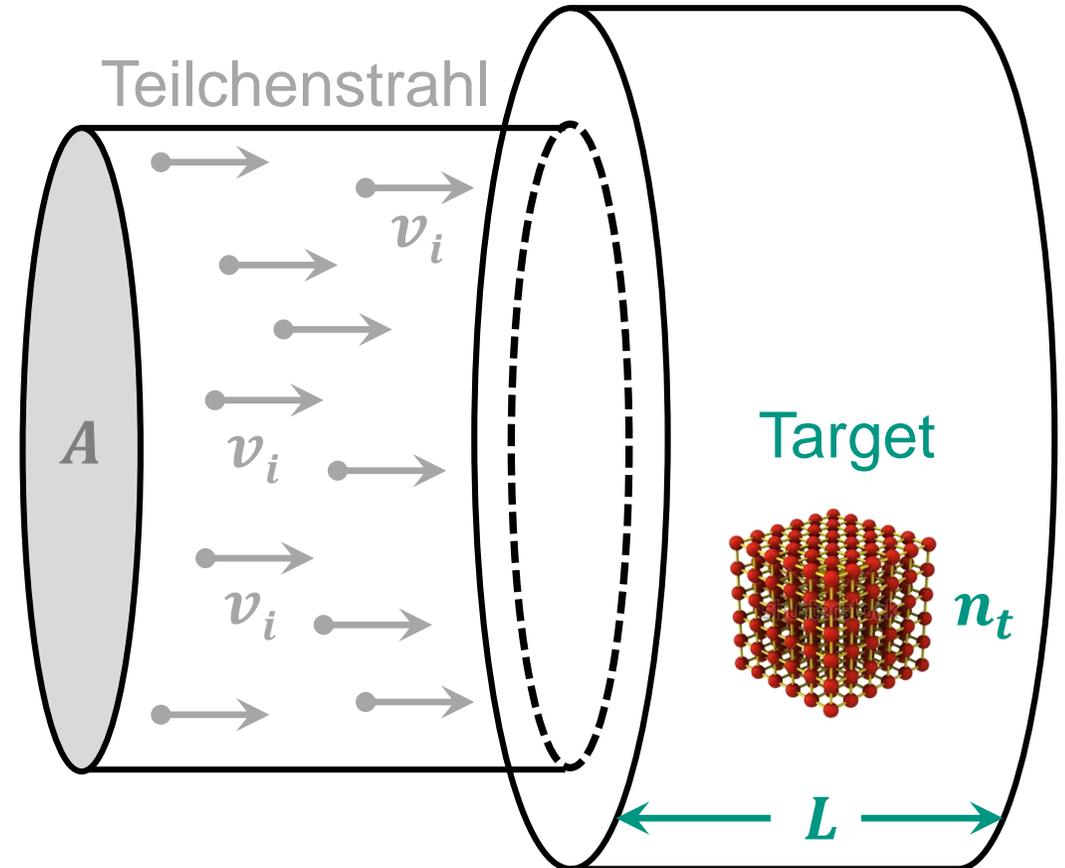
- Atommasse  $M_A$  [ $\text{u}$ ]\*

- **Anzahldichte der Targetkerne** [ $\text{cm}^{-3}$ ]

$$n_t = \rho \cdot N_A / M_A$$

- **Targetkerne im Strahl** [#]

$$N_t = n_t \cdot L \cdot A$$



# Totaler Wirkungsquerschnitt & Gesamtrate

- Gesamtrate  $W_r$  an Streu-Ereignissen  $dN_s$  pro Zeiteinheit  $dt$

$$W_r = dN_s/dt = J \cdot N_t \cdot \sigma_{tot}$$

Rate:  
[ $s^{-1}$ ]

Fluss-  
dichte  
[ $cm^{-2}s^{-1}$ ]

Targets  
im Strahl  
[#]

totaler  
Wirkungs-  
Querschnitt:  
[ $cm^2$ ]

Strahl-  
Eigenschaft



# Totaler Wirkungsquerschnitt & Gesamtrate

- Gesamtrate  $W_r$  an Streu-Ereignissen  $dN_s$  pro Zeiteinheit  $dt$

$$W_r = dN_s/dt = \Phi \cdot n_t \cdot L \cdot \sigma_{tot}$$

Rate:  
[s<sup>-1</sup>]

Fluss  
[s<sup>-1</sup>]

Anzahl-  
dichte  
Target  
[cm<sup>-3</sup>]

Länge  
[cm]

totaler  
Wirkungs-  
Querschnitt:  
[cm<sup>2</sup>]

Strahl-

Target-

Eigenschaft



# Totaler Wirkungsquerschnitt & effektive Fläche

## ■ Definition totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}$

- $\sigma_{tot}$  beschreibt die **Wahrscheinlichkeit eines Streuprozesses**

$$\sigma_{tot} = \frac{\text{Zahl der Reaktionen pro Targetkern und Zeit}}{\text{Zahl einfallender Teilchen pro Fläche und Zeit}}$$

- $\sigma_{tot}$  hat die Dimension einer Fläche ( $cm^2$ )
- $\sigma_{tot}$  stellt dar eine **effektive Fläche für Streuprozesse**

# Wirkungsquerschnitt: geometrische Bedeutung

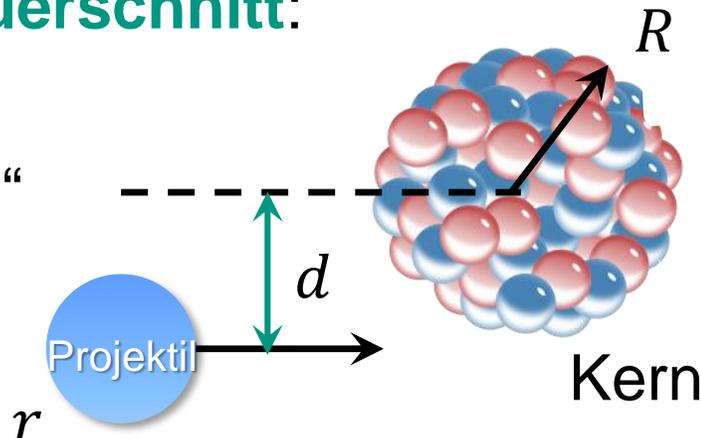
## ■ Effektive Streufläche

- Kernphysik:  $b$  bis  $10^{-3} b$  (mb)
- Teilchenphysik:  $10^{-3} b \dots 10^{-18} b$  (atto- $b$ )
- Astroteilchenphysik:  $10^{-20} b \dots 10^{-24} b$  (yocto- $b$ )

## - geometrischer Streuquerschnitt:

harte Kugeln –  
„Kontaktwechselwirkung“

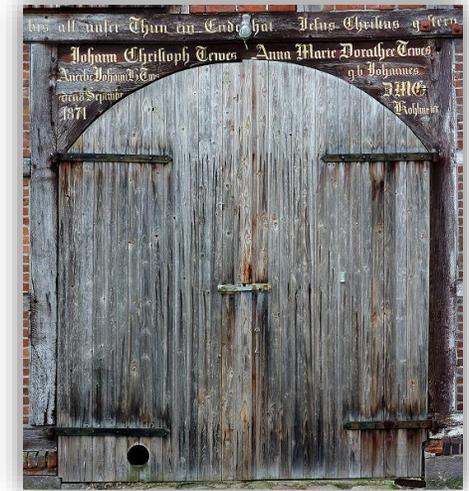
$$\sigma_{geom} = \pi \cdot (R^2 + r^2)$$



Q: wikipedia

Einheit des Wirkungsquerschnitts  $\sigma_{tot}$  :

$$1 \text{ barn} = 1 b = 10^{-24} \text{ cm}^2$$



Q: pub domain

[barn = Scheunentor]

# Wirkungsquerschnitt: geometrische Bedeutung

## ■ Beispiel: Streuung eines $\alpha$ – Teilchens an $^{197}\text{Au}$

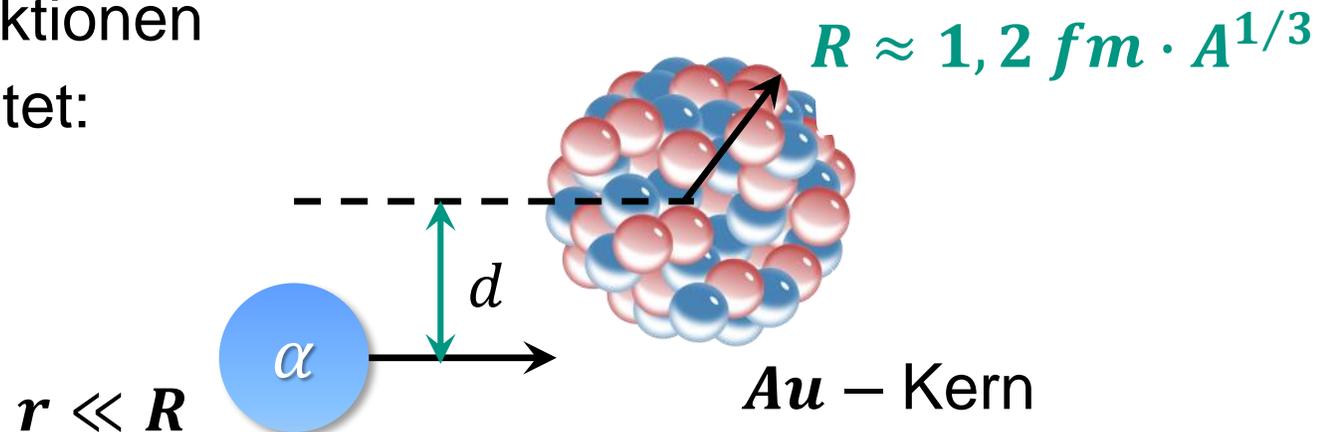
$$R(^{197}\text{Au}) = 7 \text{ fm} = 7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$A = \pi \cdot R^2 = 154 \text{ fm}^2 = 1,54 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

geometrischer Streuquerschnitt  $\sigma_{tot,geom} = 1,54 \text{ b}$  ( $1\text{b} = 100 \text{ fm}^2$ )

- für Neutronen-Reaktionen  
wird auch beobachtet:

$$\sigma_{tot} > \sigma_{geom}$$



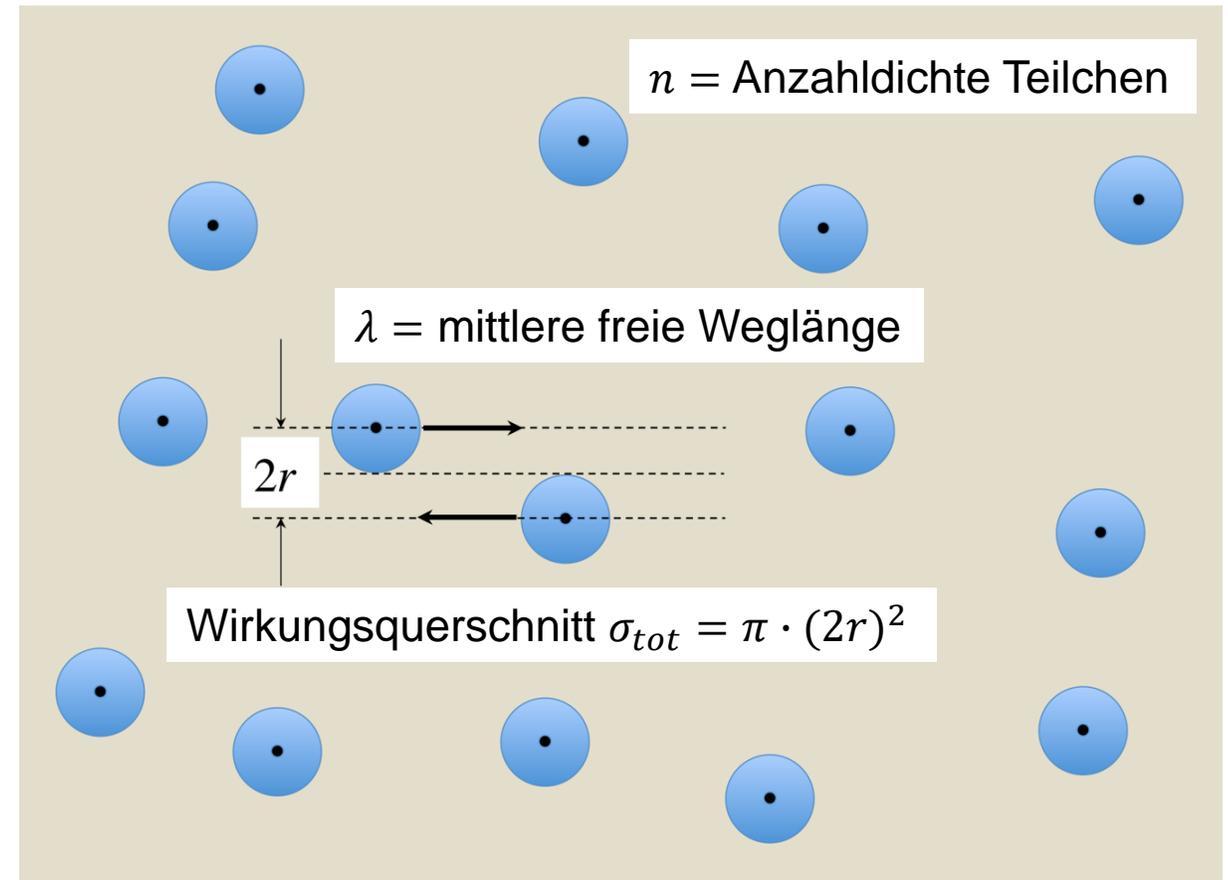
# Wirkungsquerschnitt: Thermodynamik\*

- **Stoßprozesse** von Gasteilchen (harte Kugel mit Radius  $r$ ):  
Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  ist verknüpft mit ihrer **geometrischen Größe**

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{n_{\text{Target}} \cdot \lambda}$$

$[cm^2]$  (pointing to  $\sigma_{tot}$ )  
 $[cm^{-3}]$  (pointing to  $n_{\text{Target}}$ )  
 $[cm]$  (pointing to  $\lambda$ )

**Kontaktwechselwirkung:**  
Stoß, sobald die Kugeln  
sich berühren



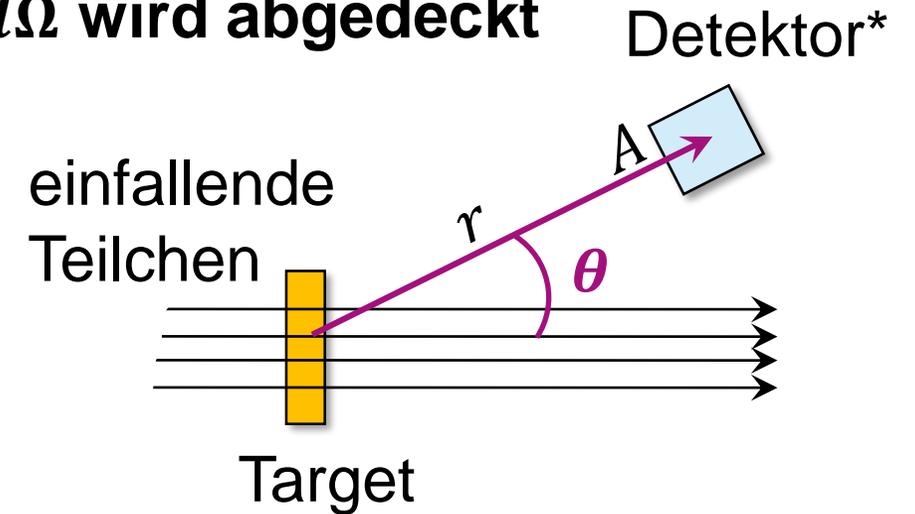
# Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$

- oft: nur ein Teil des gesamten Raumwinkels  $d\Omega$  wird abgedeckt

- Raumwinkel-Element  $d\Omega = A/r^2$

- ein Detektor unter  $d\Omega$  misst dann den

**differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$**



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der nach } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen pro Targetkern und Zeit}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen pro Fläche und Zeit}}$$

- Einheit des differentiellen Wirkungsquerschnitts: [ $\text{cm}^2/\text{sr}$ ] bzw. [ $\text{b}/\text{sr}$ ]  
gesamter Raumwinkel um Target:  $d\Omega = 4\pi \cdot \text{sr}$

# Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$

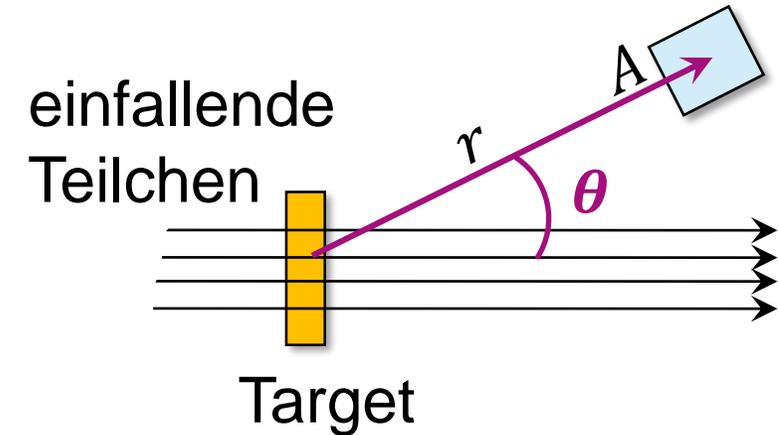
- Rate  $R$  gestreuter Teilchen in den Raumwinkel  $d\Omega$  (Fläche  $A$  in Abstand  $r$ )

$$R = \Phi \cdot n_t \cdot L \cdot \frac{A}{r^2} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$\Phi$ : Teilchenfluss  $[s^{-1}]$

$n_t$ : Anzahldichte  
Targetkerne  $[cm^{-3}]$

$L$ : Länge  $[cm]$



Detektor-Eigenschaften

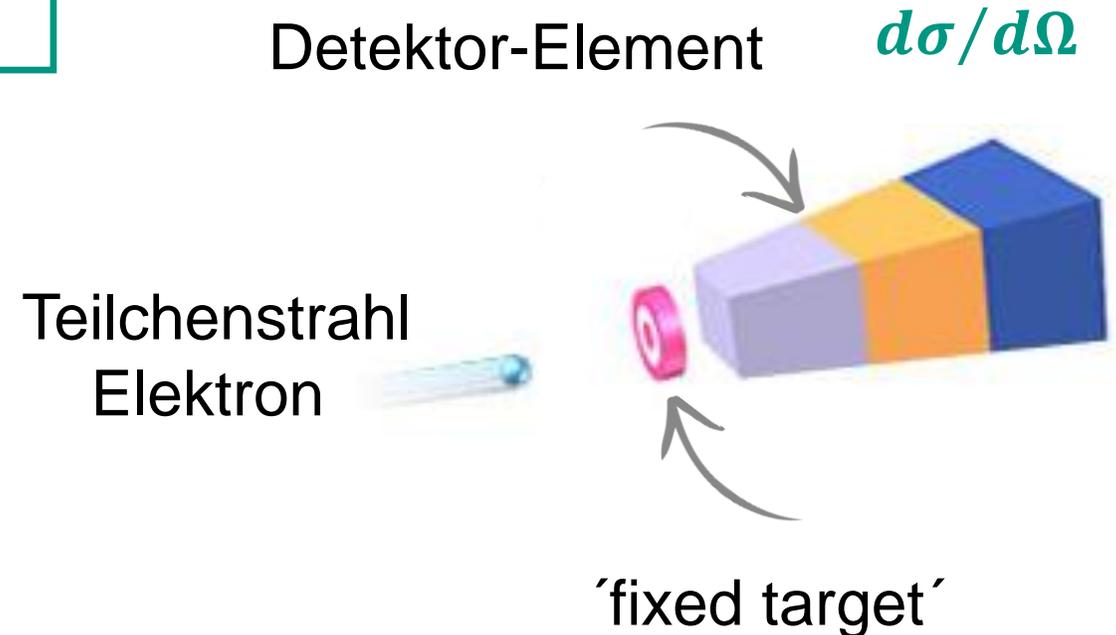
$d\sigma/d\Omega$  : differentieller Wirkungsquerschnitt  $[cm^2/sr]$

# Differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$

- Streuexperimente: oft *'fixed target'* Aufbau

$$R = \Phi \cdot n_t \cdot L \cdot \frac{A}{r^2} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- ein Teilchenstrahl ( $\alpha$ 's, Elektronen, ...)  
mit bekannten Eigenschaften  
**(Energie, Impuls)** trifft auf ruhendes  
Target (*'fixed target'* Aufbau)
- typischerweise deckt der Detektor nur  
einen kleinen **Raumwinkelbereich  $d\Omega$**  ab



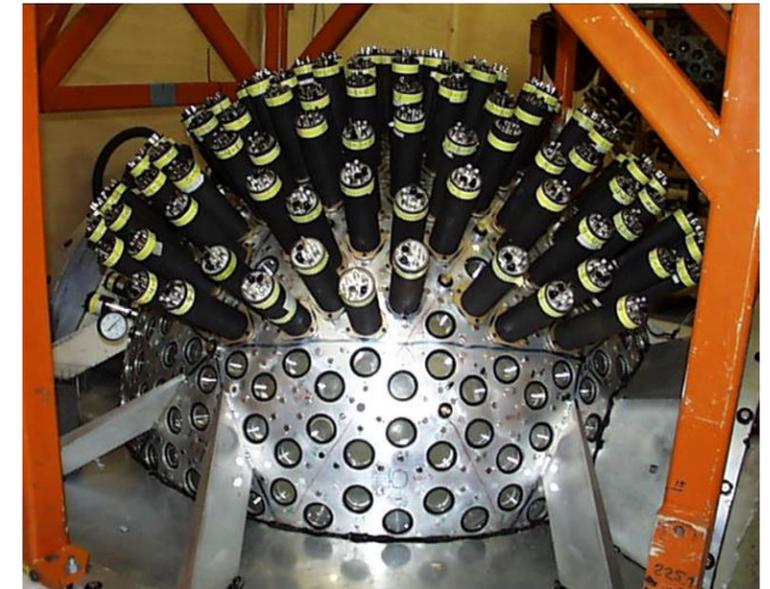
# Relation $d\sigma/d\Omega$ & Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}$

## ■ Integration von $d\sigma/d\Omega$ (differentieller Wq.) zu $\sigma_{tot}$ (totaler Wq.)

- für Streuungen mit einer **azimutalen Symmetrie** gilt:

$$\sigma_{tot} = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{d\sigma(\cos\theta)}{d\Omega} d\cos\theta$$

- Messungen von  $\sigma_{tot}$  erfolgen oft in Kugelgeometrie:  
Detektor umhüllt Target in einer  **$4\pi$  Geometrie**



Q: Argonne Lab

**$4\pi$  Geometrie**

# Rutherford-Streuprozess

## ■ Rutherford-Streuexperiment\*

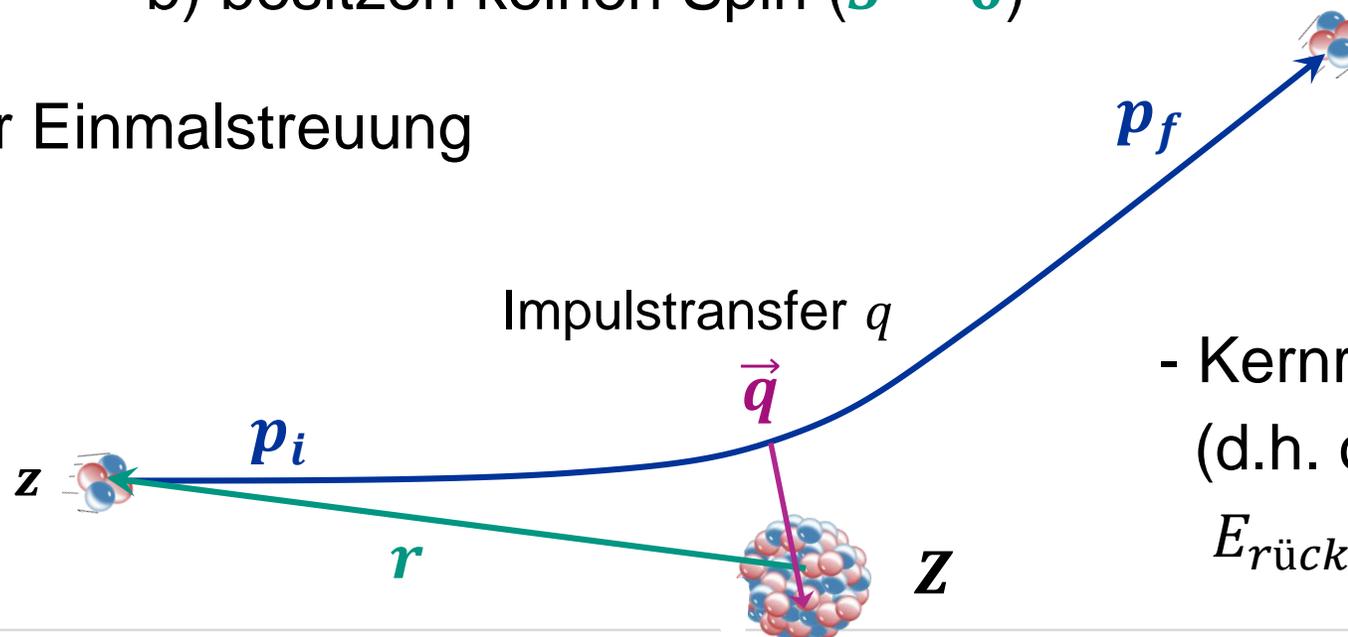
- Annahmen für Streuquerschnitt:

Projekt und Target

a) sind **punktförmig**

b) besitzen keinen Spin ( $S = 0$ )

- nur Einmalstreuung



- Kernrückstoß vernachlässigbar  
(d.h. ortsfester Kern mit Masse  $M$ )

$$E_{\text{rück}} = q^2 / (2 \cdot M) \approx 0$$



Q: sertec

# Rutherford-Streuprozess: Potenzial $V(r)$

## ■ Streupotenzial $V(r)$ für elektromagnetische Wechselwirkung

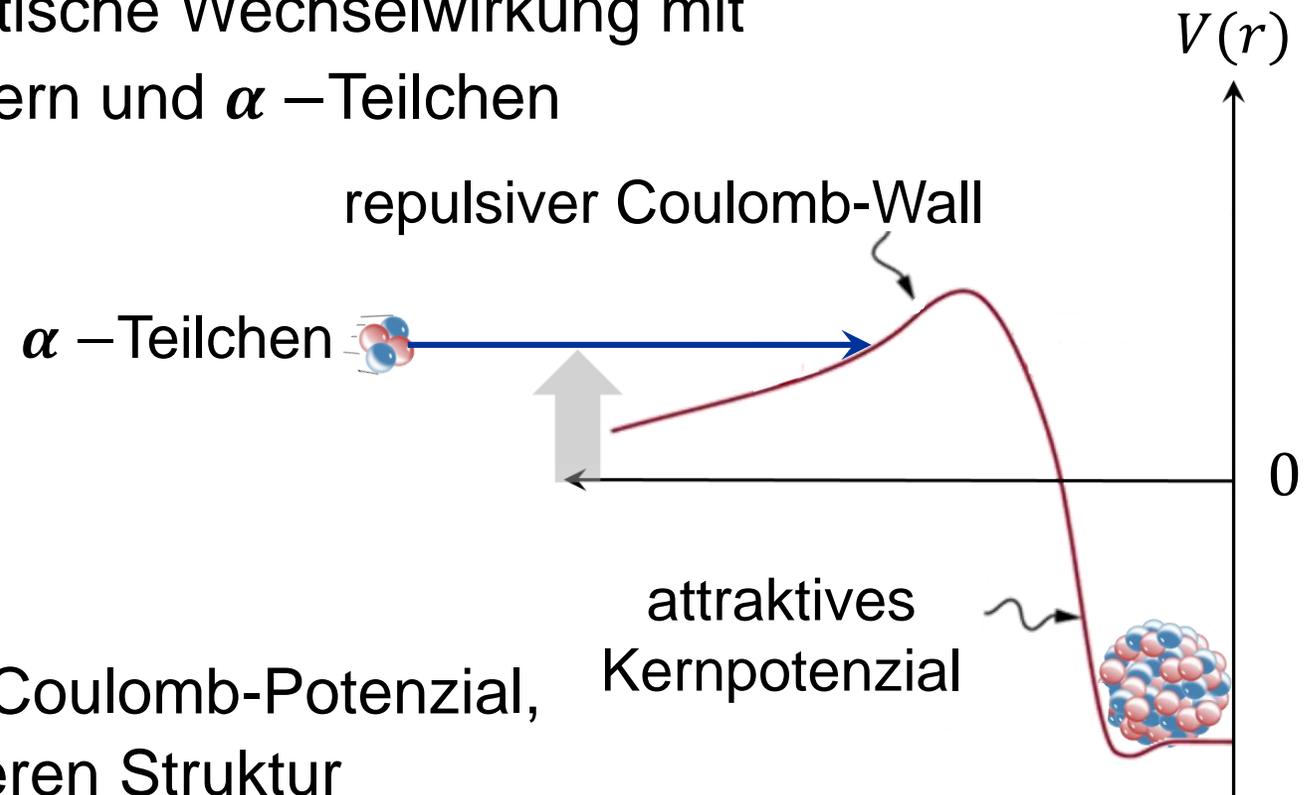
- elastische Streuung in **konservativem Feld**  $\Rightarrow$  Drehimpuls bleibt erhalten
- Annahme: rein elektromagnetische Wechselwirkung mit **Coulomb-Abstoßung** von Kern und  $\alpha$  – Teilchen

$$V(r) \sim \frac{z \cdot Z \cdot e^2}{r}$$

$$z = 2 \text{ (}\alpha \text{ – Teilchen)}$$

$$Z = 79 \text{ (Au – Kern)}$$

- $\alpha$  – Teilchen sieht nur  $1/r$  – Coulomb-Potenzial, nicht den Kern mit seiner inneren Struktur



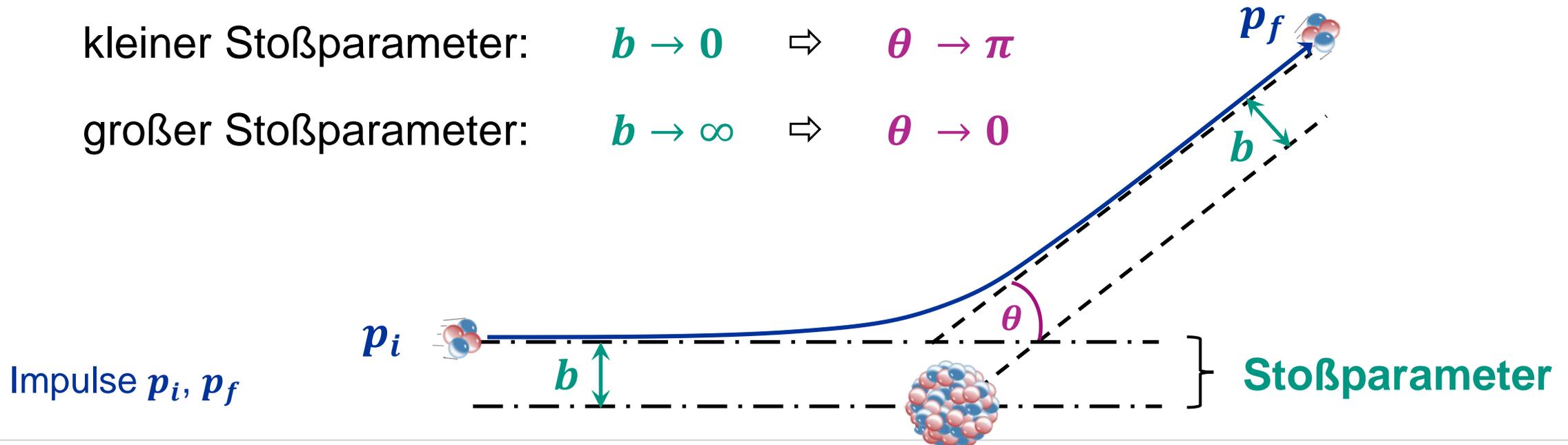
# Rutherford-Streuprozess: Kinematik

## ■ Kinematische Größen: $\theta$ , $b$

- elastische Streuung unter **Winkel  $\theta$**
- Einführung **Stoßparameter  $b$**  (legt den Streuwinkel  $\theta$  fest)  
= asymptotischer Abstand des  $\alpha$  – Teilchens vom Kern:  $b = [0, \infty]$

kleiner Stoßparameter:  $b \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \rightarrow \pi$

großer Stoßparameter:  $b \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow 0$



# Rutherford-Streuformel

## ■ Streuexperimente und differentieller Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma/d\Omega \sim 1/\sin^4(\theta/2)$$

Kinematik



$$q = 2 p \cdot \sin(\theta/2)$$

Impulstransfer  
an Kern



Impuls des  $\alpha$

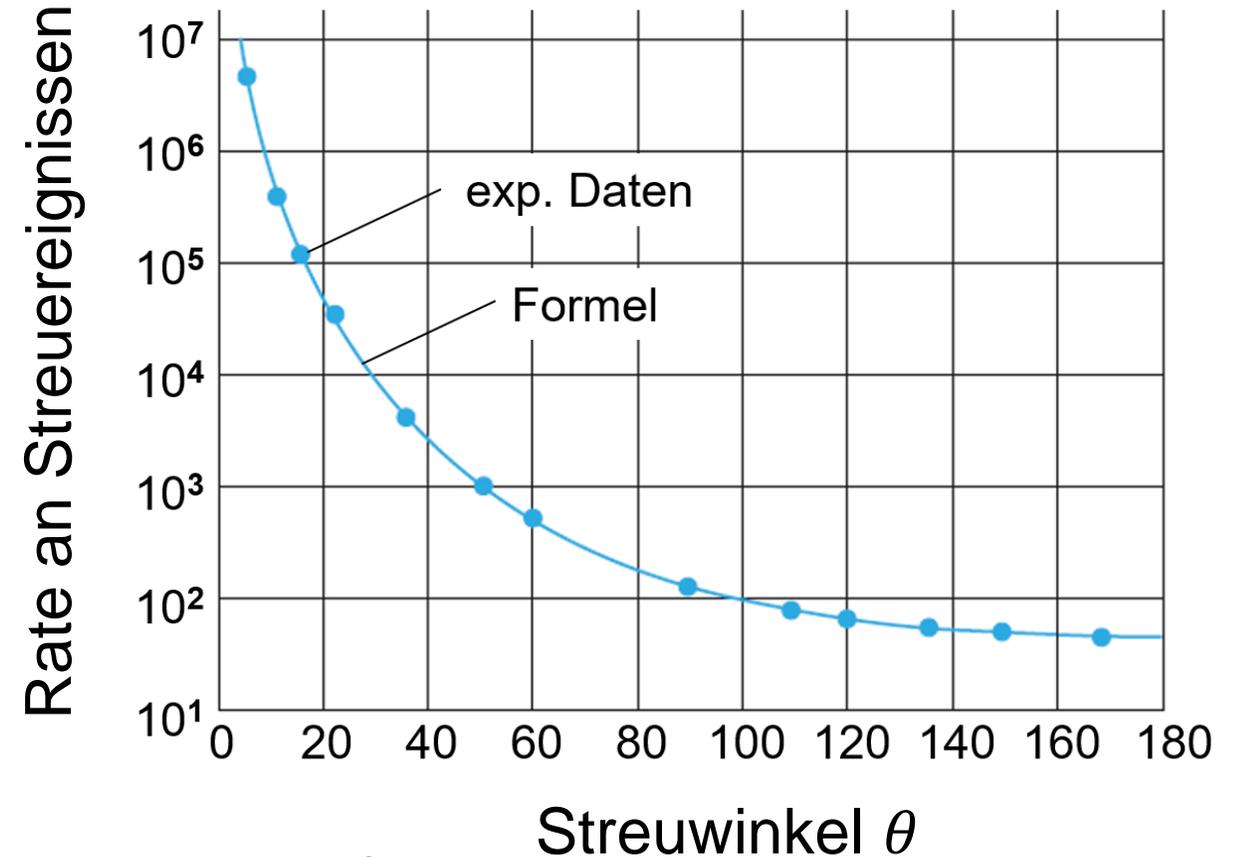


Streuwinkel



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2 \cdot m_e \cdot Z \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

Feinstrukturkonstante  $\alpha \approx 1/137$



Q: Serway/Moses/Moyer

# Rutherford-Streuformel

- Streuung über Photonaustausch: elegant via Feynman-Diagramm!

R. Feynman



kommt  
später\*

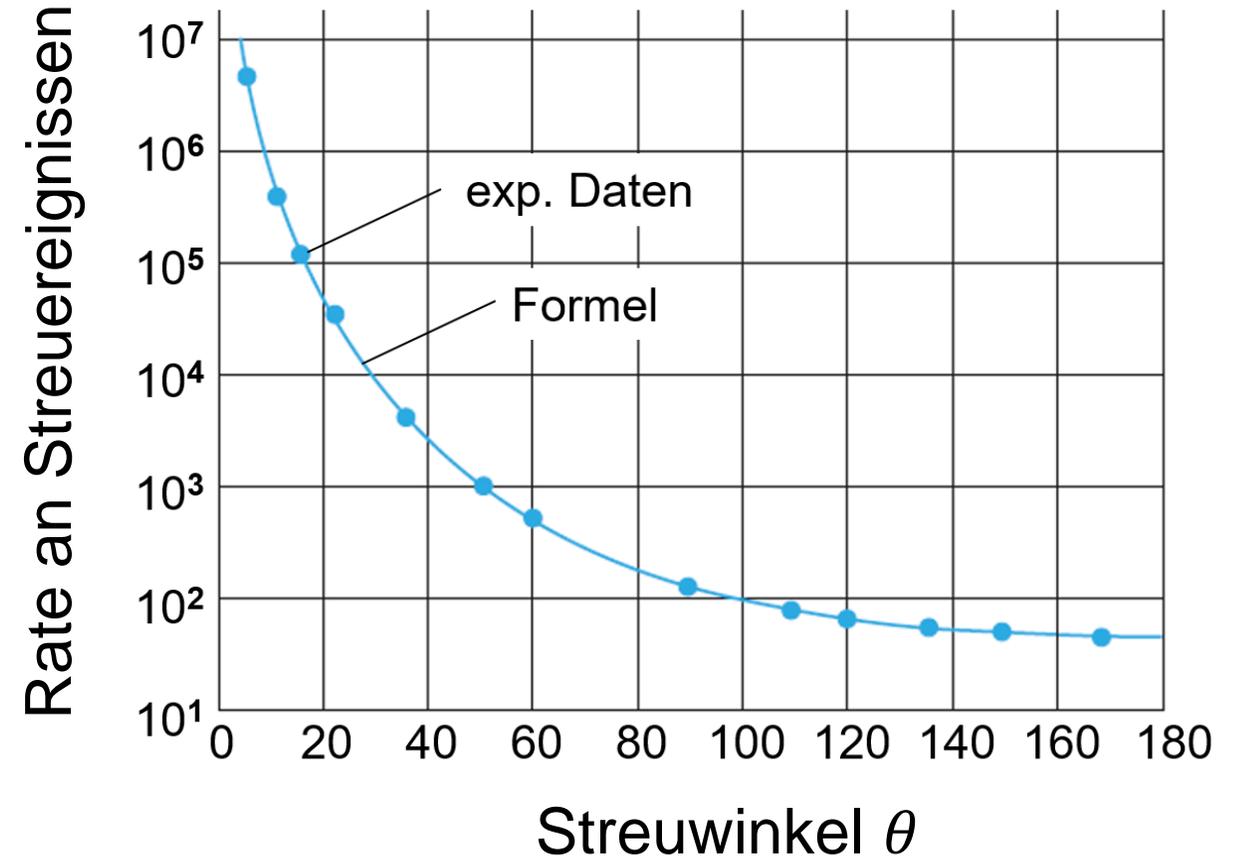
## Elektromagnet. Wechselwirkung

Photonpropagator

Kopplungskonstante  $\alpha$



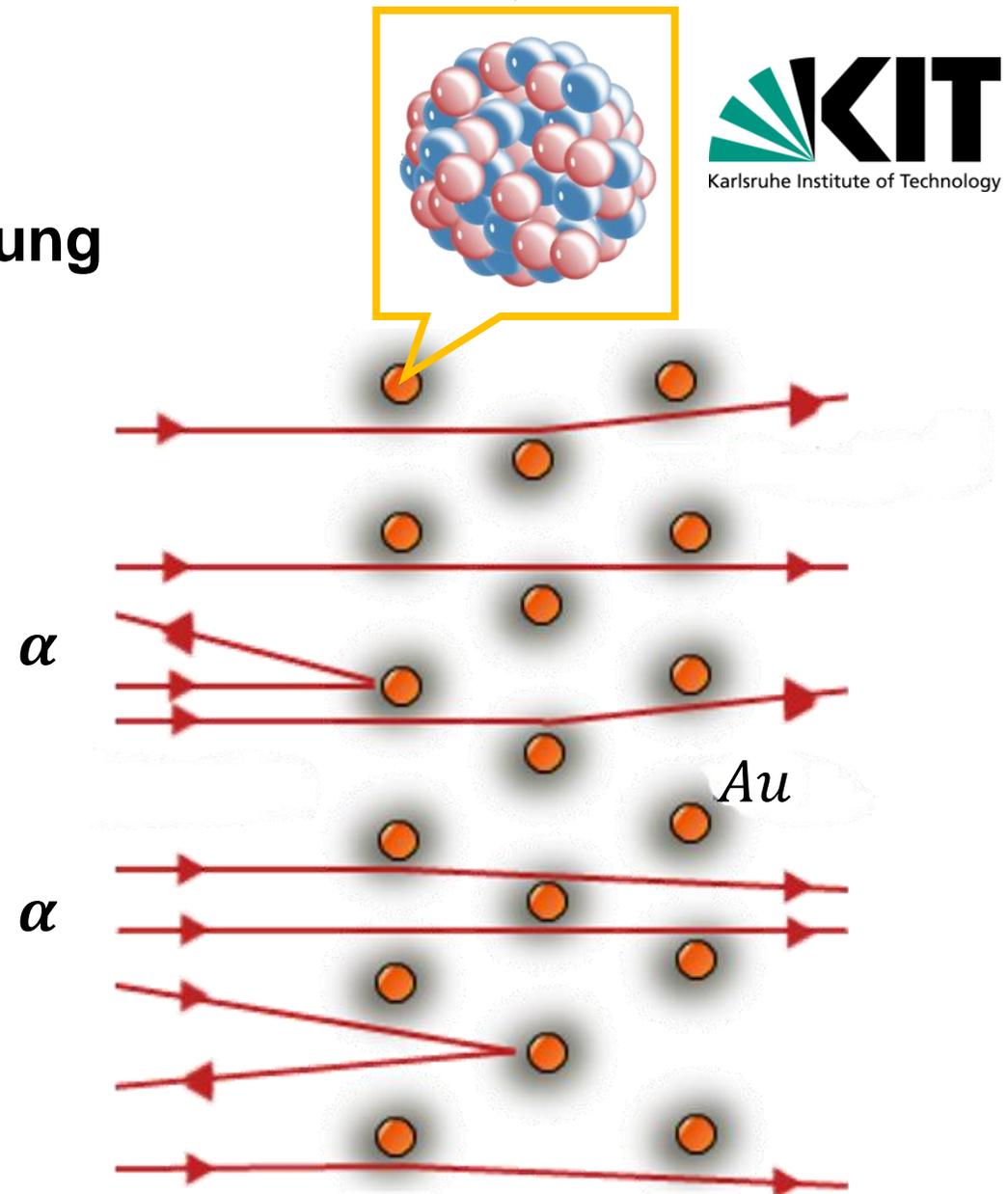
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2 \cdot m_e \cdot Z \cdot \alpha)^2 \cdot \frac{1}{q^4}$$

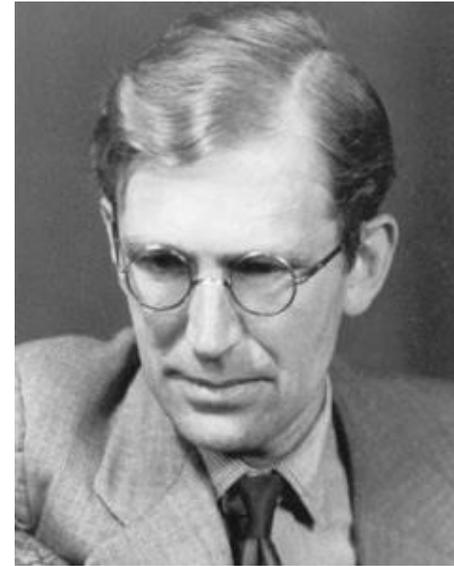
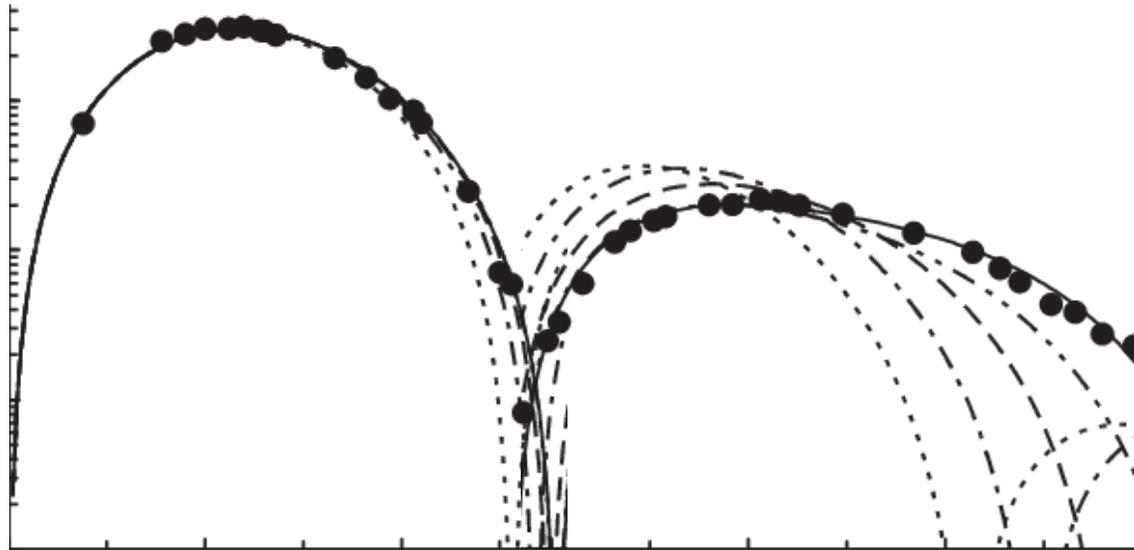


# Rutherford-Streuung & Kerne

## ■ Streuexperimente und räumliche Auflösung

- die Winkelverteilung  $d\sigma/d\Omega$  der Rutherford-Streuung gibt keinen **Aufschluss** über die Größe der Kerne
- Streuung erfolgt nur am **Coulomb-Potenzial des punktförmigen Kerns**
- Energie der  $\alpha$  – Teilchen von  $4 - 6 \text{ MeV}$  ist zu klein, um endliche Kerngröße aufzulösen





Q: U of Bristol, IoP

# KAPITEL 2.2 – MOTT-STREUUNG & FORMFAKTOREN

# Streuprozesse jenseits von Rutherford

## ■ Berücksichtigung weiterer Prozesse bei Streureaktionen

- bisher: elastische Streuung punktförmiger geladener **Teilchen ohne Spin** im nicht-relativistischen Grenzfall (kinet. Energien von  $\alpha's \sim MeV$ )  
**Coulombfeld eines punktförmigen Targets** (Kern ohne Ausdehnung)
- **Mott:** Streuung von Projektilen mit **Spin  $S = 1/2$**  ( $e, \mu, \nu, p, \dots$ )  
Streuung in **relativistischer Kinematik** ( $e$ : kleine Masse, hohe Energie)
- **Formfaktor:**  
Streuung an **ausgedehnten Objekten** (Kerne mit Ladungsverteilung)  
erforderlich  $\Rightarrow$  de Broglie Wellenlänge  $\lambda = h/p$   
vergleichbar mit Kernradius  $R$

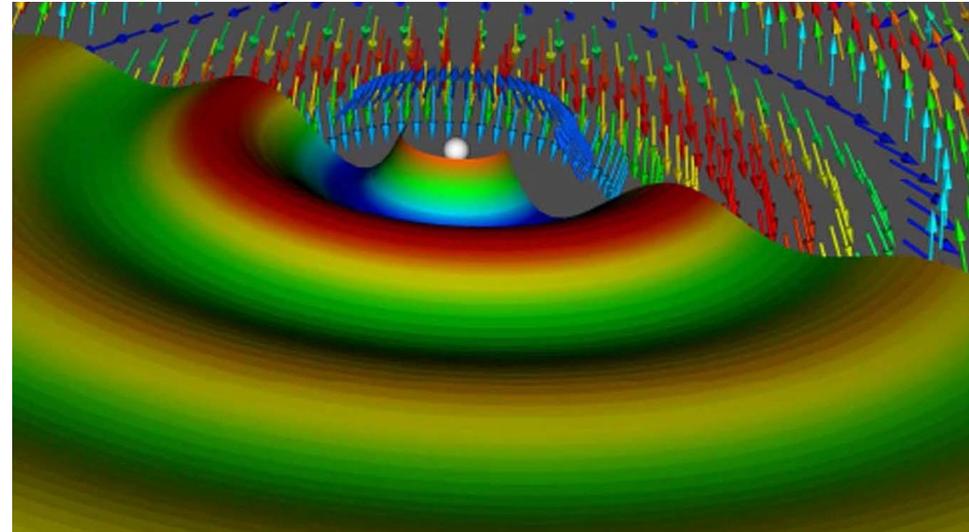
# Streuprozesse jenseits von Rutherford

## ■ Wellencharakter der Streuteilchen

Wellencharakter definiert die erreichbare Auflösung bei der Analyse kleinster Strukturen



Q: FZ Jülich



kleine Wellenlänge  
großer Impuls  
 $\lambda = h/p$   
Visualisierung einer Elektronwelle

### - Formfaktor:

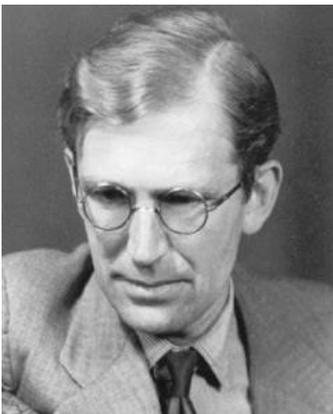
Streuung an **ausgedehnten Objekten** (Kerne mit Ladungsverteilung) erforderlich  $\Rightarrow$  de Broglie Wellenlänge  $\lambda = h/p$  vergleichbar mit Kernradius  $R$

# Mott-Streuung und Formfaktoren

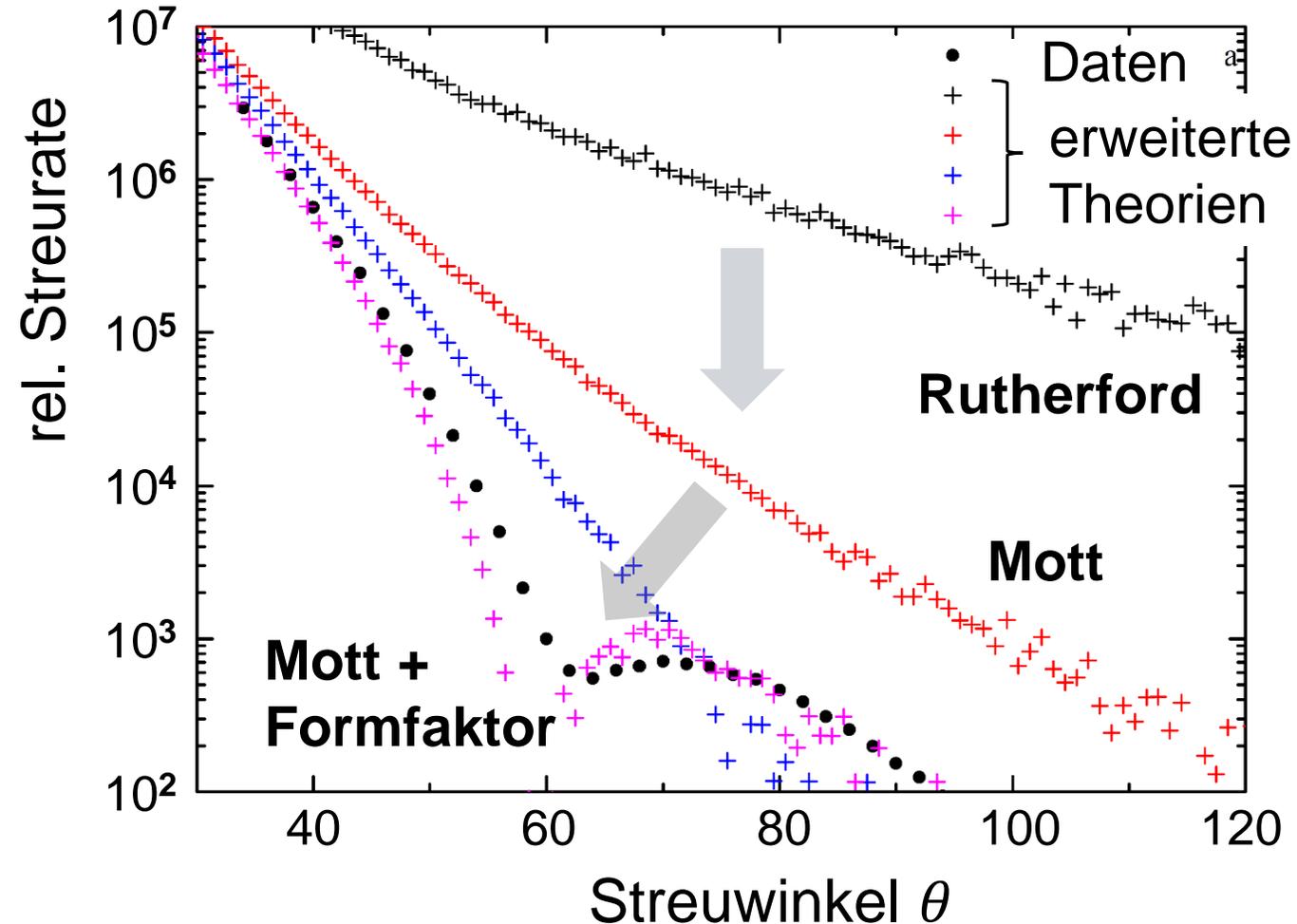
## ■ Berücksichtigung weiterer Effekte für $d\sigma/d\Omega$

$d\sigma/d\Omega$  gibt Aufschluss über:

- **innere Struktur** des Targets
- **Struktur der Wechselwirkung**
  - Radialabhängigkeit
  - Spin-Abhängigkeit, ...



*Nevill F. Mott*



# Einfluss des Spins des Projektils (Elektronen)

## ■ Spineffekte bei Streuprozessen: Übergang zur Elektronenstreuung

- bei **longitudinal polarisierten** Elektronen müsste bei einer Rückstreuung ( $\theta = 180^\circ$ ) der Spin  $S$  umklappen:

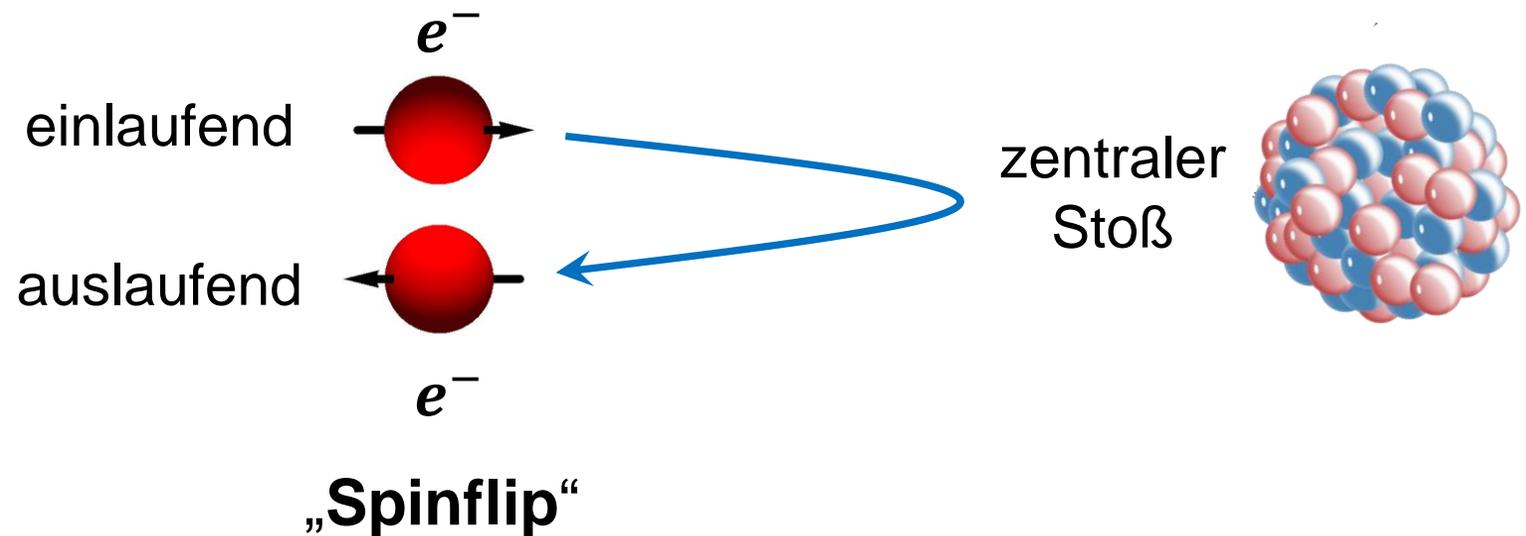
⇒ **starke Unterdrückung der Streuamplitude für Rückwärtsstreuung!**

## Elektronenstreuung:

- leichtes Teilchen mit Spin  $S = 1/2$



relativistische & Spin-Effekte



# Mott-Streuung: Effekte

## ■ Streuung relativistischer Elektronen mit Spin

- Streuung hochenergetischer, relativistischer Spin  $S = \frac{1}{2}$  Teilchen (Elektronen) an einem **punktförmigem Target**:
  - relativistische Effekte
  - übertragene Rückstoß-Energie an Kern
  - **Spin-Bahn Kopplung** bei Streuprozessen mit polarisierten  $e^-$
  - Wechselwirkung über magnetisches Dipol-Moment  $\mu$  des Projektils (´magnetischer Streuterm´)

# Mott-Streuung: Wirkungsquerschnitt

- Streuung relativistischer Elektronen: Energie  $E$  (ein)  $\rightarrow E'$  (aus) mit Spin

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{R'ford} \cdot \frac{E'}{E} \cdot \left(1 - \beta^2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \sim \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$$

↑  
Kern-  
rückstoß

↑  
Elektron-  
Spin

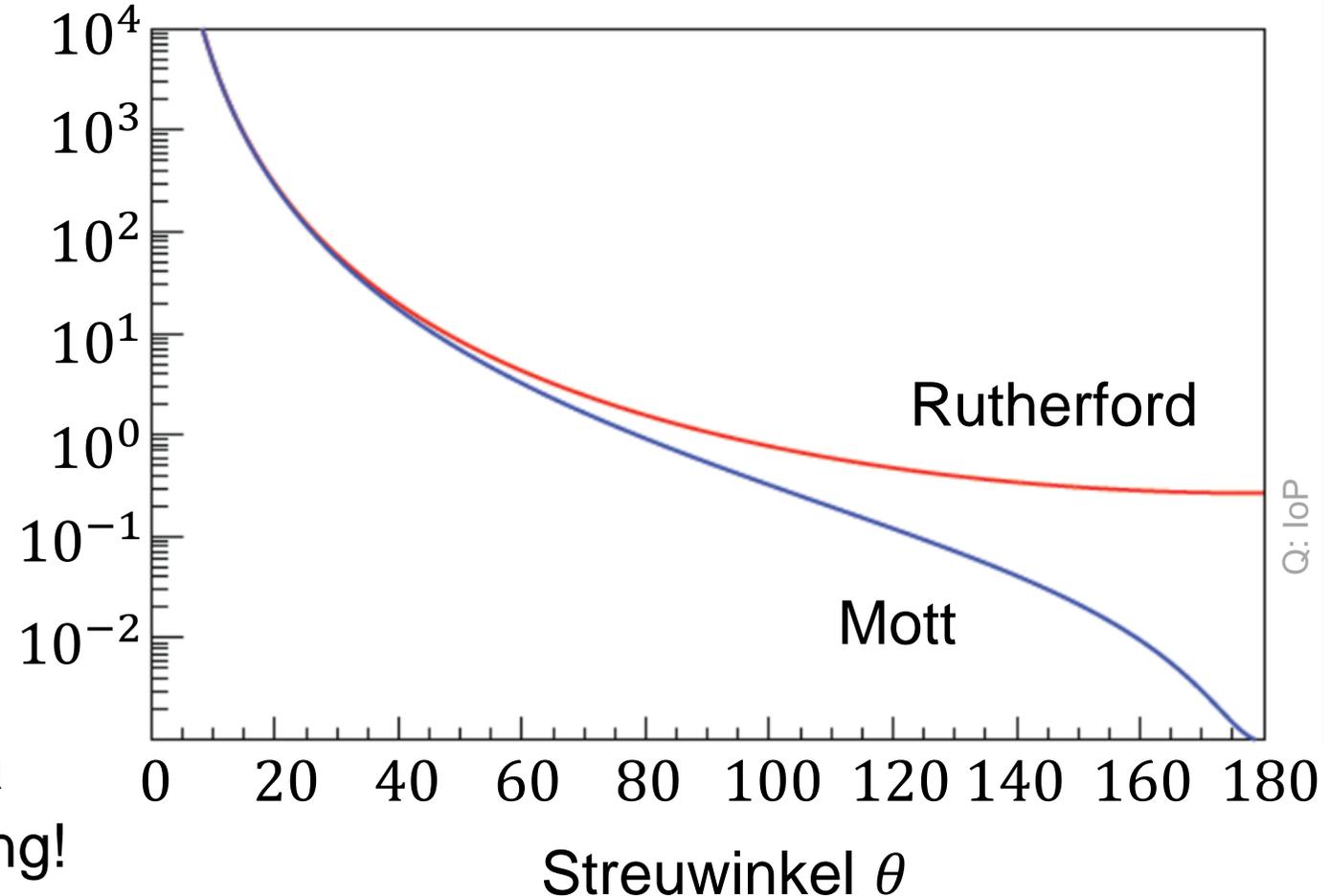
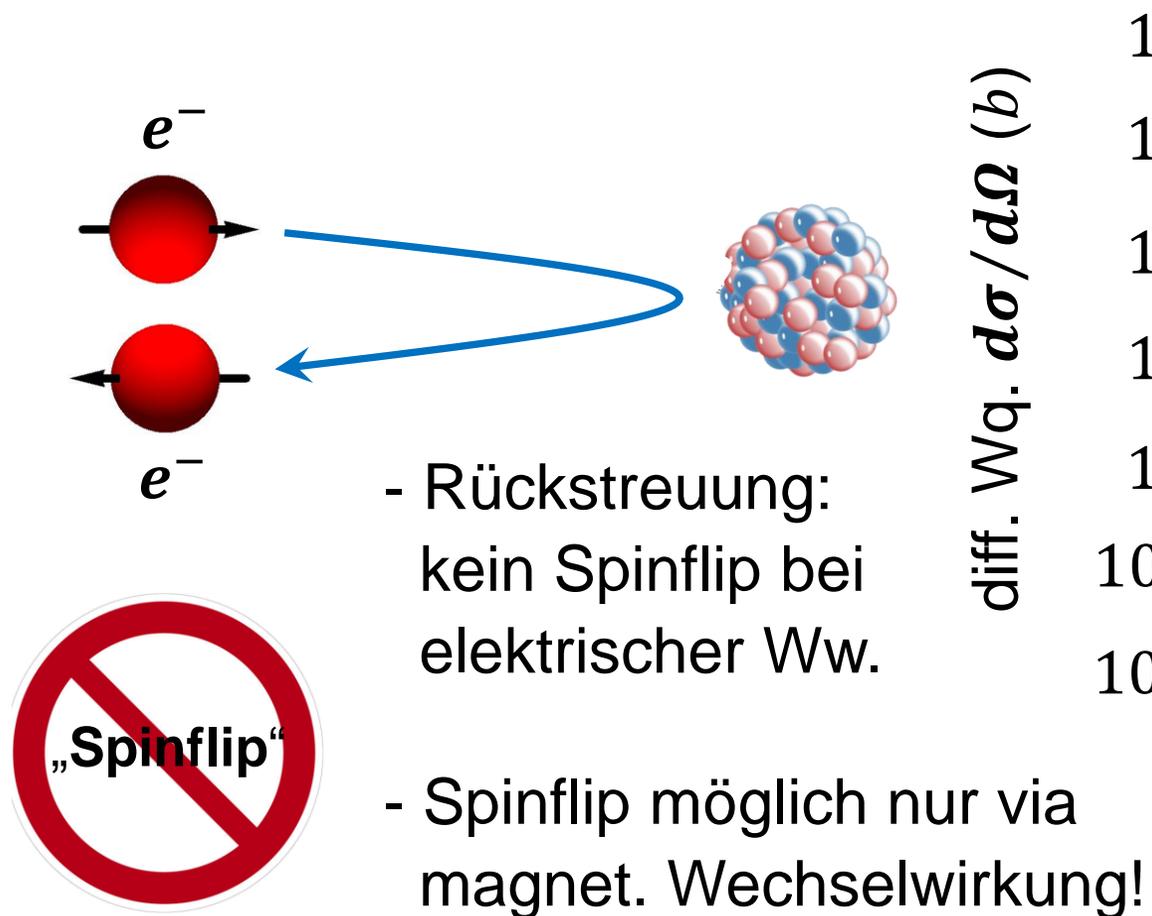
für  
 $\beta \rightarrow 1$

für Rückstreuung  
 $\theta \rightarrow \pi$  :  
 $\cos^2(\pi/2) \rightarrow 0$

- Unterdrückung der Rückwärts-Streuung für  $S = \frac{1}{2}$  Projektile ( $e, \mu, p, \dots$ )  
d.h.  $d\sigma/d\Omega$  deutlich kleiner für große Streuwinkel  $\theta \rightarrow \pi$

# Mott-Streuung: Wirkungsquerschnitt

## ■ Beispiel: Streuung von 6 MeV Elektronen an einem Gold-Kern



# de-Broglie-Wellenlänge $\lambda$

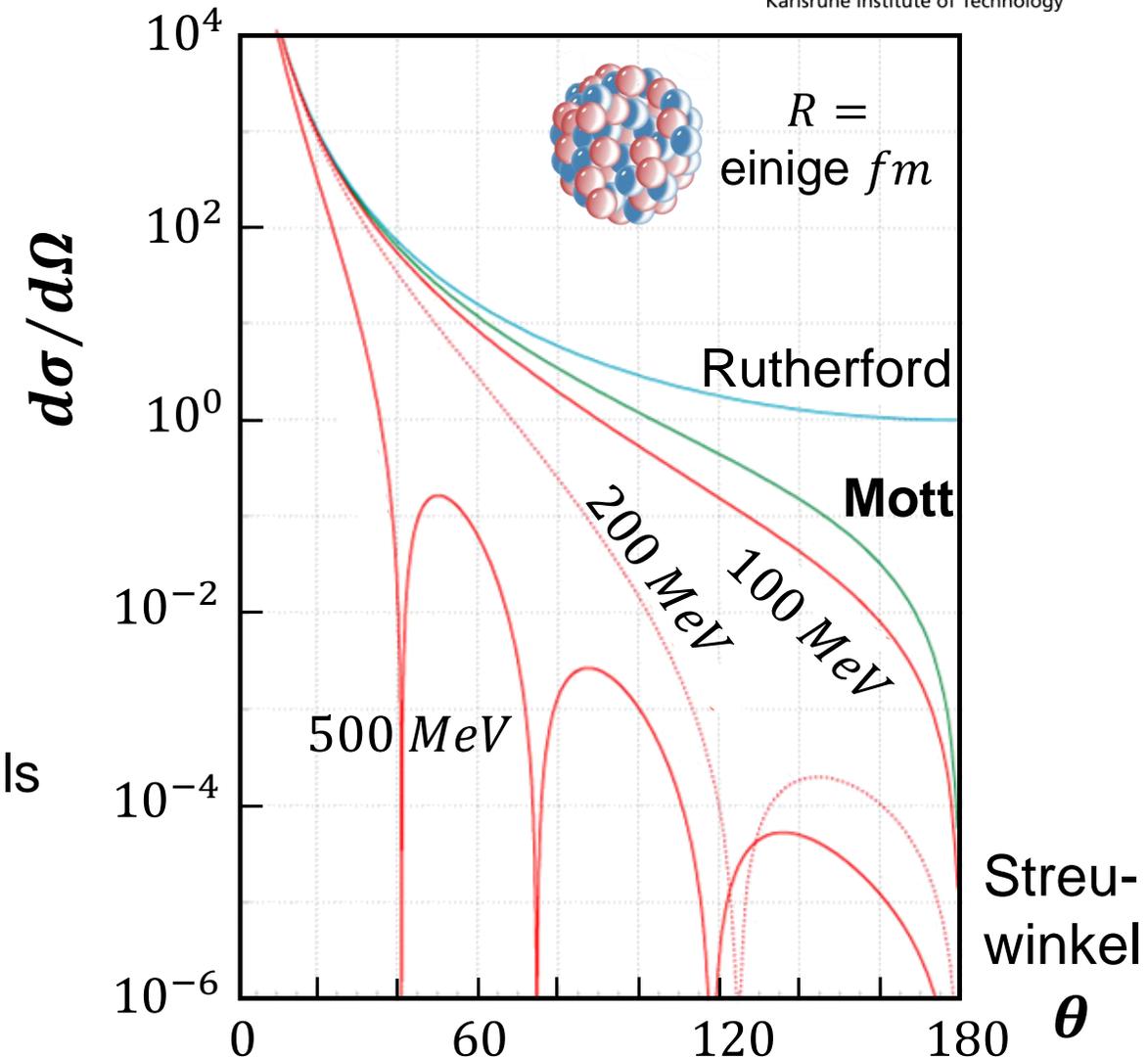
## ■ Experimentelle Abweichungen bei hohem Impulstransfer $|\vec{q}|$

- Mott-Streuformel: nur korrekt für kleinen Impulstransfer  $|\vec{q}|$  ( $\theta \rightarrow 0$ )
- höhere Elektron-Energien/Impulse  $p$ : **de-Broglie Wellenlänge  $\lambda$**  wichtig

$$\lambda = \frac{2\pi \cdot \hbar}{p} = \frac{2\pi \cdot \hbar}{\gamma \cdot m \cdot v} \quad \begin{array}{l} \gamma = \text{Lorentzfaktor} \\ \gamma \cdot m \cdot v = \text{rel. Impuls} \end{array}$$

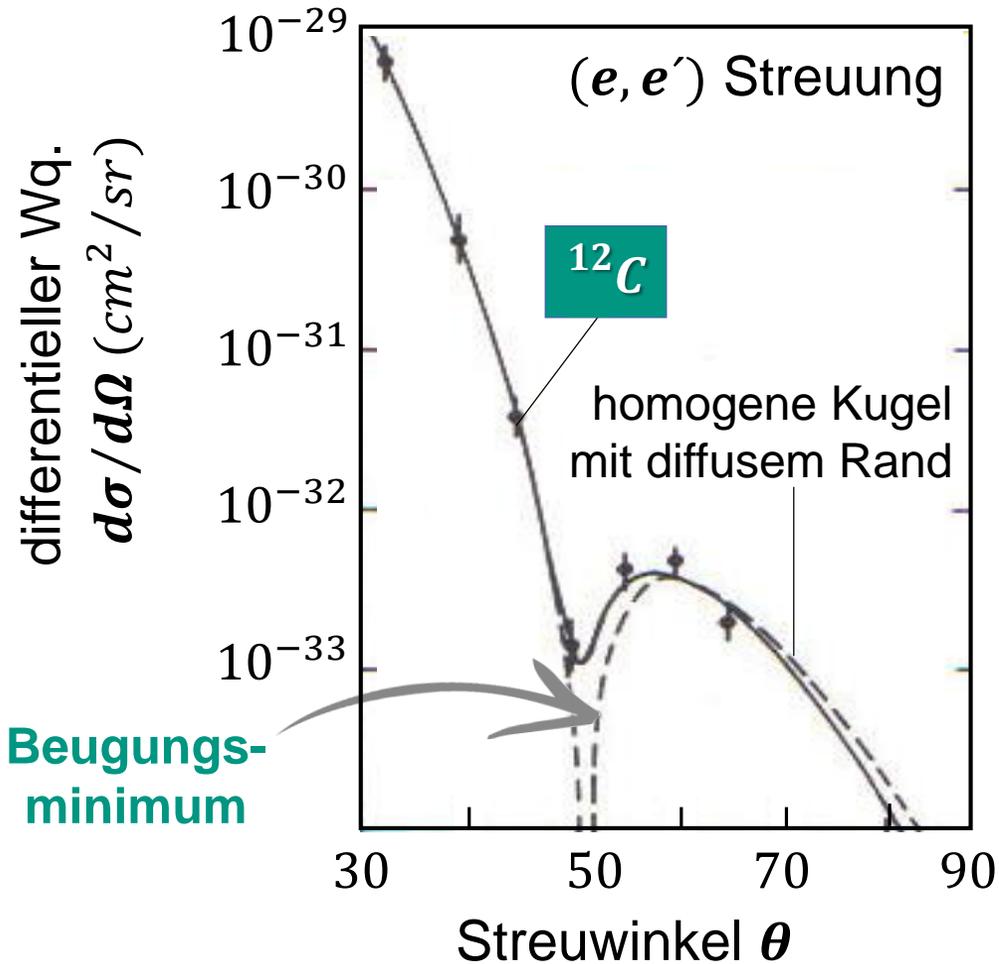
$\lambda$  (Projektil)  $\sim R$  (Kern)

$197 \text{ MeV}/c = 1 \text{ fm}^{-1}$  ←



# Einführung des Formfaktors $F$

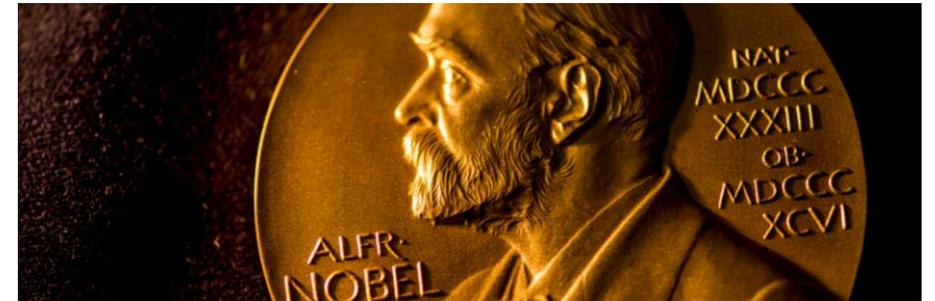
- R. Hofstadter findet Abweichungen bei  $420 \text{ MeV}$  – Elektronen auf  $^{12}\text{C}$



- 1961: R. Hofstadter - Elektronstreuung



Q: nobelprize



- Beschreibung durch den Formfaktor  $F$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

$\vec{q}$  Impulstransfer

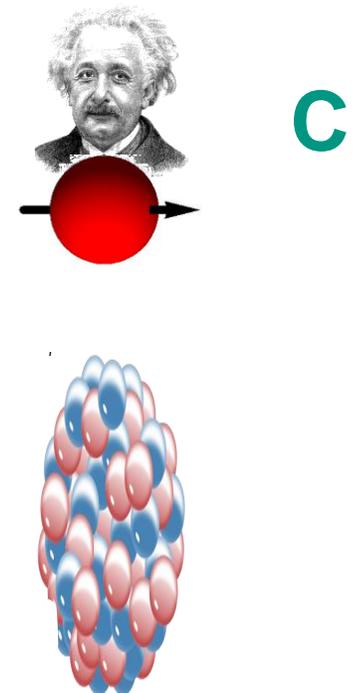
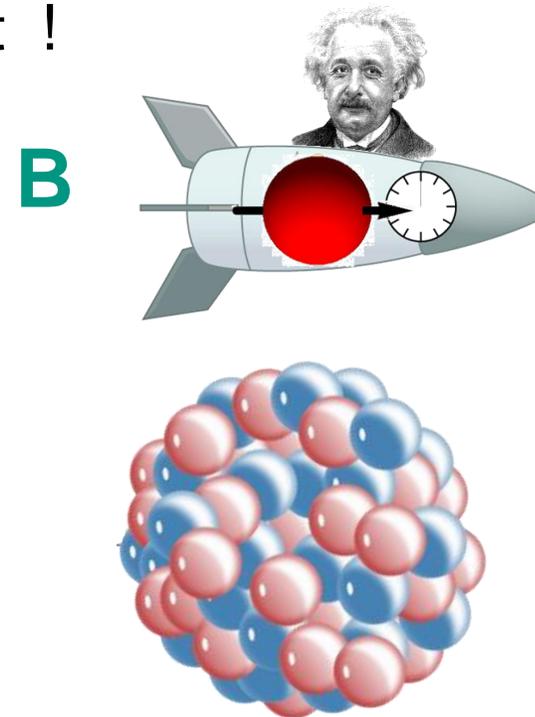
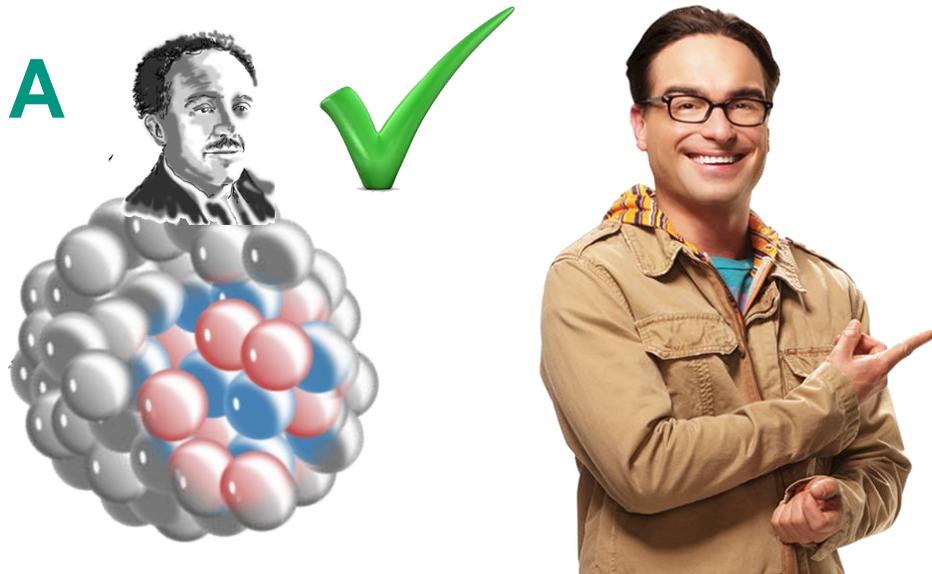
# Streuquerschnitt – nachgefragt von L. Hofstadter

■ Wieso wird  $d\sigma/d\Omega$  immer kleiner für hohe Energien ? Da dann...

A) ...nur ein kleinerer Teil des Kerns sichtbar ist !

B) ... die Zeit für das relativistische Elektron anders läuft !

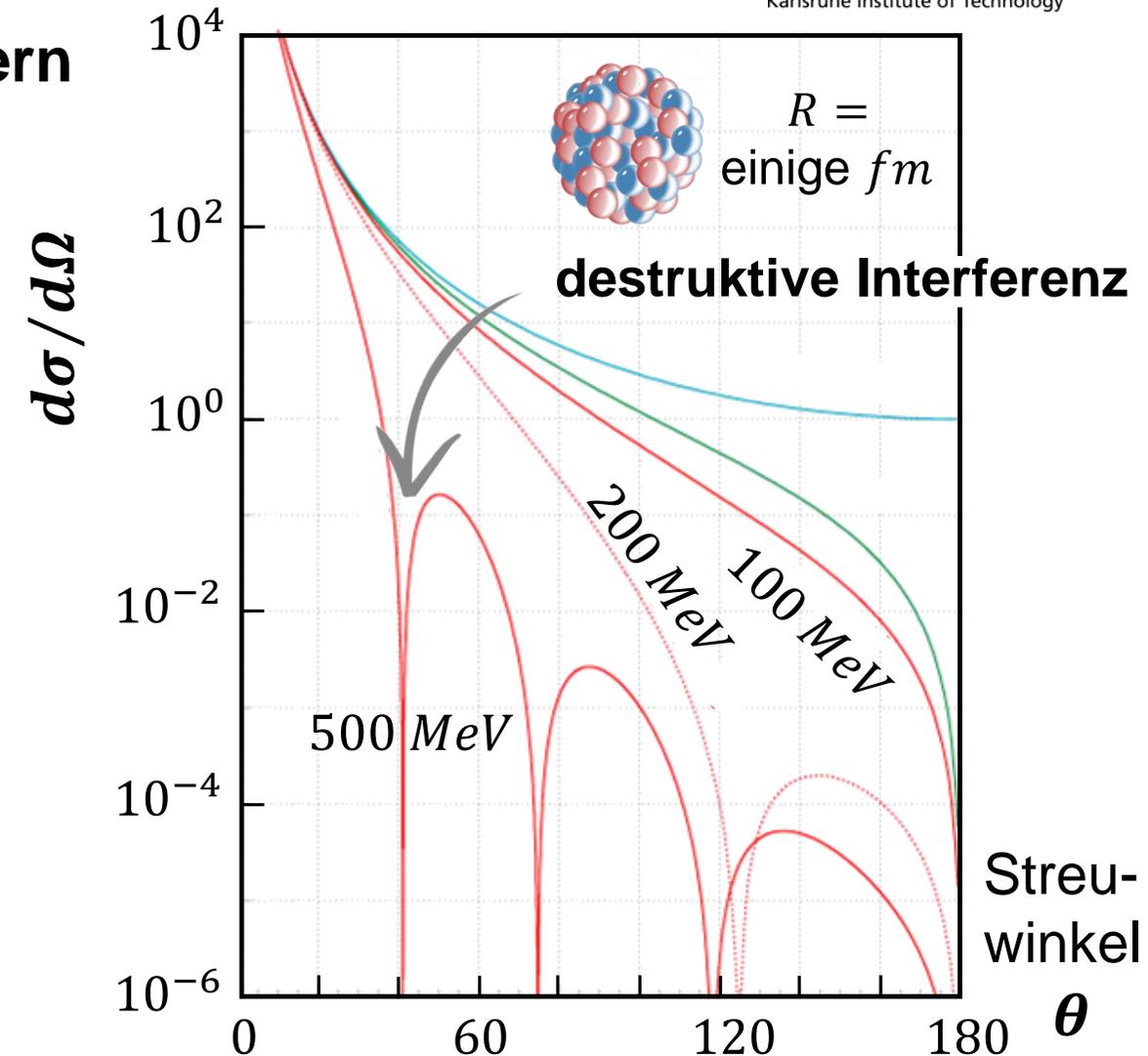
C) ... der Kern gestaucht erscheint !



# Grundlage: Beugung am Kern

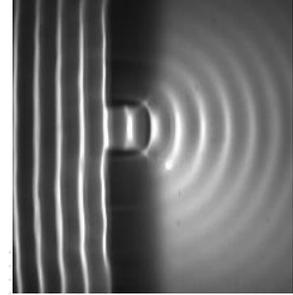
## ■ Beugungseffekte am ausgedehnten Kern

- hochenergetisches Elektron  
‘tastet’ Kerngröße ( $R \sim fm$ ) ab
- **Reduktion von  $d\sigma/d\Omega$** : das  $e^-$  sieht nur ‘einen Teil’ der Kernladung  $Z$
- Auftreten von **Interferenzen**:  
Elektron-Welle wird am endlichen Kernrand gebeugt: destruktive Interferenz (s. Doppelspalt)  
⇒ **Bestimmung des Kernradius  $R$**



# Formfaktor und Ladungsverteilung: Relation

## ■ Formfaktor $F$ = Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung $\rho(r)$



### - Born'sche Näherung:

Beugung einer ebenen Welle an einer **Scheibe mit diffusem Rand**

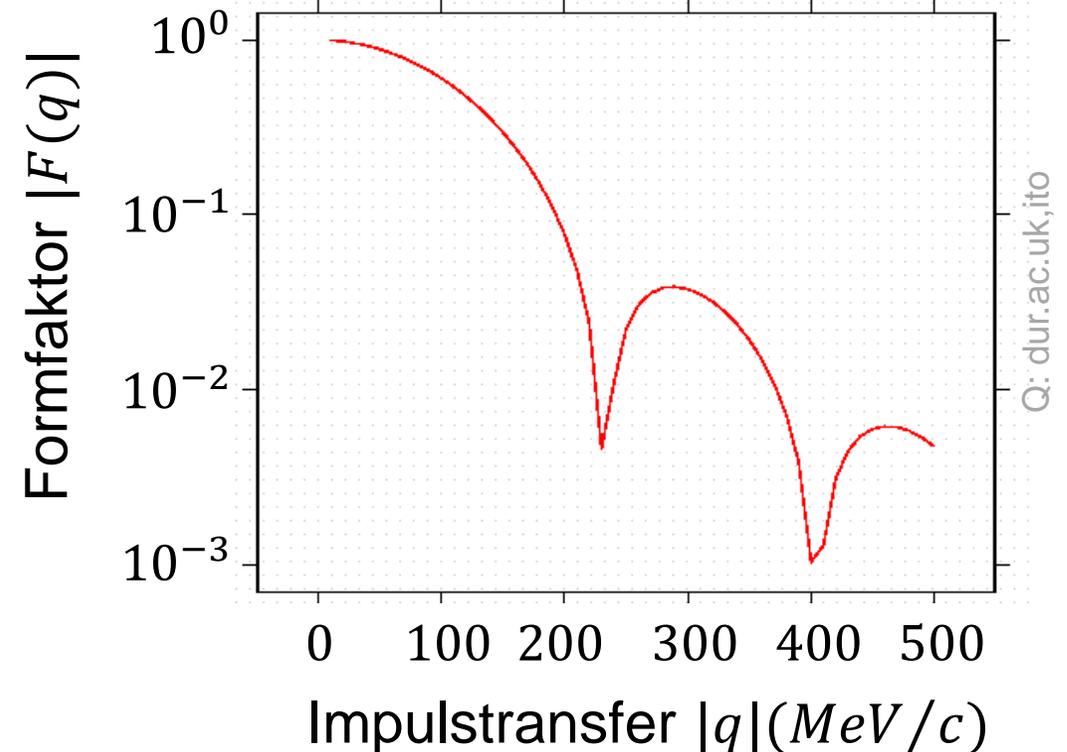
### - Formfaktor $F$

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{(i/\hbar)\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$



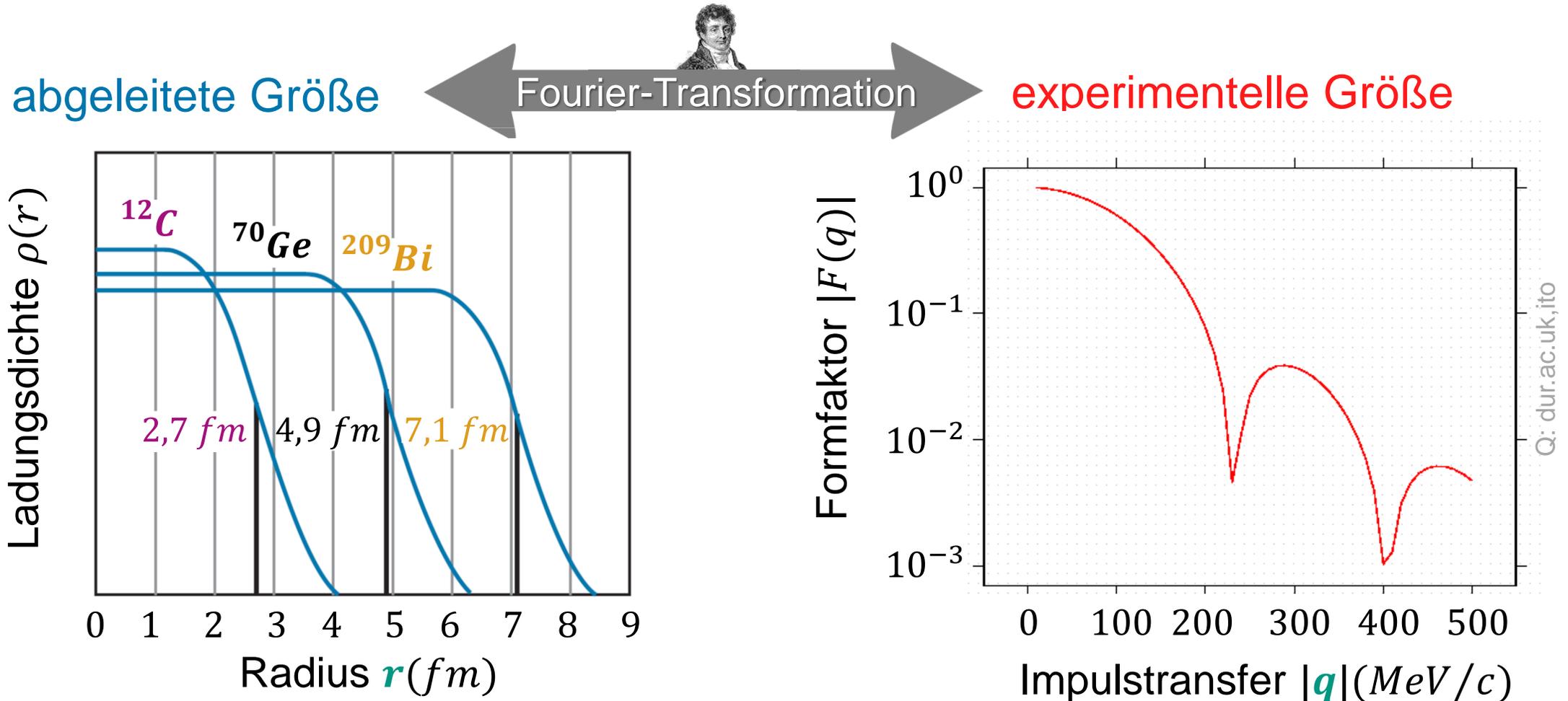
Ladungsverteilung des Kerns

mit  $\int \rho(r) d^3\vec{r} = 1$



# Formfaktor und Ladungsverteilung: Daten

- Formfaktor  $F =$  Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung  $\rho(r)$



# Formfaktor $F$ und Ladungsverteilung $\rho$

## Beispiele

**punktförmig**

$$\rho(r) = \delta(r)/4\pi$$

**exponentiell**

$$\rho(r) \sim \exp(-r/a)$$

**gaußförmig**

$$\rho(r) \sim a^{-3} \cdot \exp(-r^2/2a^2)$$

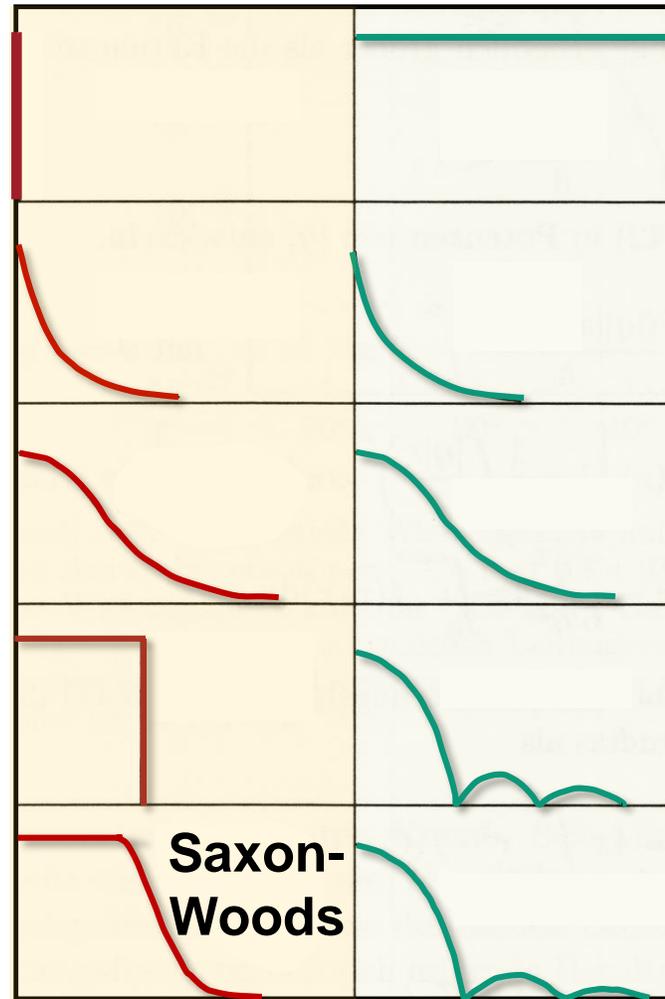
**homogene Kugel**

$$\rho(r) = \text{const.} (r < a)$$

$$\rho(r) = 0 (r \geq a)$$

**Kugel mit  
diffusem Rand**

$$\rho(r) = r_0 / \left[ 1 + \exp\left(\frac{r-a}{d}\right) \right]$$



Radius  $r \rightarrow$  Impuls  $|q| \rightarrow$

**konstant**

$$F = 1$$

**Dipol**

$$F = 1 / (1 + a^2 \cdot q^2)^2$$

**gaußförmig**

$$F = \exp(-1/2 \cdot a^2 \cdot q^2)$$

**Oszillation**

$$F \sim \sin(a \cdot q) - a \cdot q \cdot \cos(a \cdot q)$$

**verwaschene Oszillation**

Ladungsverteilung  $\rho(r)$

Formfaktor  $|F(q)|$

Q: dur.ac.uk

# Woods-Saxon Parametrisierung

## ■ Woods-Saxon Ladungsverteilung

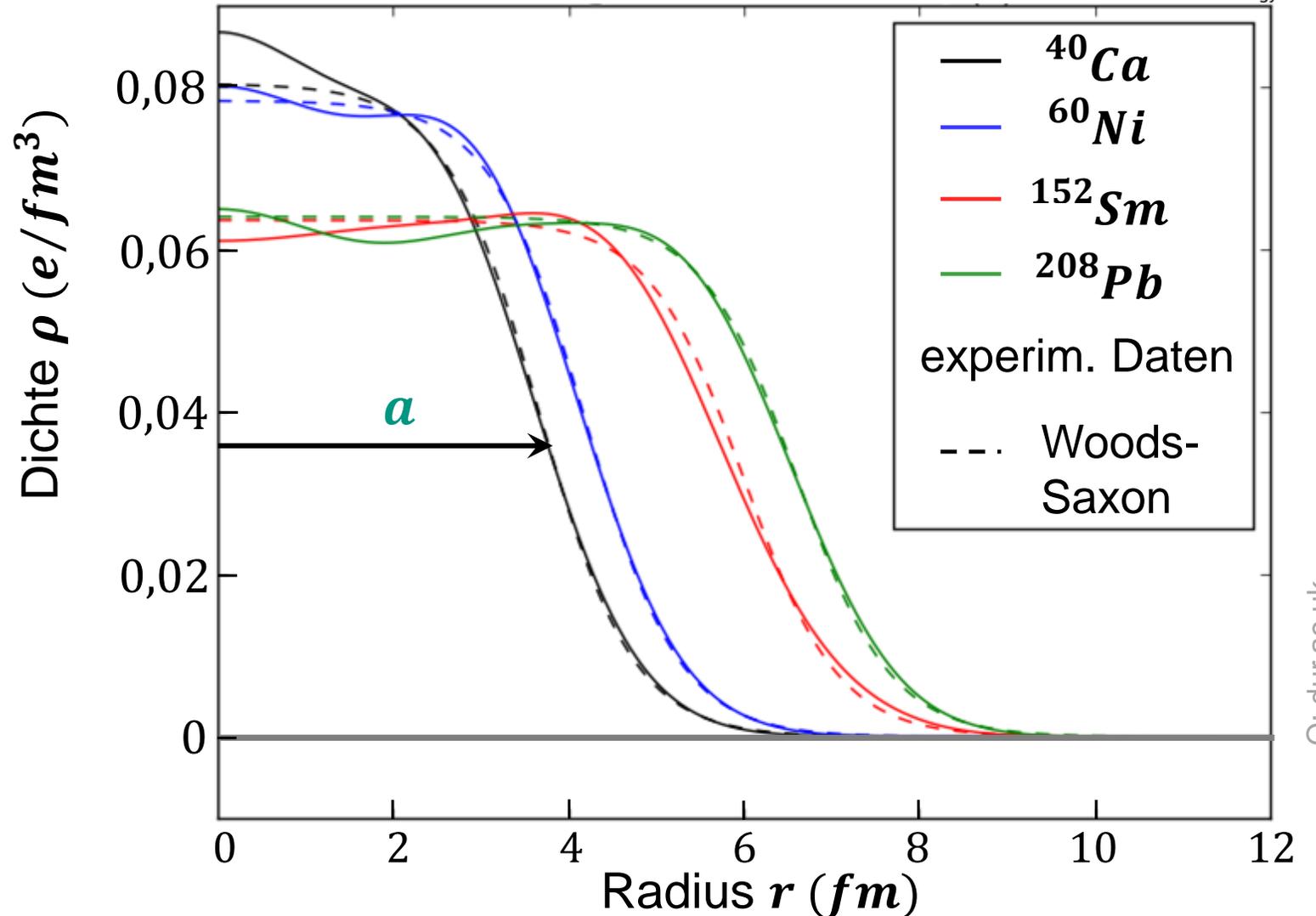
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(r-a)/d}}$$

Kernradius  $a$

$$a = (1,18 \cdot A^{1/3} - 0,48) fm$$

‘Skin’-Dicke  $d$

$$d = (0,55 \pm 0,07) fm$$



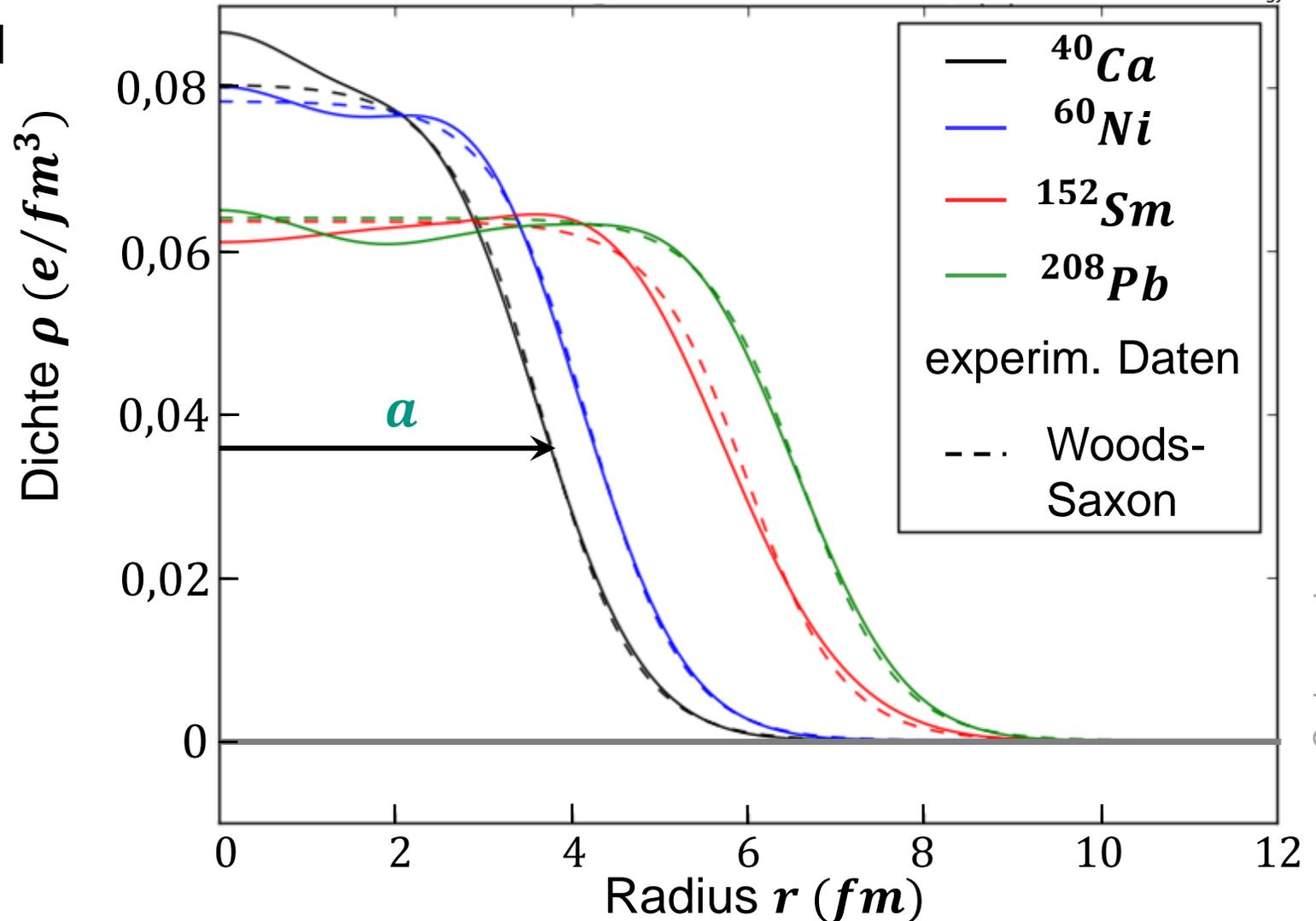
# Ladungsverteilungen: experimentelle Befunde

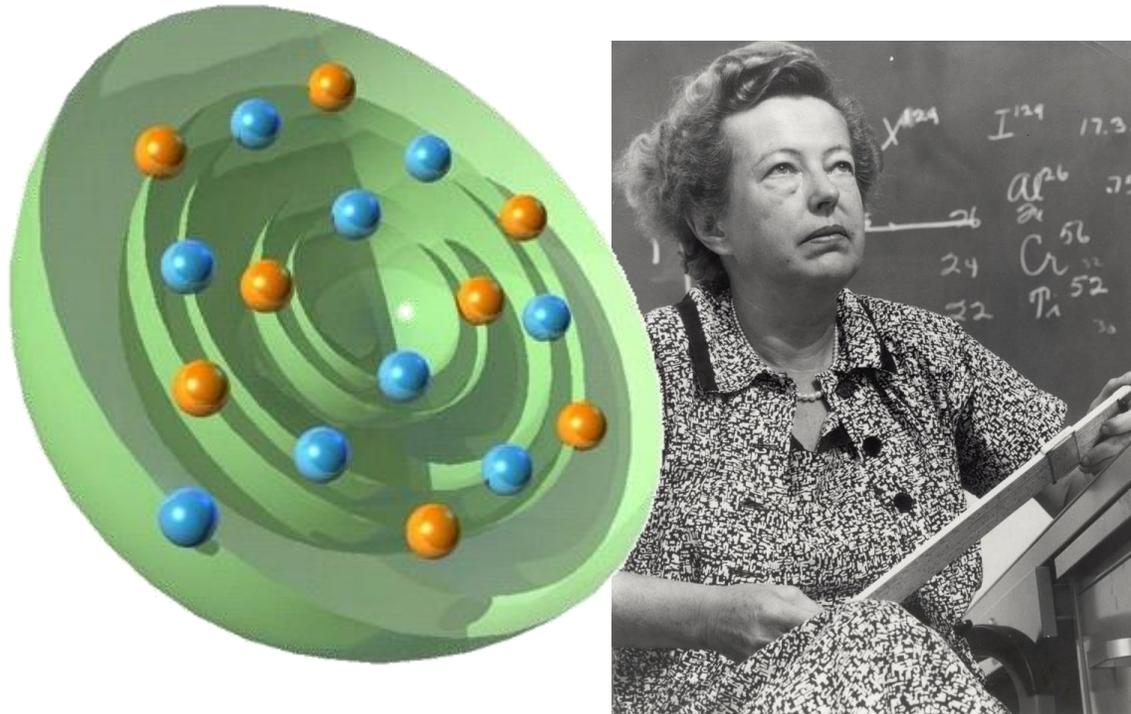
## ■ Modell: homogene Kugel mit diffusem Rand

- Kerne zeigen **konstante Ladungsdichte  $\rho(r)$**

⇒ **Kernkräfte zeigen Sättigungscharakter**

- Kerne zeigen stets einen sehr ähnlichen Abfall der Ladungsdichte außen (**Skindicke**)





Q: GSI, globo.com

# Kerne: Nuklidkarte & Begrifflichkeiten

## ■ Isotope, Isotone, Isobare & Spiegelkerne

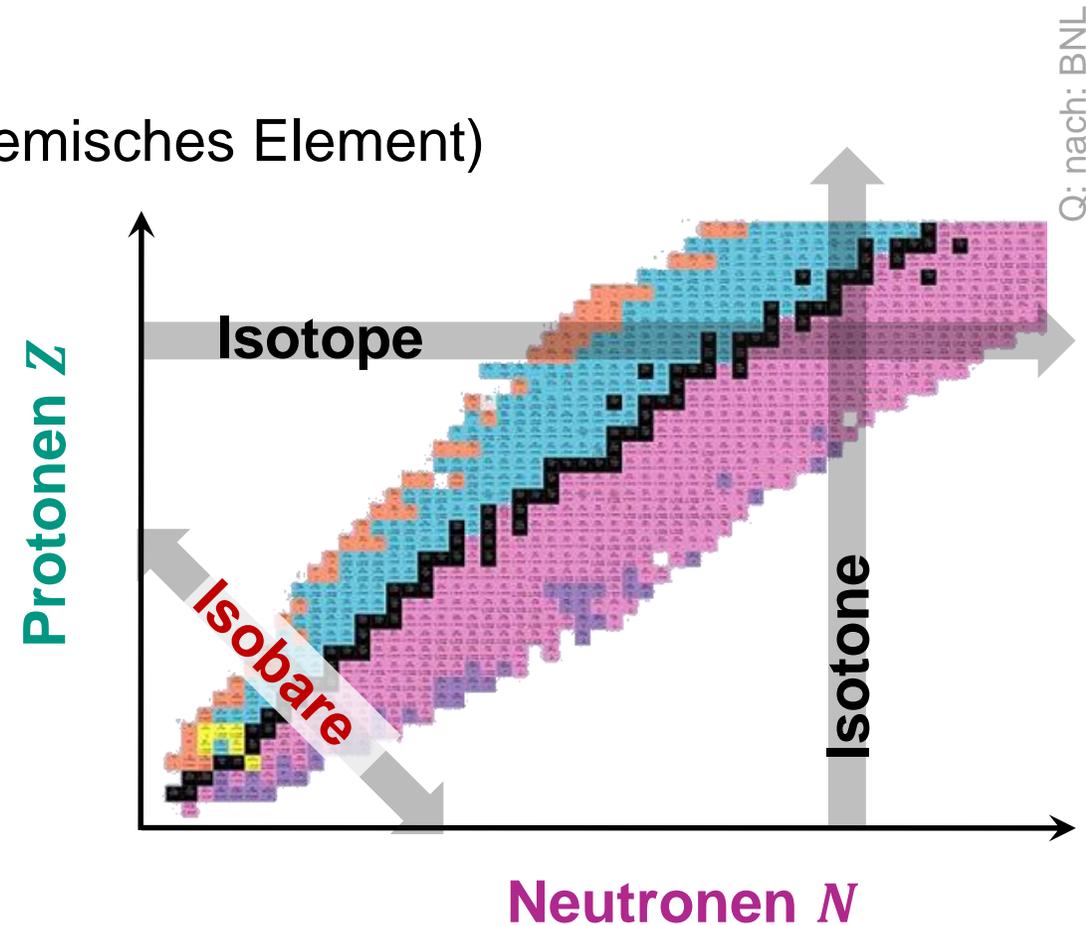
**Isotope** Kerne mit gleicher Protonenzahl  $Z$ ,  
 $^{124,126,128,129,130,131,132,134,136}_{54}\text{Xe}$  (ein chemisches Element)

**Isotone** Kerne mit gleicher Neutronenzahl  $N$ ,  
 $^{36}\text{S}_{20}$ ,  $^{37}\text{Cl}_{20}$ ,  $^{38}\text{Ar}_{20}$ ,  $^{39}\text{K}_{20}$

**Isobare** Kerne mit gleicher Nukleonenzahl  $A$ ,  
 $^{138}_{54}\text{Ba}$ ,  $^{138}_{57}\text{La}$ ,  $^{138}_{58}\text{Ce}$

**Spiegelkerne:** gleiches  $A =$   
 $Z_1 + N_1 = Z_2 + N_2$

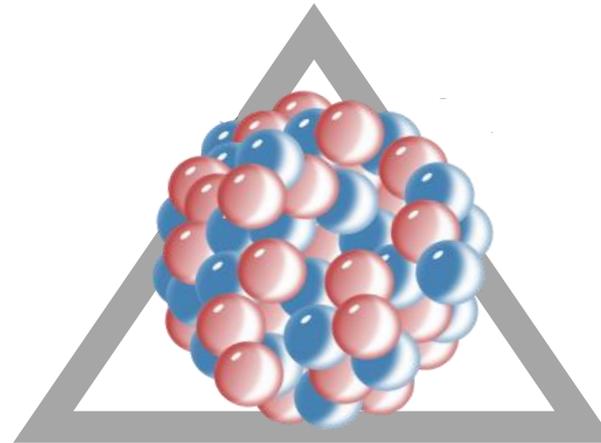
Bsp.:  $^{14}\text{C}(6p, 8n) \leftrightarrow ^{14}\text{O}(8p, 6n)$



# Kernmodelle - Einführung

- **Kern: komplexes Vielteilchensystem aus Nukleonen**
  - Kernkraft als **Restwechselwirkung** zwischen den Nukleonen:  
Ww. zwischen Nukleonen via **Quanten-Chromo-Dynamik (QCD)**, Details später
  - Ensemble an Nukleonen zu komplex, daher phänomenologische Modelle
  - Überblick über **phänomenologische Modelle\***

## Schalenmodell



**Tröpfchenmodell**

**Fermigasmodell**

## ■ Beschreibung der beobachteten Kerneigenschaften: Anpassung via Experim.

### - kollektive Eigenschaften:

Kernladung  $Z$ , Größe (Radius  $a$ ) und Form (sphärisch, deformiert),  
Kernmasse  $M$ , kollektive Anregungen (Riesenresonanz), Stabilität

### - Eigenschaften durch individuelle Nukleonen:

Bindungsenergie  $E_B/A$ , elektrische & magnetische Momente  $\mu$ ,  
Einteilchen-Anregungszustände (Resonanzen)  
Quantenzahlen: Spin  $J$  & Parität  $P$ , **Isospin**

### - dynamische Eigenschaften:

Ablauf & Wirkungsquerschnitte & Energiebilanz von Kernreaktionen  
wie Fusion, Spaltung, Nukleonttransfer, ...

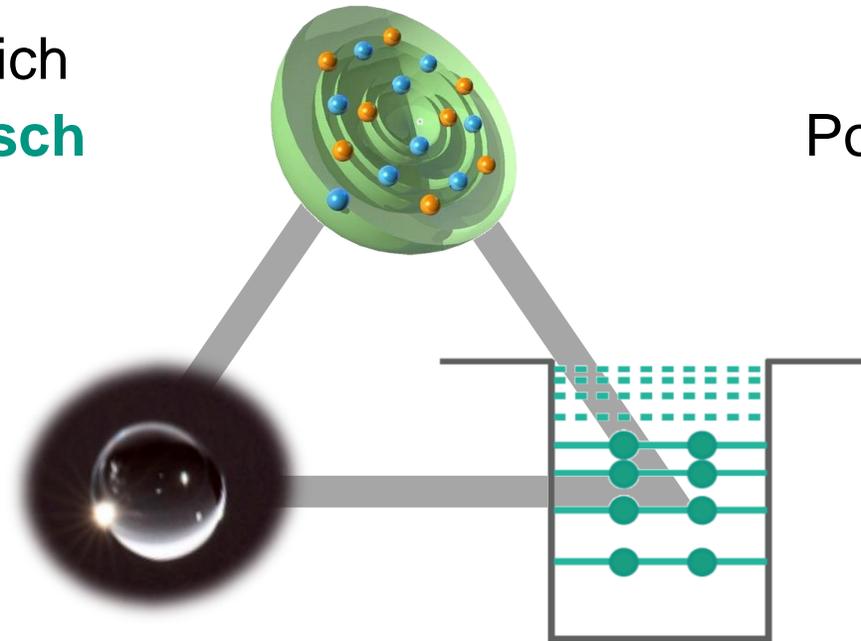
# Kernmodelle – Überblick\*

- Kernmodelle beschreiben immer spezielle Eigenschaften

## Schalenmodell

Nukleonen bewegen sich voll **quanten-mechanisch**

Schrödinger-Gleichung  
Potenzial mit **vielen Termen**



## Tröpfchenmodell

Kern in enger Analogie zu **geladenem Flüssigkeitstropfen**  
(quasi-klassisch)

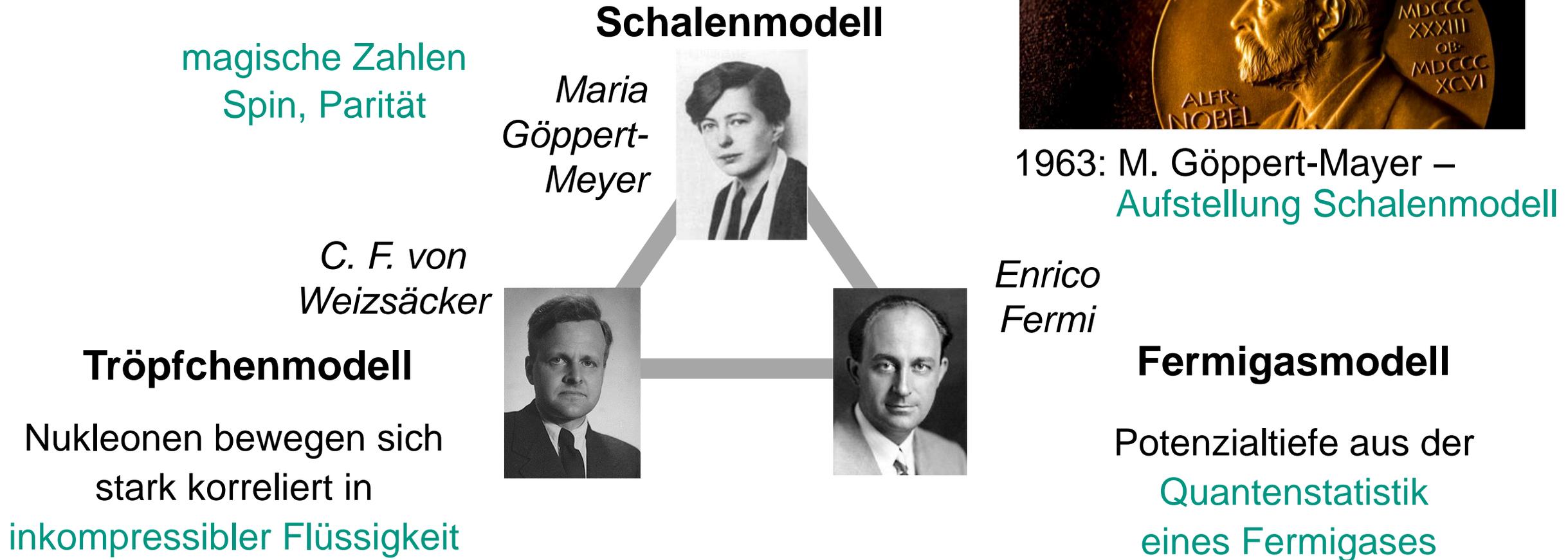
## Fermigasmodell

Nukleonen bewegen sich unabhängig voneinander in **gemeinsamen Potenzial**

Q: GSI

# Kernmodelle – Grundlagen & Pioniere

- Kernmodelle beschreiben immer spezielle Eigenschaften



Q: A-Zquotes, nobelprize

# Kernmodelle – Benchmarks

- Parameter, die von Kernmodellen beschrieben werden sollen:

## Kernradien & -dichten

Kernmaterie - konstante Dichte

$$\rho = 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

$$R = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$$

## Stabilitätsverhalten

stabile Kerne:

für kleines  $A$ :  $N = Z$

für großes  $A$ :  $N > Z$

Spaltung,  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$  - Zerfall

## Bindungsenergien & Kernkräfte

konstante Bindungsenergie  $B/A \sim 8 \text{ MeV}$   
pro Nukleon, gesättigte Kernkräfte

## Spin und Parität

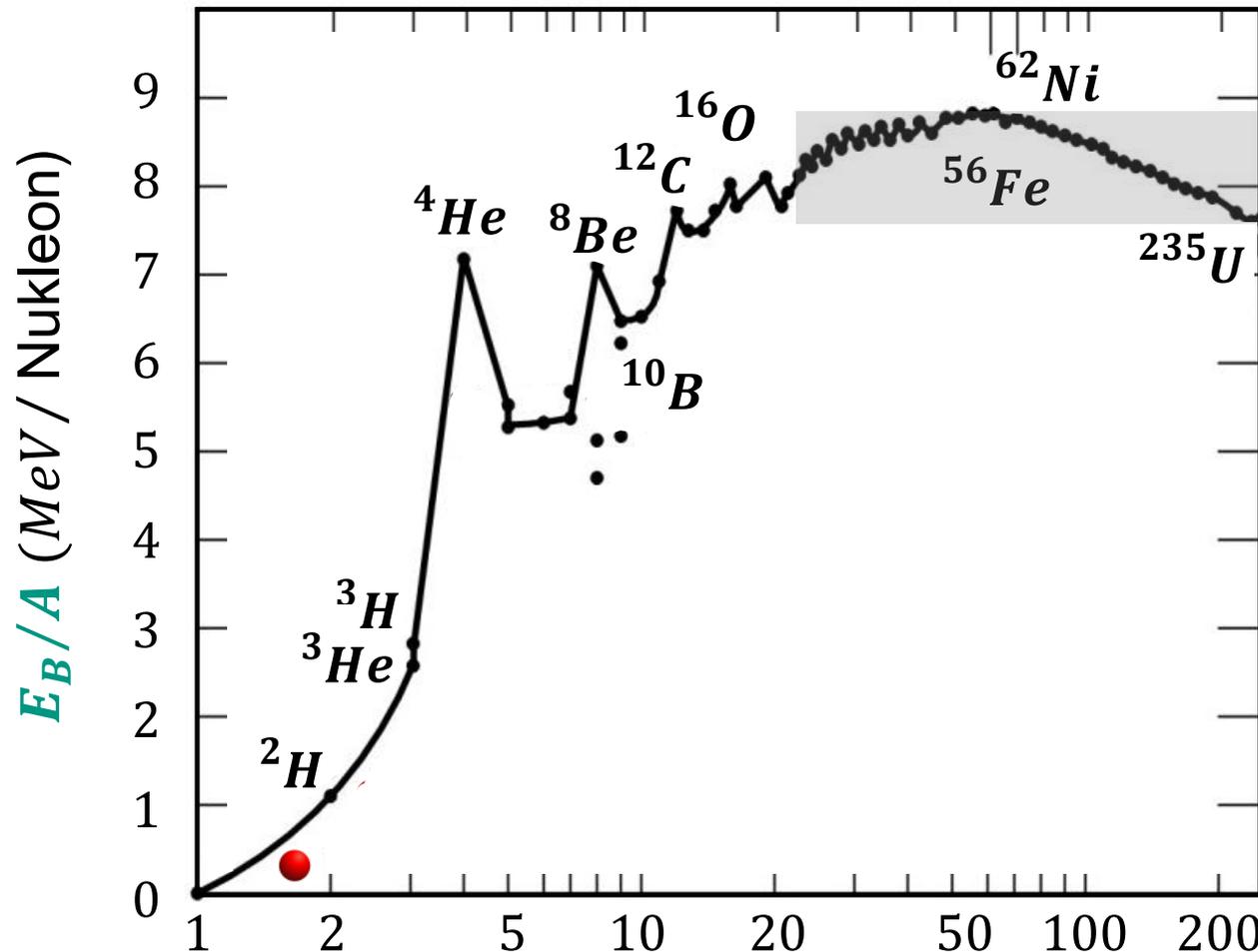
Kernniveaus mit definiertem Spin  
& Parität  $J^P = (0^+, 2^+, 4^+, 0^-, 1^-, \dots)$

## Kernanregung und Kerndeformation

Lage von angeregten Zustände,  
kollektive Anregungen & Deformation

# Kerne: Bindungsenergie pro Nukleon

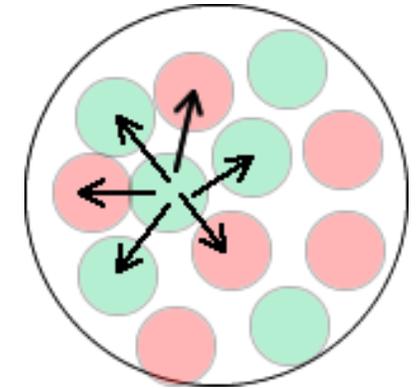
## ■ genereller Verlauf von $B/A$ : Sättigungsverhalten



$\langle B/A \rangle \sim 8 \text{ MeV}$

kurzreichweitige  
Kernkräfte

Reichweite  $\sim 1 \text{ fm}$

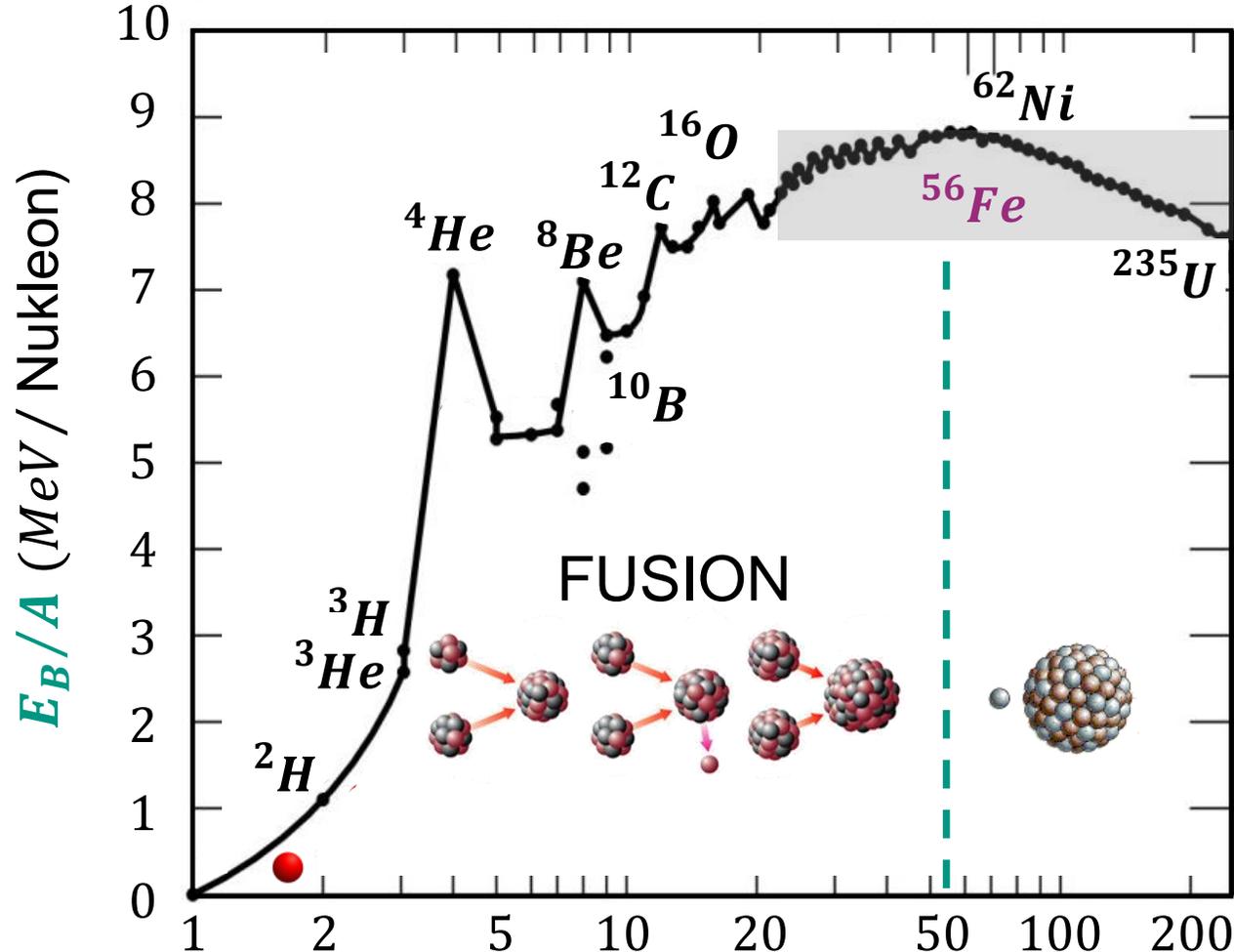


Nukleonen-  
zahl  $A$

- Wechselwirkung von  
Nukleonen im Kern  
nur mit dem nächsten  
Nachbarnukleon!

# Kerne: Bindungsenergie pro Nukleon

## ■ Energiegewinn: Kernfusion oder Kernspaltung



maximales  $B/A$  bei  $A = 56 - 58$   
( ${}^{56}\text{Fe}$ ,  ${}^{56}\text{Ni}$ )  $\Rightarrow$  **stabilste Elemente**

$A < 56$ : **Kernfusion**

*Fusion*: Bildung von Kernen mit höherer Bindungsenergie (aber Fusionsbarriere)  $\Rightarrow$  **Energiegewinn**

$A > 56$ : **Kernspaltung**

*Spaltung*: Bildung von Kernen mit höherer Bindungsenergie (aber Spaltbarriere)  $\Rightarrow$  **Energiegewinn**