Kerne und Teilchen

SS 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einführung

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de

1.2 Geschichte der Kern- und Teilchenphysik

wswww.physik.uni-mainz.de/quast/HEP2000/TPlernen.html
pdg.lbl.gov

1.3 Grundbegriffe

1.3.1 Größenordnungen

1. Längeneinheiten:
   - ∅Atom $\approx 10^{-10}$ m $= 1$Å (Ångström).
   - ∅Proton $\approx 2 \cdot 10^{-15}$ m $=$ 2fm (Fermi).
   - ∅Quark, Lepton, Boson $\lesssim 10^{-19}$ m.
   - *Planck-Skala*: $\ell_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^2}} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$ m.
2. Energie: 1 eV $\approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ J
   (kinetische Energie eines Teilchens mit Ladung e nach Durchlaufen einer Spannung von 1 V).
3. Masse: $1\frac{\text{eV}}{\text{c}^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-35}$ kg.
   BEISPIELE:

	Masse
e^-	$0,511$ MeV/c^2
$\pi^\pm$	$139,6$ MeV/c^2
p	$938,3$ MeV/c^2
n	$939,6$ MeV/c^2
Z	$91,2$ GeV/c^2
τ	178 ± 4 GeV/c^2
ν	$m_\nu \neq 0$: $m_{\nu_e} < 2$ eV/c^2 $m_{\nu_\mu} < 10$ keV/c^2 $m_{\nu_\tau} < 1$ MeV/c^2

4. Impuls: $1\frac{\text{eV}}{\text{c}^2} \approx 5,34 \cdot 10^{-28}$ kg/ s.

5. Drehimpuls: $1\hbar \approx 6,6 \cdot 10^{-22}$ MeVs $= 1,97 \cdot 10^{-11}$ MeVcm$/\mathrm{c}$.

6. Ladung: $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar\mathrm{c}} = \alpha_{\text{em}} \approx \frac{1}{137}$.

1.3.2 Nomenklatur der Kernphysik

Kernphysik: Physik der Nukleonen n, p im Verbund: *Nuklide*.

Schreibe dafür:

$$ {}^{A}_{Z}X^{n+}_{N} $$

X: chemisches Elementsymbol,
n^+: Ionisierungszahl, falls nicht vollständig ionisiert,
A Massenzahl,
Z Ladungszahl,
N Neutronenzahl.

Die leichten Kerne bilden eine Ausnahme:

$$
\begin{aligned}
&{}^1_1\mathrm{H} =: \mathsf{p} \quad \text{Proton}\\
&{}^2_1\mathrm{D} =: \mathrm{d} \quad \text{Deuteron}\\
&{}^3_1\mathrm{T}_3 =: \mathrm{t} \quad \text{Triton}\\
&{}^4_2\mathrm{He}_2 =: \alpha
\end{aligned}
$$

Masseneinheit:

$$
\begin{aligned}
m_{\mathsf{u}} = 1\ \mathsf{u} &:= \frac{1}{12} m({}^{12}_{6}\mathrm{C}_6)\\
&\approx 1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\\
&= 931,5\ \text{MeV}/\mathrm{c}^2
\end{aligned}
$$

Folgende Bezeichnungen werden verwendet:

Isotrope: Kerne gleicher Ladungszahl; $\mathsf{p}, \mathrm{d}, \mathrm{t}$ haben z.B. $Z = 1$.

Isotone: Kerne gleicher Neutronenzahl; $\mathrm{d}, {}^3_2\mathrm{He}_1$ haben z.B. $N = 1$.

Isobare: Kerne gleicher Massenzahl; $\mathrm{d}, {}^3_2\mathrm{He}_1$ haben z.B. $A = 1$.

Isomere: Kerne mit gleichen Z, N auf unterschiedlichen Energieniveaus;
z.B. ${}^{178}\mathrm{Hf} \overset{*}{\to} {}^{178}\mathrm{Hf} + \gamma$.

Spiegelkerne: Kerne mit vertauschbaren N, Z; z.B. ${}^{13}_{6}\mathrm{C}_7 \leftrightarrow {}^{13}_{7}\mathrm{N}_6$.

2 Einführung in die Kernphysik

2.1 Kerne und ihre Eigenschaften

2.1.1 Elektrische Ladung

- Bestimmung der Ladung durch *Rutherford-Streuung*:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_\theta = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 4E_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}$$

  dabei ist z die Masse des einfallenden Teilchens, E_0 seine Energie und Z die Masse des Streuzentrums.

- Das *Mosley-Gesetz*:

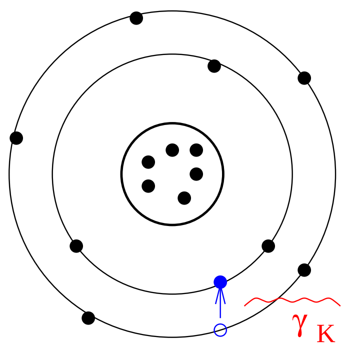


Abbildung 1: Übergang eines Elektrons in die K-Schale

Frequenz der K-Linie der Röntgenstrahlung:

$$\nu_\mathrm{K} = \mathrm{Ry} \cdot (Z - s) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right)$$

dabei ist Ry die Rydbergkonstante und $s \approx 1$ für den Übergang in die unterste Schale (Abschirmungseffekt).

2.1.2 Masse

Massenpektrometer, Prinzip von Thomson. Ablenkung im E-Feld:

$$y = \frac{qEl}{4E_\mathrm{kin}}$$

Ablenkung im B-Feld:

$$F_\mathrm{L} = qvB = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow p = mv = qBR$$

$$m = \frac{p^2}{2E_\mathrm{kin}} = q\frac{B^2R^22y}{El^2}$$

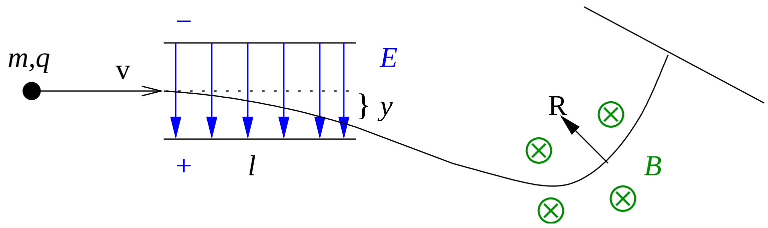


Abbildung 2: Massenspektrometer von Thomson

Anmerkung: Verbesserung durch fokussierdende Anordnung, $\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{2000}$.

Beobachtungen:

- Ladung des Kerns ist Vielfaches der Elementarladung e.
- Masse des Kerns ist ungefähr Vielfaches der Protonenmasse m_p.

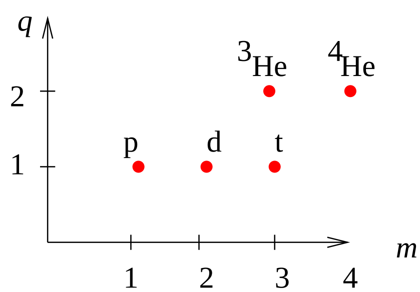


Abbildung 3: Kernmassen (in m_p) und Ladung (in e)

Neben p und e muss es also einen zusätzlichen Baustein geben: das Neutron n.

2.1.3 Bindungsenergie

Starke Kräfte, die p, n auf kleinstem Raum binden $\Rightarrow$ *Massendefekt*:

$$m_{\mathrm{Kern}} = Z m_\mathsf{p} + N m_\mathsf{n} - \frac{E_\mathrm{B}}{\mathrm{c}^2}$$

Dem Massendefekt entspricht die *Bindungsenergie* E_B.

2.1.4 Masse des Neutrons

Bestimme $m_\mathrm{d}, m_\mathsf{p}$. Dann kann man m_n über *Photospaltung* des d berechnen.

$${}^2_1\mathrm{D} + \gamma \to {}^1_0\mathsf{n} + {}^1_1\mathrm{H}$$

daraus folgt

$$m_\mathsf{n} = m_\mathrm{d} - m_\mathsf{p} + 2,226\ \mathrm{MeV/c^2} = 9,39,6\ \mathrm{MeV/c^2},$$

das ist etwa $1,3\ \mathrm{MeV/c^2}$ schwerer als p.

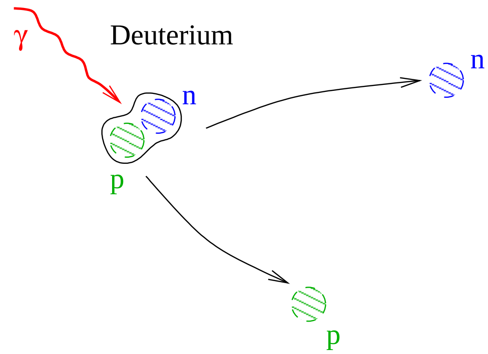


Abbildung 4: Photospaltung

2.2 Größe und Struktur der Kerne

2.2.1 Wirkungsquerschnitt

Der *Wirkungsquerschnitt* σ ist die effektive Fläche eines Streuprozesses.

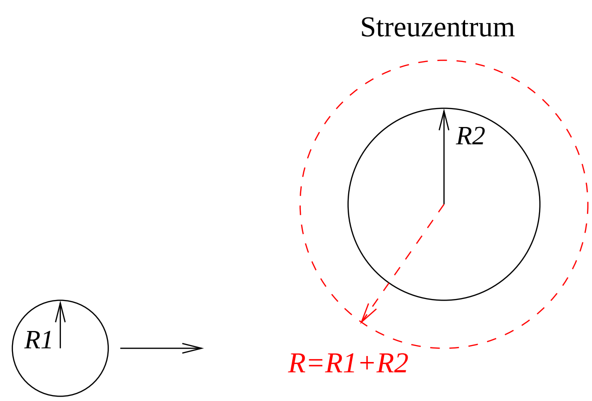


Abbildung 5: Effektive Fläche $= \pi \cdot R$

Bestimmung von σ:

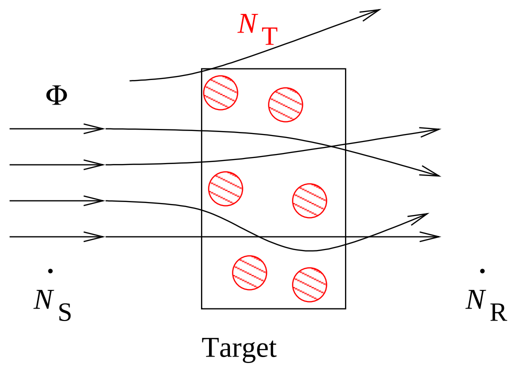


Abbildung 6: Streuung am *Target*

$$\dot{N}_\mathrm{R} = \dot{N}_\mathrm{S}\frac{N_\mathrm{T}\sigma}{A} = \frac{\text{Streufläche}}{\text{Gesamtfläche}} = \Phi N_\mathrm{T}\sigma \quad \Rightarrow \sigma = \frac{\dot{N}_\mathrm{R}}{\Phi N_\mathrm{T}}$$

mit der Einheit $[\sigma] = 10^{-24}$ cm$^2 =$ b (Barn).
Dabei ist $\dot{N}_\mathrm{R}$ die Anfangsintensität der einfallenden Teilchen, $\dot{N}_\mathrm{S}$ die gestreute Intensität.

BEISPIELE:

$$\sigma_\mathsf{pp} = 40 \text{ mb} \quad (\text{bei } 10 \text{ GeV})$$
$$\sigma_{\nu\mathsf{p}} = 70 \text{ fb} = 7 \cdot 10^{-38} \text{ cm}^2 \quad (\text{bei } 10 \text{ GeV})$$

Speziell gilt:

$$\sigma_\text{total} = \sigma_\text{inelastisch} + \sigma_\text{elastisch}$$

Der *differentielle Wirkungsquerschnitt* ist $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}X}$, wobei X eine physikalische Größe darstellt, z.B. $X = E, \theta, \Omega....$

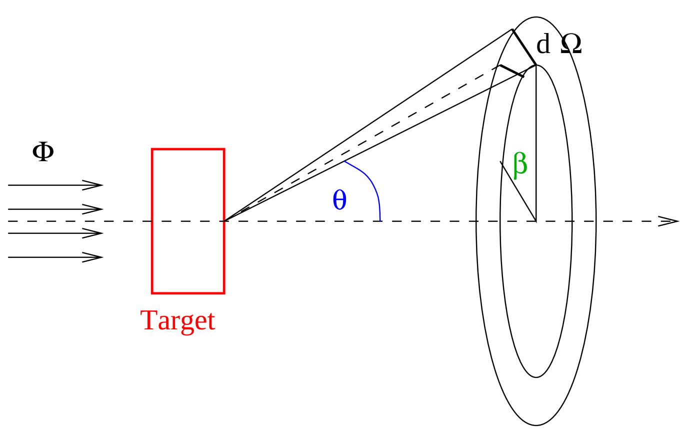


Abbildung 7: Winkel und Raumwinkel bei der Streuung

Es ist $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\dot{N}_R}{d\Omega}\frac{1}{N_T}$. Es gilt auch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\theta = \int_{\beta=0}^{2\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta d\beta = \frac{d\sigma}{d\Omega}2\pi\sin\theta d\theta$$

und damit

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi\sin\theta\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

2.2.2 Rutherford-Streuung

Rutherford entwarf 1911 ein Experiment zur Strukturanalyse des Atomkerns. Dabei wurden α-Teilchen auf eine Goldfolie geschossen und die Streuwinkel der Teilchen gemessen.

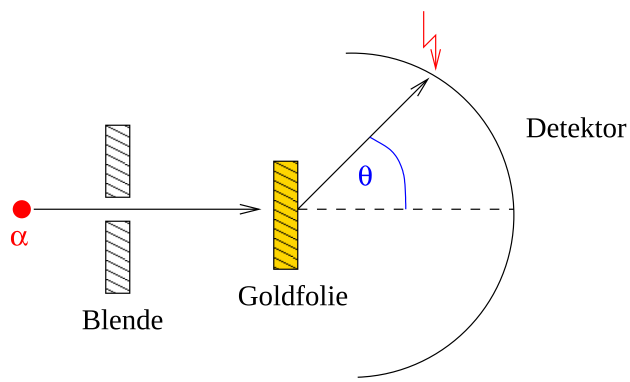


Abbildung 8: Rutherfords Streuexperiment; $\frac{d\dot{N}_R}{d\Omega}$ =Anzahl der „Blitze“

Beobachtung:

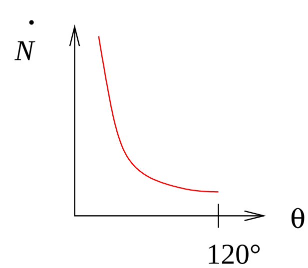


Abbildung 9: Winkelabhängigkeit von $\dot{N}$

Interpretation: Elastische Streuung der α-Teilchen am Coulomb-Potential.

Sei b der Stoßparameter:

$$\Phi 2\pi b db = \Phi 2\pi\sin\theta d\theta\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

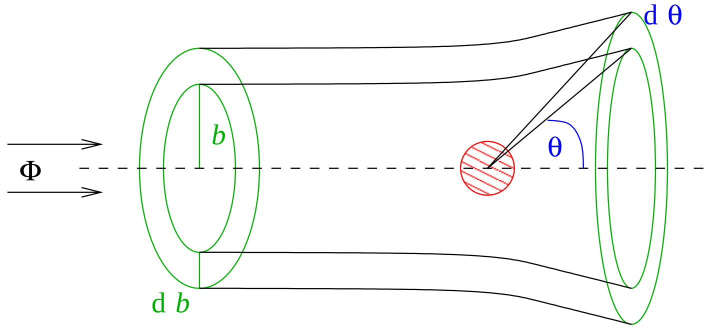


Abbildung 10: Streuung am Coulomb-Potential

$\Rightarrow$ allgemein für elastische Streuung (ohne Polarisation):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}$$

Speziell für die Coulomb-Streuung:

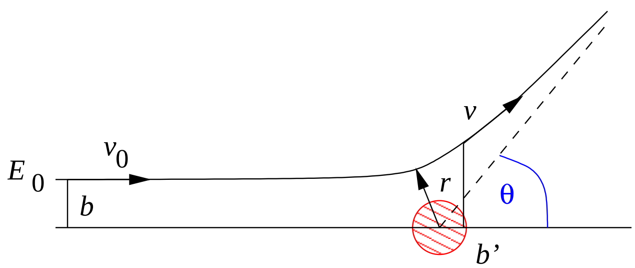


Abbildung 11: Coulomb-Streuung

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{1}{2}mv^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E_0 = \text{const.}$$
$$\text{Drehimpulserhaltung: } L = mv_0 b = mvb' = \text{const.}$$
$$\Rightarrow b = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\frac{1}{2}\cot\theta$$

Ergebnis:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 4E_0}\right)\cdot\frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}$$

Analyse von Rutherford: $E_0 = 4,78$ MeV, $\theta_1 = 30°, \theta_2 = 50°$. Es ist $E \sim \frac{1}{r}$.

Größte Annäherung an den Kern wenn

$$E_0 = 4,78 \text{ MeV} = \frac{zZ}{r_{\text{min}}}\cdot 1,44 \text{ fmMeV} \Rightarrow r_{\text{min}} = 47 \text{ fm} > r_{\text{Au}}$$

(r_{Au} ist der Radius des Goldatoms).

Bei größeren Energien ergeben sich Abweichungen wegen der Kernwechselwirkung.

Aus den Abweichungen vom elastischen Wirkungsquerschnitt erhält man die Ausdehnung des Kerns. Einige Folgerungen:

1. Es gilt folgende Näherungsformel für den Kernradius:

$$R_{\text{Kern}} \approx r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

   mit $r_0 = 1,3$ fm („dichte Kugelpackung").

   BEISPIELE:

Kern	Kernradius R_{Kern}	Näherung $R_{\text{Kern}} \cdot A^{-\frac{1}{3}}$
${}^1_1\text{H}$	$1,03$ fm	$1,0$ fm
${}^2_1\text{D}$	$2,8$ fm	$2,2$ fm
${}^{16}_8\text{O}$	$2,75$ fm	$1,4$ fm
${}^{197}_{79}\text{Au}$	$6,87$ fm	$1,18$ fm

2. Dichte der Kernmaterie:

$$\varrho_{\text{Kern}} = \frac{A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{V_{\text{Kern}}} = \frac{A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{Kern}}^3} = 1,44 \cdot 10^{15} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

   Welchen Radius hätte die Sonne, wenn sie ganz aus Kernmaterie bestehen würde?

$$\begin{aligned} M_\odot &= 2 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \\ V &= \frac{M_\odot}{\varrho_{\text{Kern}}} = 1,4 \cdot 10^{18}\ \text{cm}^3 \\ D &= 17\ \text{km (Neutronenstern)} \end{aligned}$$

3. Vergleich von Kernkraft und Gravitationskraft:

   Gravitationspotential:

$$V_G = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r} = 1,1 \cdot 10^{-37} \frac{A_1 A_2}{r} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{fm}}\right]$$

   (mit $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$).

   Kernpotential:

$$V_{\text{K}} \approx E_{\text{B}} \approx 8\ \text{MeV/Teilchen} \Rightarrow \frac{E_{\text{B}}^{\text{G}}}{E_{\text{B}}^{\text{K}}} = 10^{-38}$$

2.2.3 Elektronenstreuung an Kernen

Prinzip analog zur Rutherford-Streuung. Beachte:

1. E_e ist definiert durch die *de Broglie-Wellenlänge* des Elektrons:

$$k_\mathsf{e}^{-1} < R_\mathrm{K} \quad (= \mathrm{O}(\mathrm{fm}))$$

mit $k_\mathsf{e}^{-1} = \frac{\hbar}{p_\mathsf{e}} = 197\ \mathrm{MeVfm}/p_\mathsf{e}\mathrm{c}^2$.
Daraus folgt: $p_\mathsf{e} > 200\ \mathrm{MeV/c}$ und $E > 200\ \mathrm{MeV}$.

2. Berücksichtige den Spin:

Mott-Streuung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Mott}} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta^2(\sin\theta/2)^2\right) \to 0 \text{ für } \beta \to 1, \theta \to 180^\circ$$

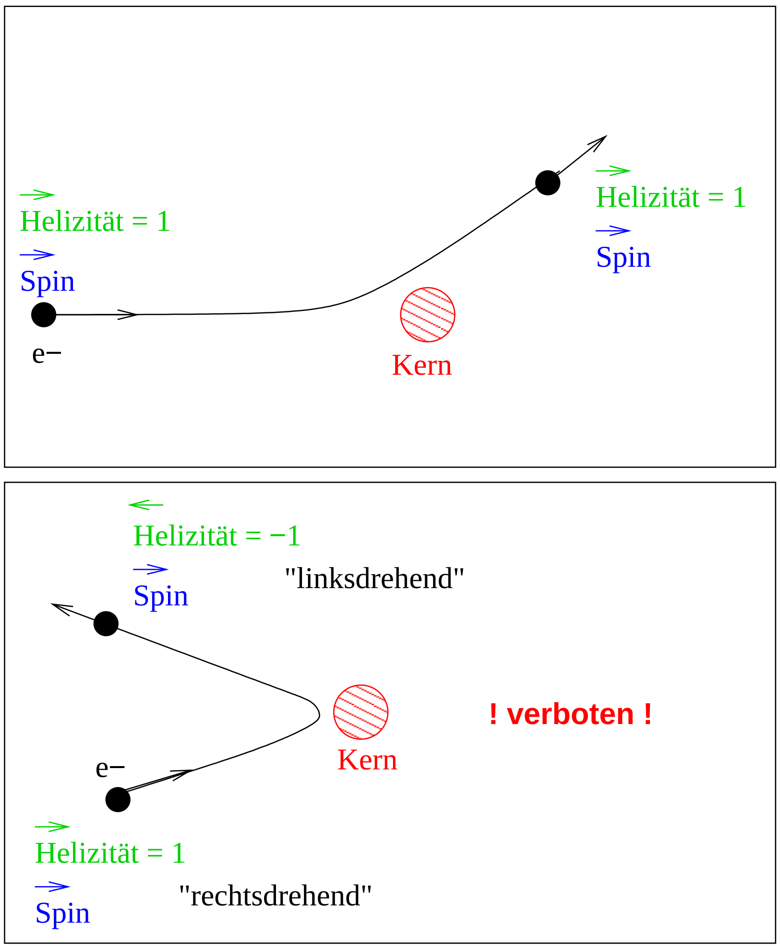


Abbildung 12: Mott-Streuung; die Helizität muss erhalten bleiben

Das Elektron habe den Spin $\boldsymbol{s}$ und den Impuls $\boldsymbol{p}$. Die *Helizität*

$$h = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{s}|} = \pm 1$$

muss bei der Streuung erhalten bleiben (Quantenmechanik).

Die Formel für die Streuung muss korrigiert werden, falls der Kern Spin besitzt:

Dirac-Streuung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left((\cos\theta/2)^2 + \frac{q^2}{2M^2} \cdot (\sin\theta/2)^2\right)$$

dabei ist M die Kernmasse, $\frac{q^2}{2M^2}$ ist die (quadratische) Impulsübertragung, der Term $\frac{q^2}{2M^2} \cdot (\sin\theta/2)^2$ beschreibt die *Spin-Spin-Wechselwirkung*.

3. Innere Strukturen und der Formfaktor:

   Beschreibung durch Impulsübertrag

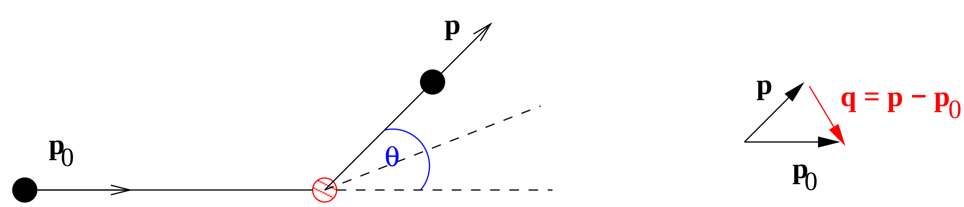


Abbildung 13: Impulsübertrag

Mit $\boldsymbol{q} := \tilde{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}$ ist $\sin\theta/2 = \frac{1}{2}\frac{|\boldsymbol{q}|}{|\tilde{\boldsymbol{p}}|} = \frac{q}{2mv}$.

Mit $E = \frac{p}{2m}$ gilt (nichtrelativistisch) für die Rutherford-Streuung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_q = \left(\frac{2zZe^2m}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{q^4}$$

Streuverhalten in Ladungsverteilung:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{punktförmig}} \cdot \left|F(q^2)\right|$$

$F(q^2) \leq 1$ ist der *Formfaktor*.

Es gilt

$$F(q^2) = \int \varrho(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

dies ist die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung.

Herleitung:

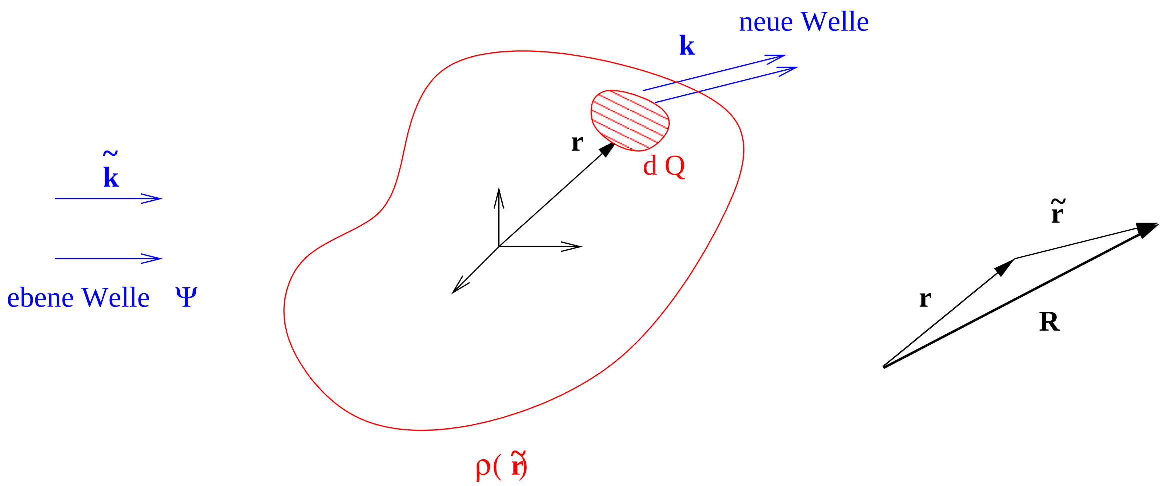


Abbildung 14: Streuung an einer Ladungsverteilung

Von $\mathrm{d}Q = \varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$ geht eine Sekundärwelle aus:

$$A(\boldsymbol{R}) = \Psi(\boldsymbol{r})\frac{a}{\tilde{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}} = \Psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{a}{\tilde{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}}$$

mit $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}$:

$$\frac{1}{\tilde{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{r}})} = \frac{1}{\tilde{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{\boldsymbol{k}}\cdot\tilde{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \approx \frac{1}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}},$$

denn $|\boldsymbol{k}| = |\tilde{\boldsymbol{k}}|$ und $|\tilde{\boldsymbol{r}}| \approx |\boldsymbol{R}|, \boldsymbol{k}||\boldsymbol{R}$ für große Abstände.
Integration über alle $\mathrm{d}Q$ liefert:

$$A_{\text{tot}}(\boldsymbol{R}) = \int \frac{a}{R}\Psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{\varrho(\boldsymbol{r})}{Q}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = \frac{a}{RZe}\Psi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kR)}\int \varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\boldsymbol{k}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

und mit $|\boldsymbol{q}| = \hbar|\Delta\boldsymbol{k}|$,

$$a = \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 q^2}, \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \sim |A_{\text{tot}}|^2$$

folgt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{punktförmig}} \cdot \underbrace{|\int \varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,|^2}_{=:F(q^2)}.$$

BEISPIELE:

Ladungsverteilung $\varrho(\boldsymbol{r})$	$\lvert F(q^2)\rvert$
Punkt: $\frac{1}{4\pi}\delta(\boldsymbol{r})Q$	1
exponentiell: $\left(\frac{a}{8\pi}\right)\mathrm{e}^{-\alpha r}$	$\left(\frac{1+q^2}{q^2\pi^2}\right)$
Gauß: $\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{a^2r^2}{2}}$	$\mathrm{e}^{-\frac{q^2}{2a^2\hbar^2}}$
harte Kugel: $\begin{cases} c, & r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$, mit $\alpha = \frac{\lvert\boldsymbol{q}\rvert}{\hbar}R$, $\alpha_{\text{min}} = 4,5$

Aus den Streuversuchen erfahren wir über die Struktur der Kerne:

- Kerne besitzen konstante Ladungsverteilung und -dichte bis zu einem diffusen Rand.
- Die *Fermi-Verteilung*:
$$\varrho(a) = \frac{\varrho_0}{1 + \mathrm{e}^{-\frac{r - R_{1/2}}{\alpha}}}$$
mit $a = 0,55$ fm, $R_{1/2} = 1,1A^{\frac{1}{3}}$ fm ist $\varrho \approx 0,17\,\frac{\text{Nukleonen}}{\text{fm}^2}$.
- Kerne können von der Kugelform abweichen (Oblaten, Zigarren...).
- Kernkräfte sind beschränkt auf den Bereich der Ladungsverteilung.

Daraus erhält man Kernmodelle.

2.3 Bindungsenergie: das Tröpfchenmodell

Bethe, Weizsäcker 1935.

Modell: Kern inkompressible Flüssigkeit, Nukleonen als Tröpfchen.

$$E_{\mathrm{B}} = Zm_{\mathsf{p}} + Nm_{\mathsf{n}} - m_{\mathrm{K}}$$

(setze $\mathrm{c}^2 = 1$).

Beobachtung:
$$\frac{E_{\mathrm{B}}}{A} \approx \text{const.} = 8...9 \text{ MeV}.$$

Ansatz:

$$E_{\mathrm{B}} = \underbrace{a_V A}_{\text{Volumenterm}} - \underbrace{a_S A^{\frac{2}{3}}}_{\text{Oberflächenterm}} - \underbrace{a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}}}_{\text{Coulombterm}} - \underbrace{a_A \frac{(N-Z)^2}{A}}_{\text{Asymmetrieterm}} + \underbrace{a_p A^{-\frac{1}{2}}}_{\text{Paarungsterm}}$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{Volumen} \sim A \\
&\text{Oberfläche} \sim A^{\frac{2}{3}} \\
&E_C \sim \frac{Z^2 e^2}{R} \\
&\text{Asymmetrie: Anzahl der Zustände } N \sim \sqrt{E} \\
&a_p A^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} +\delta & : \quad \text{(g,g)} \\ 0 & : \quad \text{(u,g) oder (g,u)} \\ -\delta & : \quad \text{(u,u)} \end{cases},
\end{aligned}$$

dabei bedeutet u bzw. g ungerade bzw. gerade Parität von (Protonenzahl, Neutronenzahl).

Weizsäckersche Massenformel:

$$\begin{aligned} a_V &= 15,5 \text{ MeV} \\ a_C &= 0,7 \text{ MeV} \\ a_S &= 16,8 \text{ MeV} \\ a_A &= 23 \text{ MeV} \\ a_{\text{paar}} &= 11,3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Anwendung: Spaltung von Uran.

$$\mathsf{n} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} \to X + Y$$

Angenommen $m(X) = m(Y) = \frac{m(\mathrm{U})}{2}$. Spaltenergie:

$$\begin{aligned} E_F &= m(Z, A) - 2m\left(\frac{Z}{2}, \frac{A}{2}\right) = \Delta E_{\mathrm{B}} \\ &= a_S A^{\frac{2}{3}}(1 - 2^{\frac{1}{3}}) + a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}(1 - 2^{-\frac{2}{3}}) \\ &= 180 \text{ MeV} \end{aligned}$$

2.4 Kernspin und magnetisches Moment

2.4.1 Magnetische Dipolmomente

1. Klassisch:

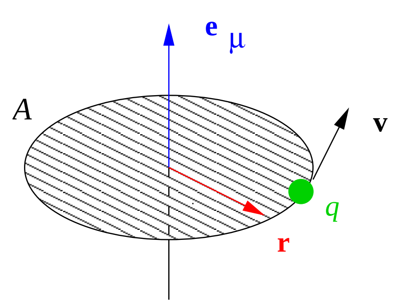


Abbildung 15: klassischer magnetischer Dipol

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} = j\boldsymbol{A} &= \frac{q}{T}\pi r^2 \boldsymbol{e}_A \\ &= q\frac{v}{2\pi r}\pi r^2 \boldsymbol{e}_A \\ &= \frac{q}{2m} pr \boldsymbol{e}_A \end{aligned}$$

also:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} = \boldsymbol{\ell}$$

Für Teilchen mit Spin I:

$$\boldsymbol{\mu} = g_I \frac{e}{2m} I$$

klassisch $g_I = 1$ bzw. $g_I < 1$ für Ladungsverteilung.

2. Elektron:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathsf{e} = g_\mathsf{e} \mu_B \frac{\boldsymbol{s}}{\hbar},$$

mit $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_\mathsf{e}} = 5,8 \cdot 10^{-5}$ eV/ T (*Bohrsches Magneton*).

3. Proton:

$$\boldsymbol{\mu}_\mathsf{p} = g_\mathsf{p} \mu_K \frac{\boldsymbol{s}}{\hbar},$$

mit $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_\mathsf{p}} = 3,2 \cdot 10^{-8}$ eV/ T (*Kernmagneton*).

4. Kern:

$$\boldsymbol{\mu}_I = g_I \mu_K \frac{\boldsymbol{I}}{\hbar},$$

mit $g_I = \frac{|\boldsymbol{\mu}_I|\hbar}{\mu_K |\boldsymbol{I}|}$.

2.4.2 Experimentelle Bestimmung von $\boldsymbol{\mu}_I$

1. *Hyperfeinstruktur-Aufspaltung* (HFS) atomarer Spektren.

$$V_\text{HFS} = -\boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{B}_J = -|\boldsymbol{\mu}_I| B_J \cos(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}),$$

dabei ist $\boldsymbol{B}_J$ das magnetische Feld der Hülle am Kern.
Mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{J}$, $F^2 = I^2 + J^2 + 2IJ$ folgt $\cos(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}) = \left(\frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)}\sqrt{J(J+1)}}\right)$
und daraus

$$E_\text{HFS} = a \cdot \left(\frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{I(I+1)}\sqrt{J(J+1)}}\right),$$
$$a = \frac{2}{3} \mu_B g_\mathsf{e} \mu_K g_I$$

BEISPIEL: Die 1s-Aufspaltung im H-Atom.

$$E_\text{HFS} = \begin{cases} +\frac{a}{4}, & F = 1 \\ -\frac{a}{4}, & F = 0 \end{cases}$$

und $\Delta E_\text{HFS} = a$ (entspricht $\lambda = 21$ cm; die interstellare H-Linie).

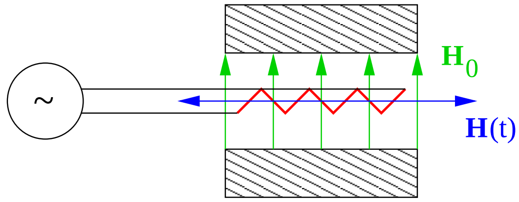


Abbildung 16: magnetische Kernresonanz

2. *Magnetische Kernresonanz* (NMR).

   Prinzip: Einstrahlung von Energie auf Probe im Magnetfeld. Im statischen $\boldsymbol{H}_0$: Ausrichtung des Spins:
   $$m_s = \begin{cases} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$
   und $\Delta E(\Delta m - 1) = -g_I \mu_K H_0$.

   Mit Einstrahlung von Energie durch $\boldsymbol{H}(t)$: Absorption, resonanzartiges Umklappen des Spins für
   $$\nu_H(t) = \frac{g_I \mu_K H_0}{h}.$$
   Also: Frequenz messen $\Rightarrow g_I \mu_K$.

   BEISPIEL: Protonen, $H_0 = 1$ T, $\nu = 42,5$ MHz.

2.4.3 Komposition magnetischer Momente

Beobachtung:

- A gerade $\Rightarrow I = 0, 1, 2 \ldots$.
- A ungerade $\Rightarrow I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$.
- Z, N jeweils gerade $\Rightarrow I = 0$.

Ansatz:
$$\boldsymbol{I} = \sum \boldsymbol{I}_{\mathsf{n}_i} + \sum \boldsymbol{I}_{\mathsf{p}_i}$$
mit $\boldsymbol{I}_{\mathsf{n}_i} = \boldsymbol{\ell}_{\mathsf{n}_i} + \boldsymbol{s}_{\mathsf{n}_i}, \boldsymbol{I}_{\mathsf{p}_i} = \boldsymbol{\ell}_{\mathsf{p}_i} + \boldsymbol{s}_{\mathsf{p}_i}$.
$$\boldsymbol{\mu}_I = \sum \boldsymbol{\mu}_{I,\mathsf{n}_i} + \sum \boldsymbol{\mu}_{I,\mathsf{p}_i}$$
mit $\boldsymbol{\mu}_{I,\mathsf{n}_i} = g_{\mathsf{e}} \boldsymbol{\ell}_{\mathsf{n}_i} + g_s \boldsymbol{s}_{\mathsf{n}_i}, \boldsymbol{\mu}_{I,\mathsf{p}_i} = g_{\mathsf{e}} \boldsymbol{\ell}_{\mathsf{p}_i} + g_s \boldsymbol{s}_{\mathsf{p}_i}$.

BEISPIELE: Vorhergesagte und experimentell gemessen Werte.

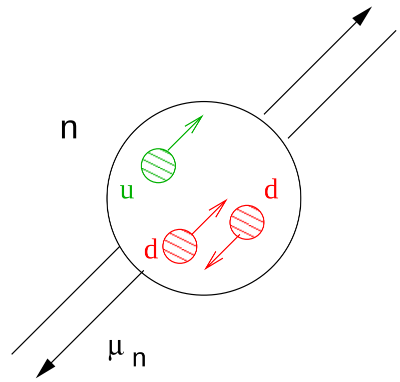


Abbildung 17: $\mathsf{d}: q = -\frac{1}{3}\mathsf{e}^-, m_{\mathsf{d}} \approx 7$ MeV und $\mathsf{u}: q = +\frac{2}{3}\mathsf{e}^-, m_{\mathsf{u}} \approx 5$ MeV

- ${}^2_1$H:

$$I = I_{\mathsf{p}} + I_{\mathsf{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \qquad I_{\text{exp}} = 1,$$
$$\mu_I = \mu_{\mathsf{p}} + \mu_{\mathsf{n}} = (2,79 - 1,91)\mu_K = 0,88\mu_K, \qquad \mu_{\text{exp}} = 0,86\mu_K.$$

- ${}^3_1$H:

$$I = I_{\mathsf{p}} + \sum I_{\mathsf{n}} = \frac{1}{2}, \qquad I_{\text{exp}} = \frac{1}{2},$$
$$\mu_I = (2,79 + 0)\mu_K, \qquad \mu_{\text{exp}} = 2,97\mu_K.$$

- ${}^4_2$He:

$$I = 0 + 0, \qquad I_{\text{exp}} = 0,$$
$$\mu_I = 0 = \mu_{\text{exp}}.$$

Für Spin+Bahndrehimpuls gilt:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{(\boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{I})\boldsymbol{I}}{|\boldsymbol{I}|^2}$$

Für $I = \ell \pm \frac{1}{2}$ folgt:

$$\mu_I = \mu_K \left(g_\ell \pm \frac{g_s - g_\ell}{2\ell - 1} \right)$$

BEISPIELE:

- ^{17}O:

$$I = \frac{5}{2},$$

ein Neutron ist ungepaart.

$$\mu_I = -1,9\mu_K$$

$(\ell = 2, s = \frac{1}{2})$.

- ^{17}F:
$$I = \frac{5}{2},$$
ein Proton ist ungepaart.
$$\mu_I = 4,7\mu_K, \mu_{\text{exp}} = 4,8\mu_K$$
$(\ell = 2, s = \frac{1}{2})$.

Schlussfolgerung: Aus I, μ erhalten wir, dass die p, n im Kern paarweise abgesättigt sind. Verbleibendes Nukleon bestimmt (einzig und allein) I, μ, ℓ.

2.4.4 Höhere Momente

1. Hilfskonstruktion:

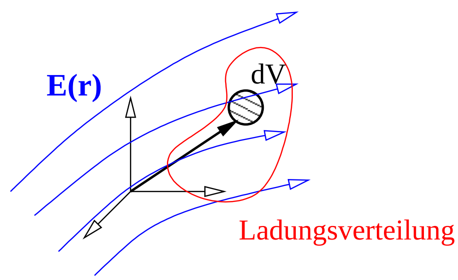


Abbildung 18: Ladungsverteilung im $\boldsymbol{E}$-Feld

Potentielle Energie der Ladungsverteilung:
$$W = \int_V \Phi(\boldsymbol{r})\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V.$$
Ansatz:
$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \underbrace{\Phi(\boldsymbol{0})}_{=:W_0} + \underbrace{\boldsymbol{r}\cdot\nabla\Phi(\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{0}}}_{=:W_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}|_{\boldsymbol{0}}}_{=:W_2}.$$
Mit
$$W_0 = \int_V \Phi(\boldsymbol{0})\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = Ze\Phi(\boldsymbol{0}) \text{ (potentielle Energie der Gesamtladung)}$$
$$W_1 = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0})\int_V \boldsymbol{r}\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = 0$$
denn: $\varrho(\boldsymbol{r}) = Q\Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}), \Psi(\boldsymbol{r}) = \pm\Psi(-\boldsymbol{r}), \varrho(\boldsymbol{r}) = \varrho(-\boldsymbol{r})$
$$\Rightarrow \int \boldsymbol{r}\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = \int \boldsymbol{r}\varrho(-\boldsymbol{r})\mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{r}\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

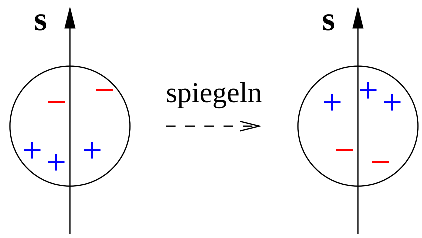


Abbildung 19: im Mittel gleichhäufig; falls ein Zustand häufiger vorkommt als der andere, so ist die Paritätssymmetrie gebrochen

Physikalische Konsequenz: $\boldsymbol{D}_{\mathrm{e}} = 0$ (von Kernen).

Das *Quadrupolmoment*:

$$\begin{aligned} W_2 &= -\frac{1}{2}\int_V \sum_{i,j} x_i x_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}|_{\mathbf{0}}\ \varrho(\boldsymbol{r})dV \\ &= -\frac{1}{6}\int_V \sum_{i,j}(3x_ix_j - \boldsymbol{r}^2\delta_{ij})\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}x_i}\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{6}\sum_{i,j} Q_{i,j}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}|_{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

(beachte: $\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}x_i} = 0$, denn $\nabla \boldsymbol{E}|_{\mathbf{0}} = 0$).

z.B. Systeme mit Rotationsenergie bzgl. der z-Achse:

$$Q_{zz} = \int_V (3Z^2 - r^2)\varrho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

BEISPIELE: „Zigarre“und „Oblate“:

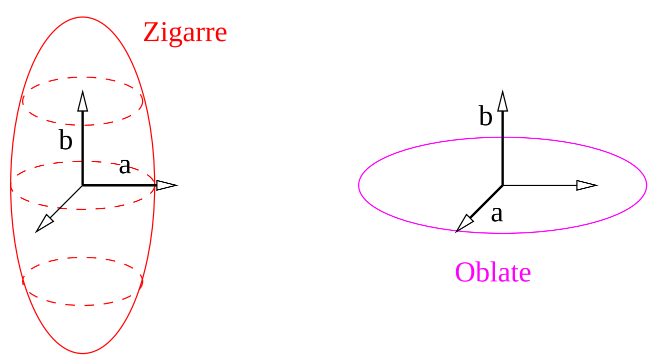


Abbildung 20: Zigarre und Oblate

$$Q_{zz} = \frac{4}{5}Z\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=\langle R\rangle^2}\underbrace{\frac{2(b-a)}{a+b}}_{=\langle\delta\rangle} = \frac{4}{5}Z\langle R\rangle^2\delta.$$

$\delta < 0$ Zigarre, $\delta = 0$ Kugel.

2.4.5 Parität und Isospin

1. *Parität* P: Symmetrie der Wellenfunktion unter räumlicher Spiegelung am Ursprung.

$$\begin{aligned} \mathscr{P}\Psi(\boldsymbol{r}) &= P\Psi(-\boldsymbol{r}), \\ \mathscr{P}^2\Psi(\boldsymbol{r}) &= P^2\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi(\boldsymbol{r}) \Rightarrow P = \pm 1 \end{aligned}$$

z.B. Wellenfunktion eines Teilchens im Zentralpotential.

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = R_{n\ell}(r)Y_\ell^m(\theta,\varphi),$$

$\ell = 0, 1, 2, \ldots$ für $P = +1$, $\ell = 1, 3, ..$ für $P = -1$. Konvention:

$$\begin{aligned} \mathsf{p}, \mathsf{n}, \mathsf{e}^- &: P = +1 \\ \overline{\mathsf{p}}, \overline{\mathsf{n}}, \mathsf{e}^+ &: P = -1 \end{aligned}$$

BEISPIEL: Parität des π^-:
Beobachte $\pi^- + \mathrm{d} \to \mathsf{n} + \mathsf{n}$.

- Pion wird eingefangen, formt Atom im Grundzustand, $\ell = 0$.

$$P(\Psi) = +1 = P(\mathrm{d})P(\pi^-) = P(\mathsf{n})P(\mathsf{p})P(\pi^-) = +1,$$

da $I_\mathrm{d} = 1, \ell = 0$.

- Betrachtung des nn-Systems: Gesamtdrehimpuls $I = 1$ (muss erhalten bleiben).
Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} s_{\mathsf{nn}} &= 1, \ell = 0 \\ s_{\mathsf{nn}} &= 1, \ell = 1 \\ s_{\mathsf{nn}} &= 1, \ell = 2 \\ s_{\mathsf{nn}} &= 0, \ell = 1 \end{aligned}$$

Beide n sind Fermionen, also ist die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch. Also:

$$\begin{aligned} &S_{\mathsf{nn}} = 1 \text{ symmetrisch, } \ell = 1 \text{ antisymmetrisch} \\ &\Rightarrow P(\mathsf{nn}) = P(\mathsf{n})P(\mathsf{n})P(\Psi) = (+1)\cdot(+1)\cdot(-1) = -1 = P(\pi^-) \end{aligned}$$

2. *Isospin* T: Wegen der Ladungsunabhängigkeit der Kernkräfte und da $m_\mathsf{p} \approx m_\mathsf{n}$ fasse p und n zusammen unter dem Begriff *Nukleon*. Beschreibe die Symmetrie der Nukleonen durch den Isospin:

$$\begin{aligned} T(\mathsf{p}) &= \frac{1}{2}, \quad T_3(\mathsf{p}) = +\frac{1}{2}, \\ T(\mathsf{n}) &= \frac{1}{2}, \quad T_3(\mathsf{n}) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Entsprechend für das Pion $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} \approx m_{\pi^0}$:

$$T(\pi) = 1,$$
$$T_3(\pi^+) = +1, T_3(\pi^0) = 0, T_3(\pi^-) = -1.$$

BEISPIEL:

$$\mathsf{p} + \mathsf{p} \to \mathrm{d} + \pi^+$$
$$T : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + 1$$

mit Wirkungsquerschnitt σ_1,

$$\mathsf{p} + \mathsf{n} \to \mathrm{d} + \pi^0$$
$$T : 0 \text{ oder } 1 = 0 + 1$$

mit Wirkungsquerschnitt σ_2. Es sind treten zu 50% $T(\mathsf{p} + \mathsf{n}) = 0$ und zu 50% $T(\mathsf{p} + \mathsf{n}) = 1$ auf. Es ist dann $\sigma_1 = 2\sigma_2$.

2.5 Das Schalenmodell

Vorhersage der inneren Eigenschaften (wie Momente, I, E_{B}...).
Experimentelle Hinweise: Stabilität von Kernen mit „magischen Zahlen“ N oder $Z = 2, 8, 14, 20, ...$.

2.5.1 Potentiale

Hinweis auf Form der Dichterverteilung.
Ansatz:

- Jedes Nukleon bewegt sich im Kern unabhängig im mittleren Potential.
- Reichweite der Kernkraft $\leq R_0$.

Die Bewegungsgleichung:

$$\sum_{i=1}^{A} \mathscr{H}_i \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A) = \sum_{i=1}^{A} \left(-\frac{\hbar}{2m_i} \triangle_i + \sum_{i \neq j} V_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \right) \Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A)$$
$$= E\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_A),$$

mit $\Psi = A \prod_i \Psi_i(\boldsymbol{r}_i), \mathscr{H}_i \Psi_i = E_i \Psi_i$ und dem Potential $\sum_{i \neq j} V_{ij}$.

Eine numerische Lösung liefert z.B. das *Hartree-Fock-Verfahren*. Betrachte nun einen Näherungsansatz:

$$\mathscr{H} = \sum_i \mathscr{H}_i = \sum_i = \left(-\frac{\hbar}{2m_i}\triangle_i + V_i(\boldsymbol{r}_i)\right) + \underbrace{\sum_{i<j} V_{ij}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) - \sum_i V_i \boldsymbol{r}_i}_{=:V_R},$$

V_R beschreibt die Restwechselwirkung und es ist $V_R \approx 0$.

1. *Harmonischer Oszillator* im dreidimensionalen (Abb. 21):

$$V(\boldsymbol{r}) = -V_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{m}{2}\omega^2(r^2 - R^2)$$

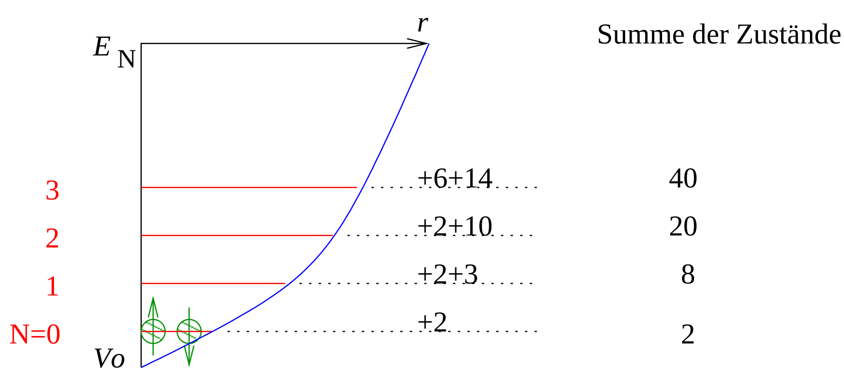


Abbildung 21: Harmonischer Oszillator

Lösung:

$$E_N = \hbar\omega(N + \frac{3}{2})V_0,$$

mit $N = (2n-1) + \ell$ und $n = 1, 2, ..., \ell = 0, 1, ...$

Guter Ansatz für leichte Kerne, z.B. ${}^4_2\mathrm{He}, {}^{16}_8\mathrm{O}, {}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$.

2. *Kastenpotential* (Abb. 22):

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & 0 \le r \le L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

3. *Woods-Saxon-Potential* (mit $\boldsymbol{\ell s}$-Kopplung, Abb. 23):

$$V(\boldsymbol{r}) = -\frac{V_0}{1 + \mathrm{e}^{(r-R_0)/a}} - c\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{s} + \underbrace{\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)}_{\text{nur für p}}$$

Zusammenfassung:

- Form des Potentials: Streuexperimente.
- Schalenmodell: magnetische Momente, Kernspin, Korrekturen zu E_B.

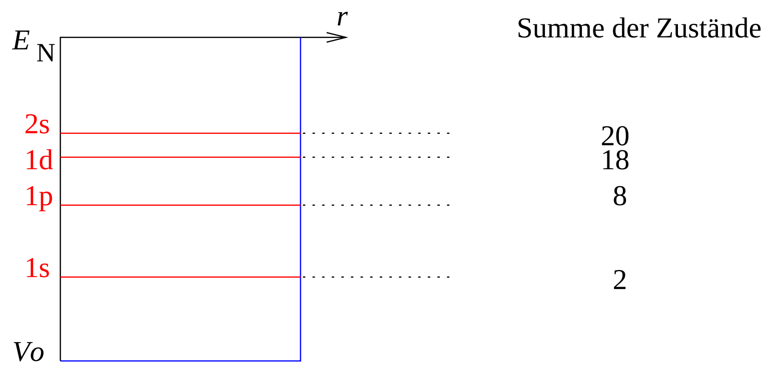


Abbildung 22: Kastenpotential

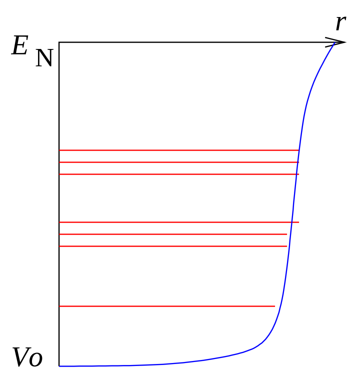


Abbildung 23: Woods-Saxon-Potential

3 Kernumwandlung

Beobachtung: chemische Elemente wandeln sich um durch Aussenden von Strahlung.

α-*Zerfall*: (starke Wechselwirkung, Tunneleffekt)

$$ {}^{A}_{Z}X \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\mathrm{He} $$

β-*Zerfall*: (schwache Wechselwirkung)

$$ {}^{A}_{Z}X \xrightarrow{\mathsf{e}^{\pm}} {}^{A}_{Z+1}Y + \mathsf{e}^{\pm} + \begin{cases} \overline{\nu}_{\mathsf{e}} \\ \nu_{\mathsf{e}} \end{cases} $$

γ-*Zerfall*: (elektromagnetische Wechselwirkung)

$$ {}^{A}_{Z}X^{*} \xrightarrow{\gamma} {}^{A}_{Z}X $$

3.1 Radioaktivität

3.1.1 Zerfallsgesetze

Zerfallswahrscheinlichkeit:

$$P = \text{const.}\Delta t = \frac{\Delta N}{N}$$

($N =$ Teilchenzahl). Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ A(t) &= \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N(t) \quad \textit{Aktivität}, \end{aligned}$$

λ heißt *Zerfallskonstante*. Die Einheit von A ist *Becquerel* (Zerfälle pro Sekunde).

BEISPIELE: Aus der Umwelt:

Granit: $A \approx 1000$ Bq/ kg
Tonschiefer: $A \approx 700$ Bq/ kg
Gartenerde: $A \approx 400$ Bq/ kg

Im Haus:

Radon in der Luft: $A \approx 50$ Bq/ m^3
Leitungswasser: $A \approx 30$ Bq/ Liter
Kalium im Körper: $A \approx 4500$ Bq

Weitere Größen:

$$\begin{aligned} t_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \textit{Halbwertzeit} \\ \tau &= \frac{1}{\lambda} \quad \text{(mittlere) } \textit{Lebensdauer} \\ \Gamma &= \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\lambda \quad \textit{Halbwertbreite} \end{aligned}$$

3.1.2 α-Zerfall

Voraussetzung:

$$Q = (m(Z, A) - m(Z-2, A-4) - m_\alpha)\,\mathrm{c}^2 > 0,$$

dann ist

$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m(Z-2,A-4)}}.$$

Zuammenhang zwischen $t_{1/2}$ und E_α:

X	$t_{1/2}$	E_α
$^{212}\mathrm{Po}$	$0,3\mu$ sec	$8,8$ MeV
$^{238}\mathrm{Pu}$	877 a	$5,6$ MeV
$^{238}\mathrm{U}$	$4,5\cdot 10^9$ a	$4,3$ MeV

Beobachtungen beim α-Zerfall:
Linienspektren $\Rightarrow$ Zweikörperzerfall.
Zusammenhang:

$$\ln\lambda = A + B\log R_\alpha = \tilde{A} + \tilde{B}\log E_\alpha$$

Interpretation von Gamow, London, Henry (1928):

1. Im Mutterkern bildet sich ein α-Zustand mit Wahrscheinlichkeit λ_α.

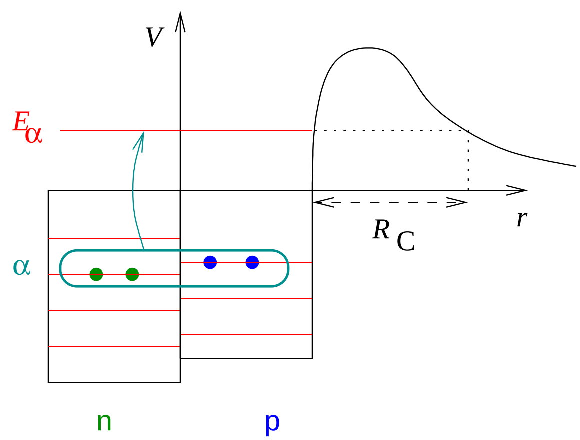


Abbildung 24: Coulomb-Schwelle

Es entsteht ein gebundenes System $Y+\alpha$. Spontaner Zerfall kann vorkommen, wenn $E_\alpha > V_C(R_0)$ mit dem Coulomb-Potential

$$V_C(R_0) = \frac{2Z_Y e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}$$

und dem Kernradius R_0.

BEISPIEL: Zerfall von Uran:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \to {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + \alpha$$

Man erhält:

$$V_C = \frac{1,44\ \text{MeVfm}\cdot 90\cdot 2}{1,2\cdot\sqrt[3]{234}\ \text{fm}} = 35\ \text{MeV} \gg E_\alpha = 4,27\ \text{MeV}$$

2. α-Teilchen tunnelt durch die Coulomb-Schwelle:

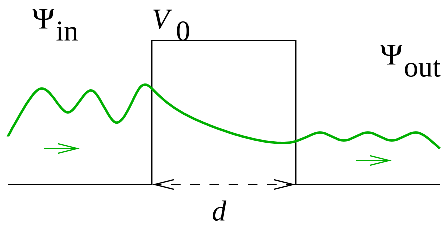


Abbildung 25: Durchtunneln eines Potentials

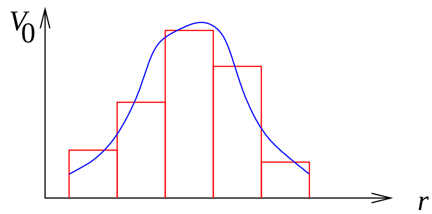


Abbildung 26: Annäherung durch Stufen

- Eindimensional (Abb. 25):
  Vergleiche $|\Psi_{\text{in}}|^2$ mit $|\Psi_{\text{out}}|^2$ (berücksichtige Stetigkeit): Die *Transmissionwahrscheinlichkeit* T ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(V_C - E\alpha)}d}$.
- Dreidimensional (Abb. 26):
  T ist proportional zu $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{R_C}} \sqrt{2m(V_C(r) - E_\alpha)}\mathrm{d}r$.
- α-Zerfall: $T_\alpha = \mathrm{e}^{-G}$. Mit dem *Gamow-Faktor*

$$G = \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_\alpha}}\frac{2Z_Y e^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

3. *Stoßfrequenz*:

$$f = \frac{v_\alpha}{2R_0} \approx 10^{20}...10^{21}\frac{\text{Stöße}}{\text{sec}}$$

(R_0 Kernradius, v_α Geschwindigkeit des α-Teilchens).

Daraus folgen:

$$\lambda = \lambda_\alpha T_\alpha f,$$
$$\ln t_{1/2} \sim \ln\frac{1}{\lambda} \sim G \sim \frac{1}{\sqrt{E_\alpha}}.$$

3.1.3 β-Zerfall

1914 Chadwick: e^+, e^--Abstrahlung mit kontinuierlichem Spektrum.

Mysterium: Wo kommen e^+, e^- her? Warum kontinuierliche Spektren?

Diskussion: Energie und Impuls nicht erhalten.

BEISPIEL:

$$\begin{array}{ccc} {}^{212}_{83}\mathrm{Bi} & \xrightarrow{\beta_1} & {}^{212}_{84}\mathrm{Po} \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ {}^{208}_{81}\mathrm{Ti} & \xrightarrow{\beta_2} & {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} \end{array}$$

$E_{\text{max}}(\beta) = E(\alpha) = (m({}^{212}_{83}\mathrm{Bi}) - m({}^{208}_{82}\mathrm{Pb}) - m_\alpha - m_{\mathsf{e}^-})\mathrm{c}^2 = 11,2$ MeV.

Erwartung, falls β-Zerfall ein Zweikörperzerfall:
Für ug-Kern ($I = \frac{1}{2}$) $\rightarrow$ gu-Kern ($I = 0, 1$), da E^+, E^--Spin $\frac{1}{2}$. Dies wurde aber nie beobachtet!

Also machte Pauli 1938 den Vorschlag:
Der β-Zerfall ist ein Dreiteilchenzerfall mit *Neutrino* ν.

Eigenschaften des ν:

- $Z = 0$, da ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A}_{Z\pm1}Y + \beta^\mp + \nu$.
- Masse sehr klein: $m_{\nu_\mathsf{e}} \lesssim 2$ eV/c^2.

Elementarer Prozess:

$$\mathsf{n} \rightarrow \mathsf{p} + \mathsf{e}^- + \overline{\nu}_\mathsf{e} + 0,8 \text{ MeV}$$

(falls n frei: $\tau_\mathsf{n} \approx 900$ sec). Der umgekehrte Prozess ist für freies p nicht möglich, da $m_\mathsf{n} > m_\mathsf{p} + m_\mathsf{e}$.

β-Zerfälle im Kern:

1. β^--Zerfall:

$$^A_Z X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + \beta^- + \overline{\nu}_\mathsf{e}$$

Energiedifferenz:

$$\begin{aligned} \Delta E &= ((M(Z,A) - Zm_\mathsf{e}) - (M(Z+1,A) - (Z+1)m_\mathsf{e}) - m_\mathsf{e})\,\mathrm{c}^2 \\ &= (M(Z,A) - M(Z+1,A))\,\mathrm{c}^2 > 0, \end{aligned}$$

dabei ist $M(Z,A)$ die Atommasse von ${}^A_Z X$ und $m_\nu \approx 0$.

$$E_0 = E_{\text{kin,tot}} = E_\mathsf{e} + E_\gamma = \Delta E - m_\mathsf{e}\mathrm{c}^2.$$

2. β^+-Zerfall:

$$^A_Z X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + \beta^+ + \nu_\mathsf{e}$$

Energiedifferenz:

$$\begin{aligned} \Delta E &= ((M(Z,A) - Zm_\mathsf{e}) - (M(Z-1,A) - (Z-1)m_\mathsf{e}) - m_\mathsf{e})\,\mathrm{c}^2 \\ &= (M(Z,A) - M(Z-1,A))\,\mathrm{c}^2 - 2m_\mathsf{e}\mathrm{c}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

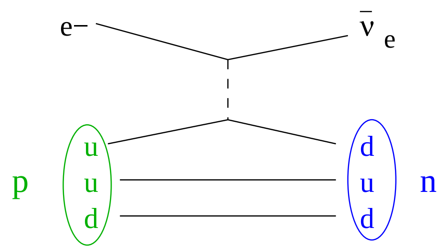
3. *Elektroneneinfang* (engl. *electron capture*, EC):

   Wenn β^+-Zerfall energetisch nicht möglich ist:

$$^{A}_{Z}X + \mathsf{e}^- \overset{\text{EC}}{\rightarrow} {}^{A}_{Z-1}Y + \nu_{\mathsf{e}},$$

   das Elektron stammt dabei aus der Atomhülle, $\Psi(r=0) \gtrsim 0$.

   Fundamentaler Prozess:



   Energiedifferenz:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left((M(Z,A) - Zm_{\mathsf{e}}) + m_{\mathsf{e}} - (M(Z-1,A) - (Z-1)m_{\mathsf{e}}) - m_{\mathsf{e}}\right)\mathrm{c}^2 \\ &= \left(M(Z,A) - M(Z-1,A)\right)\mathrm{c}^2 > 0.\end{aligned}$$

   BEISPIEL:

$$^{7}\mathrm{Be} \underset{t=53\ \mathrm{d}}{\overset{\text{EC}}{\rightarrow}} {}^{7}\mathrm{Li} + \nu_{\mathsf{e}} + 8,6\ \text{keV},$$

   $^{7}\mathrm{Be}$ ohne Elektronenhülle ist stabil.

   Indirekter Nachweis des Neutrino von Rodenback und Allen (1952):
   K-Einfang des $^{37}\mathrm{Ar}$:

$$^{36}\mathrm{Ar} \underset{t=35\ \mathrm{d}}{\overset{\text{EC}}{\rightarrow}} {}^{34}\mathrm{Cl} + \nu_{\mathsf{e}} + \underbrace{0,82\ \text{MeV}}_{=Q}.$$

   Kinematik: $^{37}\mathrm{Ar}$ ist in Ruhe $\Rightarrow E_\nu + E_{\mathrm{Cl}} = Q, \boldsymbol{p}_\nu + \boldsymbol{p}_{\mathrm{Cl}} = 0$.
   Mit $\boldsymbol{p}_{\mathrm{Cl}}^2 = \frac{1}{\mathrm{c}^2}(E^2 - (m_0\mathrm{c}^2)^2) = \frac{1}{\mathrm{c}^2}(E_{\text{kin}}^2 + 2E_{\text{kin}}m_0\mathrm{c}^2)$ folgt:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_{\mathrm{Cl}}^2 &\approx \frac{1}{\mathrm{c}^2}2E_{\mathrm{Cl}}m_{\mathrm{Cl}}\mathrm{c}^2 \\ \boldsymbol{p}_\nu^2 &\approx \frac{1}{\mathrm{c}^2}E_\nu^2 \quad (\text{da } m_\nu \approx 0) \\ 2E_{\mathrm{Cl}}m_{\mathrm{Cl}}\mathrm{c}^2 &\approx Q \\ \Rightarrow E_{\mathrm{Cl}} &= \frac{Q^2}{2m_{\mathrm{Cl}}\mathrm{c}^2} = 9,7\ \text{eV}\end{aligned}$$

   Der Messprozess läuft wie folgt ab: Nach dem EC fällt ein Elektron aus einer höheren Schale in die K-Schale. Dabei wird ein Photon abgstrahlt, das ein Elektron (das *Auger-Elektron*) aus der Hülle des Atoms löst. Das Cl^+ wandert zum negativ geladenen Gitter.

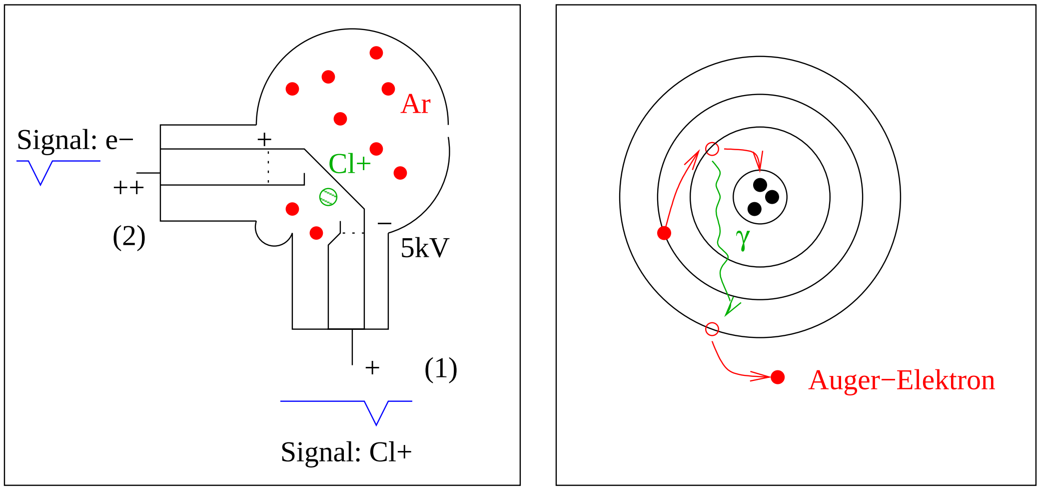
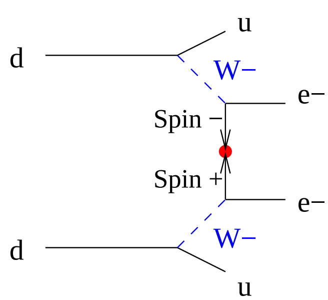


Abbildung 27: Links: Das Cl^+ wird bei (1) gemessen, dass Auger-Elektron bei (2). Rechts: Erzeugung des Auger-Elektrons.

4. Doppelter β-Zerfall:
$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+2}Y + 2\mathrm{e}^- + 2\overline{\nu}_\mathrm{e} $$
(gg-Kerne, die nicht in uu-Kerne zerfallen können).
Beispiel:
$$ {}^{76}\mathrm{Ge} \to {}^{76}\mathrm{Se} + 2\mathrm{e}^- + 2\overline{\nu}_\mathrm{e} $$

5. Sonderfall: neutrinofreier doppelter β-Zefall (bislang nicht beobachtet):
$$ {}^{A}_{Z}X \to {}^{A}_{Z+2}Y + 2\mathrm{e}^- $$
Erklärung:



Problem: $\Delta L = 2$ ($L =$Leptonenzahl). Helizität nicht erhalten!

Die Fermi-Theorie des β-Zerfalls:

1. Ausgangspunkt: Fermis *Goldene Regel*
$$ W = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 |M|^2 \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_0}, $$

dabei ist $G_F = 1,16 \cdot 10^{-5}/\,\mathrm{GeV}^2$ (mit $\hbar = 1 = \mathrm{c}$) die *Kopplungskonstante*, $|M|^2 = |\langle f|\mathscr{H}|i\rangle|^2$ das Matrixelement und $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E_0}$ die Zustandsdichte.
Für β-Zerfall: $q^2 \ll m_W^2$

$$|M|^2 \approx 1 \text{ für } \uparrow_\mathsf{n} \rightarrow \uparrow_\mathsf{p} + \downarrow_{\mathsf{e}^-} \uparrow_{\overline{\nu}} \qquad \text{(\textit{Fermi-Übergang})}$$
$$|M|^2 \approx 3 \text{ für } \uparrow_\mathsf{n} \rightarrow \downarrow_\mathsf{p} + \uparrow_{\mathsf{e}^-} \uparrow_{\overline{\nu}} \qquad \text{(\textit{Gamow-Teller-Übergang})}$$

2. Im Phasenraum: $X \rightarrow Y + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$.
   $E_\mathrm{e} + E_\nu = E_0 (= E_\mathrm{max})$, denn $E_Y \ll E_\mathrm{e}, E_\nu$.

$$\Rightarrow p_\nu = \frac{1}{\mathrm{c}}(E_0 - E_\mathrm{e}), \mathrm{d}p_\nu = \frac{1}{\mathrm{c}}\mathrm{d}E_0 \quad (v_\nu \approx \mathrm{c})$$
$$\mathrm{d}n_\mathrm{e} = \left(\frac{Vp_\mathrm{e}^2}{2\hbar^3\pi^3}\mathrm{d}p\right) = \left(\frac{V4\pi p_\mathrm{e}^2 \mathrm{d}p_\mathrm{e}}{h^3}\right)$$

(für ein Teilchen gilt: $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$).

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 n_\mathrm{e}}{\mathrm{d}E_0^2} &= \left(\frac{\mathrm{d}n_\mathrm{e}\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}E_0^2}\right) \\ &= \left(V^2 \frac{16\pi^2 p_\mathrm{e}^2 p_\nu^2}{h^6}\mathrm{d}p_\mathrm{e}\mathrm{d}p_\nu\right) \\ &= V^2 \frac{16\pi^2}{h^6 \mathrm{c}^2} p_\mathrm{e}^2 (E_0 - E_\mathrm{e})^2 \mathrm{d}p_\mathrm{e} \\ W &= n(p_\mathrm{e})\mathrm{d}p_\mathrm{e} \sim p_\mathrm{e}^2 (E_0 - E_\mathrm{e})^2 \mathrm{d}p_\mathrm{e}. \end{aligned}$$

Zusätzliche Faktoren:

- Berücksichtige Coulomb-Wechselwirkung im Kern: $f(Z, p_\mathrm{e})$.
- Berücksichtige Neutrinomasse: $\sqrt{1 - (\frac{m_\nu \mathrm{c}^2}{E_0 - E_\mathrm{e}})^2}$.

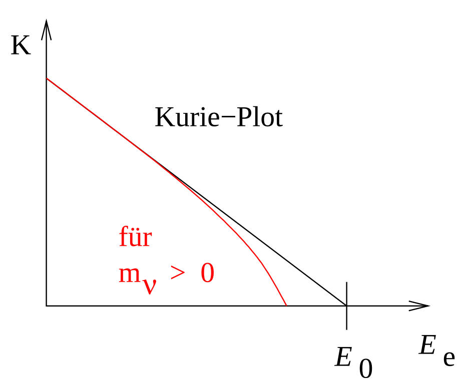


Abbildung 28: Die Abweichung von E_0 ist $E_0 - m_\nu \mathrm{c}^2$. So kann man die Masse des Neutrinos bestimmen.

Wie bekommt man p_e? Siehe Abb. 29.

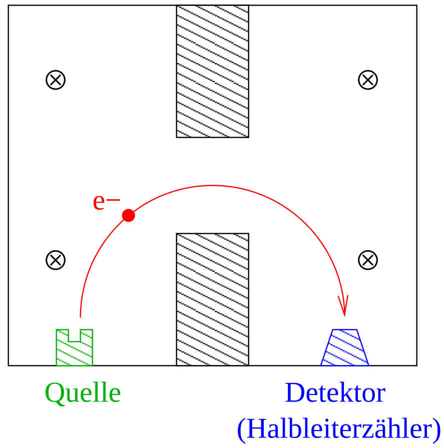


Abbildung 29: Bestimmung von p_e mit Hilfe eines Magnetfeldes

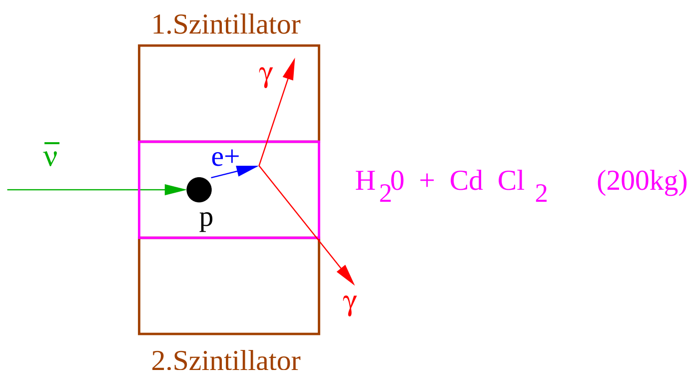


Abbildung 30: Neutrinodetektor

Experimenteller Nachweis des Neutrinos:

Reimes, Cowan (1953...1959): Neutrinostrahlung (mit $10^{13}\overline{\nu}/$ cm^2 s) bekam man aus dem Savanna River-Reaktor. Der Detektor (Abb. 30) befand sich unter dem Reaktorkern.

$$\begin{aligned} &\overline{\nu}_\mathsf{e} + \mathsf{p} \to \mathsf{n} + \mathsf{e}^+ \\ \text{und } &\mathsf{n} + {}^{114}\mathrm{Cd} \to {}^{115}\mathrm{Cd}^* \to {}^{115}\mathrm{Cd} + n \cdot \gamma \text{ (je } 9,1 \text{ MeV)} \\ \text{und } &\mathsf{e}^+ + \mathsf{e}^- \to \gamma + \gamma \text{ (je } 511 \text{ keV)} \end{aligned}$$

Es ist $\dot{N}_\gamma \approx 3/$ h und

$$\sigma(\overline{\nu}_\mathsf{e} + \mathsf{p} \to \mathsf{n} + \mathsf{e}^+) = \frac{\dot{N}_\gamma}{\text{Akzeptanz} \cdot \text{Effizienz}} = 10^{-43} \text{ cm}^2$$

$\Rightarrow$ MFW für MeV-Neutrinos: 100 ly Wasser.

Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung

Erinnerung: Naturgesetze sollten P-symmetrisch sein.
Wu (1956): Studium der β^--Emission von ${}^{60}\mathrm{Co}$ (die Indizes R bzw. L bezeichnen Rechts- bzw. Linkshändigkeit).

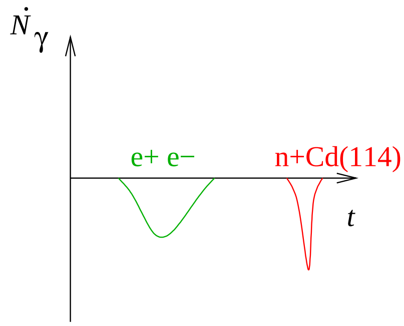


Abbildung 31: Messung an den Szintillatoren

Erwarte: Beim β^--Zerfall ist die Intensität von $\overline{\nu}_R + \mathrm{e}_L^-$ gleich der Intensität von $\overline{\nu}_L + \mathrm{e}_R^-$.

Experiment (Abb. 32):

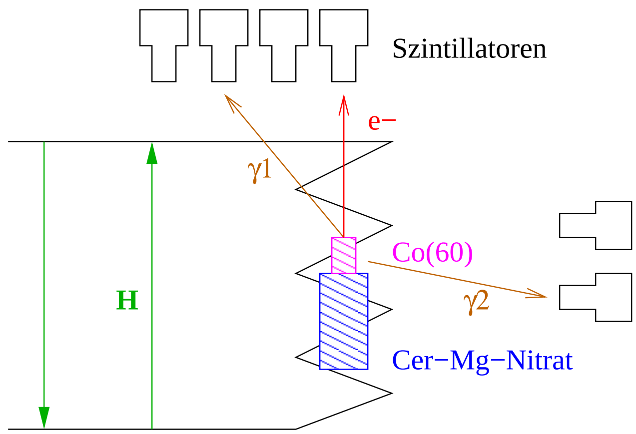


Abbildung 32: Aufbau des Experimentes

- Ausrichtung des $^{60}\mathrm{Co}$ im Magnetfeld H. $T \approx 0,01$ K, damit $kT < \boldsymbol{\mu}_I \cdot \boldsymbol{B}$.
- Kontrolle der Spin-Ausrichtung (Abb. 33, links).
- Zähle e^- in Abhängigkeit von T (Abb. 33, rechts).

Beobachtungen: e^- werden bevorzugt entgegen $^{60}\mathrm{Co}$-Spin ausgesandt: $\mathrm{e}_L^-, \overline{\nu}_R$.
Helizität:

$$h(\mathrm{e}^-) = \frac{\boldsymbol{p}_\mathrm{e} \cdot \boldsymbol{s}_\mathrm{e}}{|\boldsymbol{p}_\mathrm{e}| \cdot |\boldsymbol{s}_\mathrm{e}|} = \frac{-v_\mathrm{e}}{\mathrm{c}} < 0 \qquad (L)$$

$$h(\overline{\nu}) = \frac{\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}} \cdot \boldsymbol{s}_{\overline{\nu}}}{|\boldsymbol{p}_{\overline{\nu}}| \cdot |\boldsymbol{s}_{\overline{\nu}}|} = \frac{v_{\overline{\nu}}}{\mathrm{c}} > 0 \qquad (R)$$

Hintergrund: Schwache Wechselwirkung (W-, Z-Bosonen) nur zwischen linkshändigen Teilchen, rechtshändigen Antiteilchen.

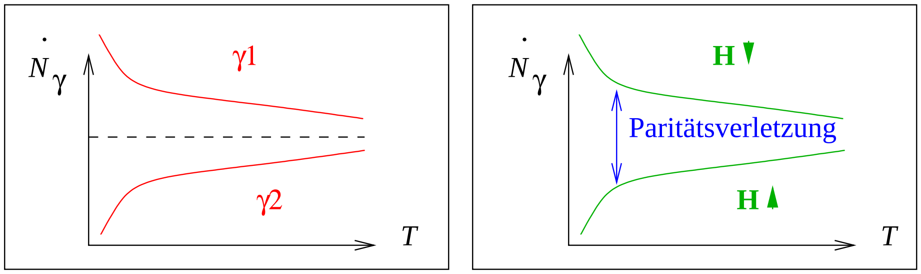


Abbildung 33: zum Experiment zur Paritätsverletzung

3.1.4 γ-Zerfall

Elektromagnetische Abregung angeregter Kerne.

$$^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$$

Sonderfälle:

- Innere Konversion:

$$^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \mathsf{e}^-$$

(*Konversionselektron*, ähnlich wie Auger-Elektron). Typisch, wenn freie γ-Emission verboten ist.

BEISPIEL:

$$^{72}_{32}\mathrm{Ge}^* \rightarrow ^{72}_{32} \mathrm{Ge} + \mathsf{e}^- + 691\ \mathrm{keV}$$

- Innere Paarbildung:

Emission von e^+, e^--Paaren möglich, falls $\Delta E_\mathrm{B} > 2m_\mathsf{e}\mathrm{c}^2$.

BEISPIEL:

$$^{16}_{8}\mathrm{O}^* \rightarrow ^{16}_{8} \mathrm{O} + \mathsf{e}^- + \mathsf{e}^+ + 6,06\ \mathrm{MeV} - \underbrace{1,04\ \mathrm{MeV}}_{=2m_\mathsf{e}}$$

Anwendung: Resonanzabsorption von γ-Strahlen = Kernfluoreszenz (*Mößbauer-Effekt*).

$^A_Z X^*$ fällt unter Aussendung von γ auf ein niedrigeres Energieniveau. Der umgekehrte Effekt (d.h. durch Anregung mit γ auf ein höheres Energieniveau) ist bei Kernen nicht möglich!

Berechne Energien:

1. Rückstoß des Kerns:

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} m_A v_\mathrm{r}^2 = \frac{E_\gamma}{2m_A\mathrm{c}^2}$$
$$E_{\gamma'} = E_0 - E_\mathrm{r}$$

BEISPIEL:

$^{57}\mathrm{Fe}: \quad E_0 = 14,4\,\mathrm{keV}, \tau = 1,4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} \Rightarrow \Gamma = 4,7\cdot 10^{-9}\,\mathrm{eV}, E_\mathrm{r} = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$

(Γ ist die *Partialbreite* der Dämpfung).

2. ${}^A_Z X + \gamma'$: Rückstoß des absorbierenden Kerns: E_r.

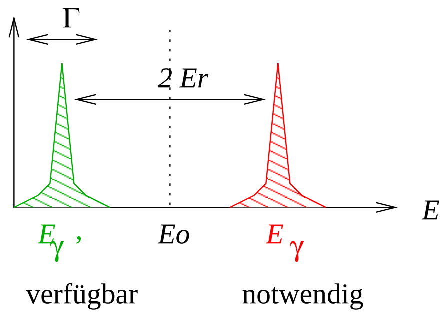


Abbildung 34: E_γ notwendig, damit γ' absorbiert wird

Berücksichtigung der thermischen Bewegung:

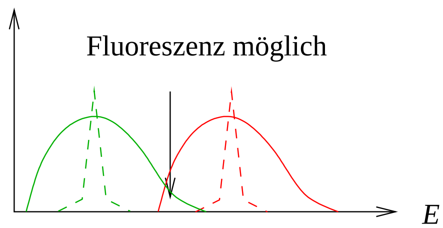


Abbildung 35: Dopplerverschmierung macht Fluoreszenz möglich

- Mößbauereffekt (1958): Einbindung in Kristallgitter: Gitterschwingung $\Rightarrow$ Rückstoßenergie gequantelt.

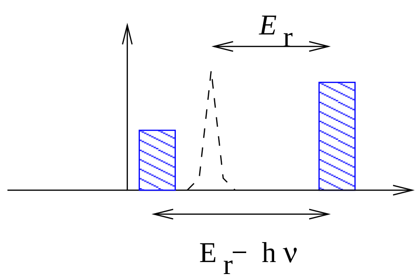


Abbildung 36: gequantelte Rücktoßenergie beim Mößbauereffekt

ca. 60% haben „keinen“ Rückstoß (d.h. das ganze Gitter trägt den Rückstoß).

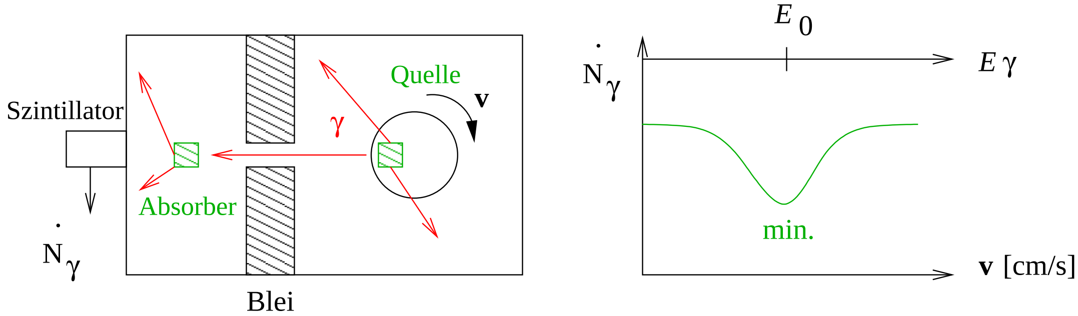


Abbildung 37: Versuchsaufbau zur Messung von $\dot{N}_\gamma$. Minimal bei E_0.

Experiment: Abtastung einer natürlichen γ-Linie mit Hilfe des Dopplereffektes. Erzeugung der γ-Quelle $^{191}\mathrm{Os}$ aus Neutronenstrahlung eines Reaktors.

$$^{191}\mathrm{Os} \xrightarrow{\beta} {}^{191}\mathrm{Ir}^* \xrightarrow{2\gamma} {}^{191}\mathrm{Ir} + 42\ \mathrm{keV} + 129\ \mathrm{keV}$$

$E_\gamma = 129$ keV, $E_\mathrm{r} = 4,6 \cdot 10^{-2}$ eV.

Anwendungen:

- HFS-Analysen.
- Isomerieverschiebungen.
- Relativistische Effekte.

Experiment von Pound und Rebka zur Bestimmung des Gewichts von Lichtquanten (1960):

$$p_\gamma = m_\gamma \mathrm{c} = \frac{h\nu}{\mathrm{c}} \Rightarrow m_\gamma = \frac{h\nu}{\mathrm{c}^2}$$

(träge Masse von Photonen $=$ schwere Masse).

Bei „Fall“ im homogenen Gravitatiosnfeld erwarten wir:

$$\Delta E_\gamma = m_\gamma \mathrm{g} \Delta h = \frac{h\nu}{\mathrm{c}^2} \mathrm{g} \Delta h = \frac{h \Delta \nu}{\mathrm{c}}$$

Quelle: $^{57}\mathrm{Fe}$: $h\nu_0 = 14,4$ keV.
erwarte: $\Delta h\nu = \frac{14{,}4\ \mathrm{keV} \cdot 9{,}9\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 20\ \mathrm{m}}{9 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m/s}^2} = 3,1 \cdot 10^{-11}$ eV.

$$\frac{\Delta h\nu}{h\nu_0} = 2 \cdot 10^{-15}$$

bis auf 10% genau nachgewiesen.

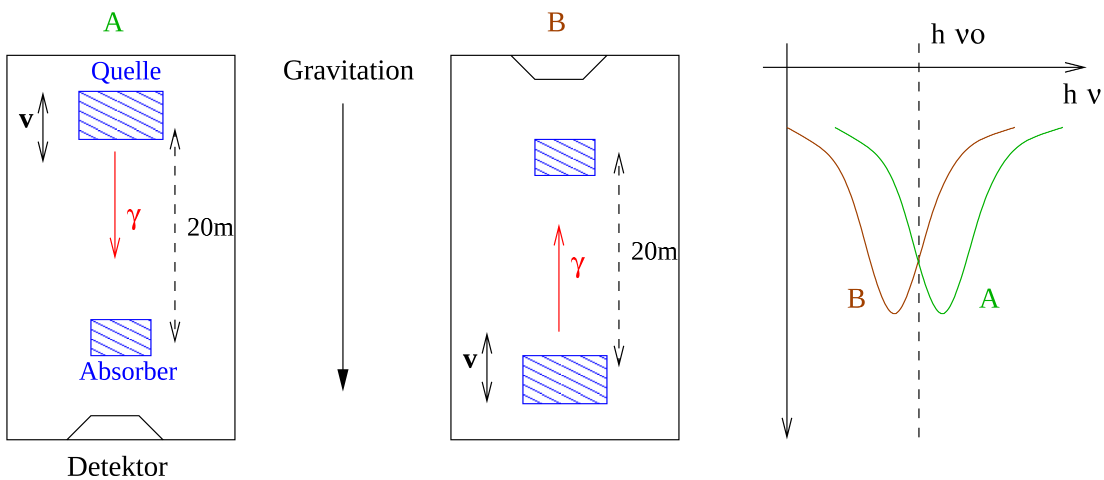


Abbildung 38: Photonen im Gravitationsfeld, vergleiche A und B

3.1.5 Anwendung der Radioaktivität

Alterbestimmung mit der ^{14}C-*Methode*:

- In der Atmosphäre läuft folgender Prozess ab:

$$^{14}\mathrm{N} + \mathsf{p} \to {}^{14}\mathrm{C} + \mathsf{n}$$

(p kommt aus der Höhenstrahlung). Es ist $\tau(^{14}\mathrm{C}) = 5730$ a.
Aufnahme des ^{14}C in organischen Substanzen.

- Nach Ende der Stoffaufnahme (z.B. Tod):

$$^{14}\mathrm{C} \to {}^{13}\mathrm{C} + \mathsf{e}^- + \nu + 155\ \mathrm{keV}$$

$R := \frac{N(^{14}\mathrm{C})}{N(^{12}\mathrm{C})}$ ändert sich $\Rightarrow$ Alter.
$R_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ (vor 1950, inzwischen durch verschieden Einflüsse geändert).

3.2 Kernspaltung

Geschichte:

1938/-39: zufällige Entdeckung durch Hahn und Straßmann.
1939: korrekte Interpretation durch Meitner, Fritsch.
1942: erste kontrollierte Kernspaltung durch Fermi in Chicago (mit der „bloßen Hand“).
1945: Atombomben am 6. und 9. August.

3.2.1 Voraussetzungen für spontane Spaltung

$$Q = M(Z, A) - M(Z_X, A_X) + M(Z_Y, A_Y) > 0$$

Energiegewinn durch Deformation. mit *Deformationsparameter* ε.

$$a = R(1+\varepsilon), b = \frac{R}{\sqrt{1+\varepsilon}} \approx R(1 - \frac{\varepsilon}{2})$$

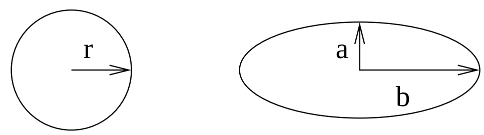


Abbildung 39: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2$

Es gilt: Volumen $V = \text{const.}$, Oberfläche $S = 4\pi R^2(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + ...)$. Für die Bindungsenergie folgt:

$$\begin{aligned}
E_S &= -a_S A^{\frac{2}{3}}(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + ...) \quad \text{Oberflächenterm} \\
E_C &= -a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + ...) \quad \text{Coulomb-Term} \\
\Delta E &= \frac{1}{5}\left(a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - 2a_S A^{\frac{2}{3}}\right)\varepsilon^2 \overset{!}{>} 0 \quad \text{für spontane Spaltung} \\
&\hat{=} X_\mathrm{s} = \frac{a_C Z^2}{2a_S A} > 1
\end{aligned}$$

(X_s ist der *Spaltparameter*), dies ist erfüllt bei $\frac{Z^2}{A} > 51 \Rightarrow A = 270, Z = 115$. Solche Elemente gibt es nicht (mehr, da sie schon früher zerfallen sind).

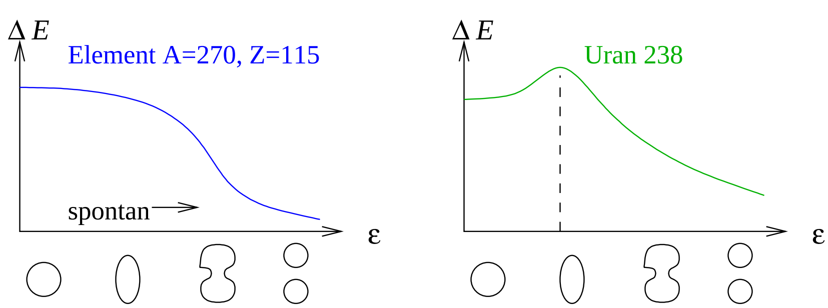


Abbildung 40: Deformation eines Kerns, im wesentlichen Effekt der Coulombabstoßung

Beispiel: In der Natur kommt ^{238} U vor:

$$\frac{Z^2}{A} = 35,6, \varepsilon = 0,3, X_\mathrm{s} = 0,7$$

Für die Spaltung (mit Tunneleffekt) ist $t_{1/2} = 10^{18}$ a.
Aber für α-Zerfall nur $t_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ a. Die zu überwindende Spaltbarriere ist $6,3$ MeV.

Im Falle von $^{235}_{92}\mathrm{U}$ liegt die Spaltbarriere bei $5,8$ MeV.

3.2.2 Uranspaltung

Ausgelöst durch Neutroneneinfang:

$$^{238}\mathrm{U} + \mathsf{n}_{\text{thermisch}} \to {}^{239}\mathrm{U} + 4,8 \text{ MeV}$$
$$^{235}\mathrm{U} + \mathsf{n}_{\text{thermisch}} \to {}^{236}\mathrm{U}^* + 6,4 \text{ MeV} \to X^* + Y^* + \overline{\nu}_{\mathsf{e}} + k \cdot \mathsf{n} + 204 \text{ MeV}$$

X, Y stehen dabei für variable Zerfallsprodukte, häufig kommen z.B. $^{36}\mathrm{Kr}$, $^{56}\mathrm{Ba}$ vor, es sind aber etwa 300 Zerfallskombinationen bekannt.

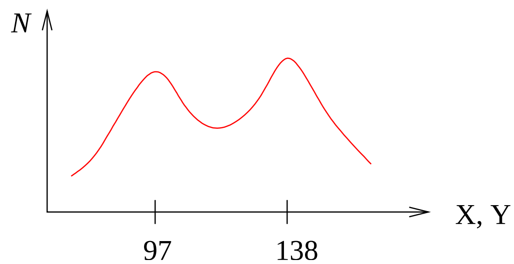


Abbildung 41: Häufigkeit der möglichen Zerfallsprodukte X, Y

Beispiel eines Fragmentes:

$$^{137}_{53}\mathrm{I} \xrightarrow{\beta} {}^{137}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta} {}^{137}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta} {}^{137}_{56}\mathrm{Ba}$$

3.3 Kernkraftwerke

3.3.1 Energiebilanz bei der Spaltung von $^{235}\mathrm{U}$

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Spaltfragmente} & 167 \text{ MeV} \\ \text{Spaltneutronen} & 5 \text{ MeV} \\ \text{prompte Neutronen} & 6 \text{ MeV} \\ \beta\text{-}, \gamma\text{-Strahlung der Fragmente} & 14 \text{ MeV} \end{array}\right\} = \text{nutzbare Energie}$$

und nicht nutzbare 12 MeV der $\overline{\nu}$.

Es entspricht

$$1 \text{ g } {}^{235}\mathrm{U} \mathrel{\hat{=}} 2 \text{ MWh thermischer Energie},$$
$$1 \text{ g } \mathrm{C} \mathrel{\hat{=}} 8 \text{ Wh thermischer Energie}.$$

3.3.2 Betrieb durch Kettenreaktion

$$
\begin{aligned}
{}^{235}\mathrm{U} + \mathsf{n} \rightarrow {}^{236}\mathrm{U}^* &\rightarrow X + Y + 2...4\ \mathsf{n}(+\overline{\nu}) \\
&\underset{\text{oder}}{\rightarrow} {}^{236}\mathrm{U} + \gamma
\end{aligned}
$$

Maximiere σ_{Spaltung}, damit ein Neutron spaltet und mehr als ein Neutron für weitere Spaltungen freisetzt.

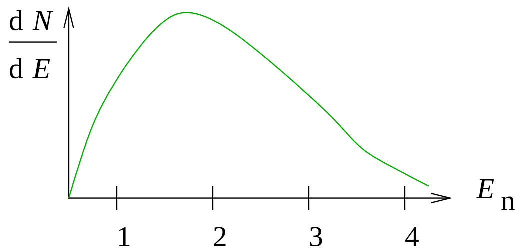


Abbildung 42: Energie der n, die aus der Spaltung kommen, $\langle E_{\mathsf{n}} \rangle = 1,9$ MeV

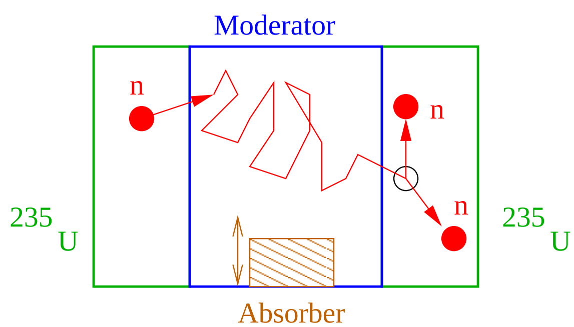


Abbildung 43: Ablauf der Kettenreaktion

Der *Moderator* bremst die Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten, um weitere Spaltungen zu ermöglichen. Der *Absorber* (z.B. Graphit, Barium) dient zur Kontrolle des Prozesses.

Die Kettenreaktion ist auch ohne Moderator möglich, wenn die *kritisches Masse* überschritten wird. Im Falle von ${}^{235}\mathrm{U}$ sind das ≈ 50 kg.

3.4 Kernfusion

- Big Bang
- Sterne, Supernovae
- Wasserstoffbombe
- Reaktoren

3.4.1 Energiegewinnung

Deuterium-Tritium-Prozess:

$$\mathrm{d} + \mathrm{t} \Rightarrow \alpha + \mathsf{n} + \underbrace{3,5\ \text{MeV}}_{\text{für } \alpha} + \underbrace{14,1\ \text{MeV}}_{\text{für } \mathsf{n}}$$

Vorteile gegenüber Spaltung: Mehr Energie pro Nukleon; d, t in großen Mengen vorhanden.

Deuterium d: $0,015\%$ im Wasser (durch Ionisation gewinnen).
Tritium t: $\mathsf{n} + {}^6_3\mathrm{Li} \to {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{t}(+4,6\ \text{MeV})$, mit $t_{1/2} = 12,3$ a.

Voraussetzung für kontrollierte Kernfusion:

- $k_B T(\mathrm{d}, \mathrm{t}) > 19$ keV($\Rightarrow T > 10^8$ K) zur Überwindung der Coulomb-Barriere.
- *Fusionsrate* pro Volumen:

$$\dot{N} = n_\mathrm{d} \cdot n_\mathrm{t} \cdot \underbrace{\langle v \cdot \sigma(\mathrm{t}, \mathrm{d}) \rangle}_{\text{relative Geschwindigkeit}} = \frac{n^2}{4} \langle v \cdot \sigma(\mathrm{t}, \mathrm{d}) \rangle$$

  n_d bzw. n_t ist die Teilchendichte von d bzw. t und $n = n_\mathrm{d} + n_\mathrm{t} = n_\mathsf{e}$.

  $\Rightarrow$ *Leistungsdichte*

$$P_{\mathrm{d,t}} = \dot{N} \cdot Q_{\mathrm{d,t}} \left(\overset{!}{>} P_{\text{Verlust}} = g n^2 \sqrt{T} \right)$$

  Aufheizung des Plasmas durch α und Energie der n. Verluste entstehen z.B. durch die Bremsstrahlung der e^- im Plasma.

  $\Rightarrow$ *Zündparameter*

$$Z = n \cdot \tau_\mathrm{E} \cdot k_B \cdot T$$

  τ_E ist die Einschlusszeit. Für $Z > 10^{21}$ keVs/ m^3 ist Fusion möglich.

3.4.2 Reaktortypen

1. Magnetischer Einschluss:

   Ansätze:

   - Stellerator
   - Tokamak (1952 von Tamm und Sacharow)

   BEISPIEL: JET (Joint European Torus)
   $n = 10^{20}/$ m^3, $k_B T = 15$ keV, $\tau_\mathrm{E} > 1$ s.
   $\Rightarrow Z = 1,5 \cdot 10^{21}$ keVs/ m^3.
   Leistung im Betrieb: $1,7$ MW.

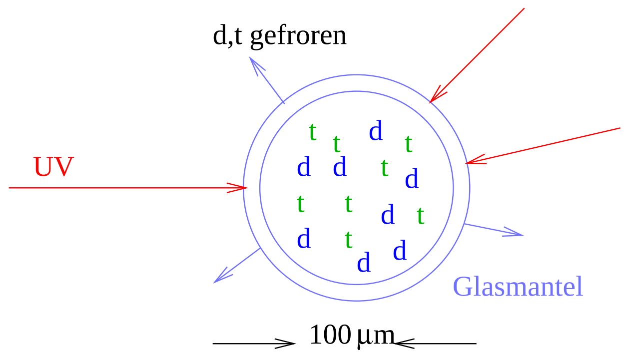


Abbildung 44: Laser-Beschuss von „Pellets“

2. Laser-induzierte Fusion (Inertialfusion):
    - Erhitzung auf 10^8 K innerhalb von 10^{-8} s.
    - Abdampfung des Glases.
    - Hundertfache Verdichtung von d, t durch Stoßwelle.

    BEISPIEL: Shiva-Nova Laser im Livermore Lab.

$$\left.\begin{array}{r} n_{\mathrm{d}}, n_{\mathrm{t}} > 10^{22}/\ \mathrm{cm}^3 \\ \tau_{\mathrm{E}} > 10^{-8}\ \mathrm{s} \\ T > 10^8 K \end{array}\right\} \Rightarrow Z > 10^{22}\ \mathrm{keV\ s}/\ \mathrm{m}^3$$

3.4.3 Energiegewinnung in Sternen

Betrachte die Sonne:

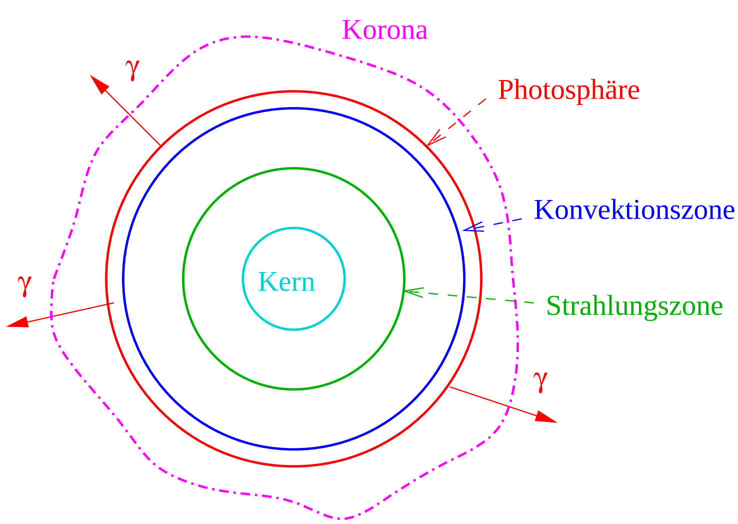


Abbildung 45: Aufbau der Sonne

$P = 1,4\,\frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$ auf der Erde (Solarkonstante).
Abstand 1 AE $= 150 \cdot 10^6$ km.
$\Rightarrow P_\odot = 4 \cdot 10^{23}$ kW.
$\varnothing$Sonne $= 9,4 \cdot 10^6$ km.
$T = 5800$ K.

Betrachte den Kern der Sonne:
$T \approx 15,6 \cdot 10^6$ K, $P \approx 10^{11}$ bar, $\varrho \approx 141\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Energieerzeugung:

1. pp-Zyklus ($98,4\%$):
   Am Anfang:

$$\begin{aligned} \mathsf{p} + \mathsf{p} &\to \mathrm{d} + \mathsf{e}^+ + \nu_\mathsf{e} + 1,19 \text{ MeV} \\ \mathsf{p} + \mathsf{p} &\to \mathrm{d} + \nu_\mathsf{e} + 1,44 \text{ MeV} \end{aligned}$$

   dann:

$$\begin{aligned} \mathrm{d} + \mathsf{p} &\to {}^3\mathrm{He} + \gamma + 5,49 \text{ MeV} \\ {}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} &\to {}^4\mathrm{He} + \mathsf{p} + \mathsf{p} + 12,85 \text{ MeV} \end{aligned}$$

   Das zuletzt entstandene p, p-Paar kann wieder zu der ersten Reaktion beitragen.

2. CNO-Zyklus ($1,6\%$):
   Zuerst:

$$\begin{aligned} {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{13}\mathrm{N} + \gamma & \\ &\to {}^{13}\mathrm{C} + \mathsf{e}^+ + \nu_\mathsf{e} \end{aligned}$$

   dann:

$${}^{13}\mathrm{C} + \mathsf{p} \to {}^{14}\mathrm{N} + \gamma$$

   und

$$\begin{aligned} {}^{14}\mathrm{N} + \mathsf{p} \to {}^{15}\mathrm{O} + \gamma & \\ &\to {}^{15}\mathrm{N} + \mathsf{e}^+ + \nu_\mathsf{e} \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} {}^{15}\mathrm{N} + \mathsf{p} &\to {}^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He} \\ {}^{12}\mathrm{C} + 4\mathsf{p} &\to {}^{12}\mathrm{C} + {}^4\mathrm{He} \end{aligned}$$

3.5 Wechselwirkung von Strahlung mit Materie

Energieverlust/Absorption durch:
Elektromagnetische Wechselwirkung mit Atomhülle oder Atomkern (z.B. $\mathsf{e}^-, \mathsf{e}^+, \mu^+, \mu^-, \gamma$).
Hadronische Wechselwirkung mit Atomkern (z.B. $h(\pi^+, \pi^-, \mathsf{p}, \mathsf{n}, \overline{\mathsf{p}}, \overline{\mathsf{n}}, \mathsf{K}^+, \mathsf{K}^-, \mathsf{K}^0)$).

3.5.1 Energieverlust für geladene Teilchen

Vorgang: Ionisation.

Klassische Beschreibung durch Bohr.
Quantenmechanische Beschreibung durch Bethe.
(Moderne) relativistische, quantenmechanische Beschreibung durch Allison und Cobb.

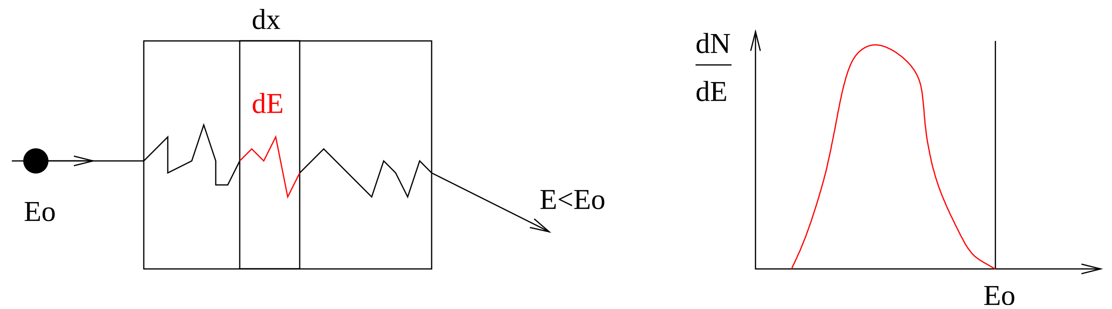


Abbildung 46: Energieverlust in $\mathrm{d}x$

Ion erfährt Coulomb-Kraft:

$$F = \frac{Z_{\text{Ion}} e^2}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + b^2)}$$

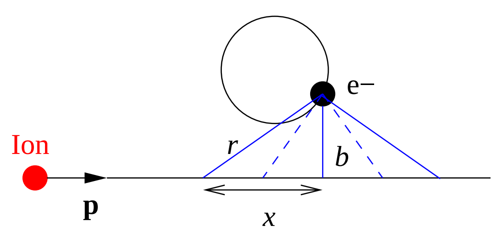


Abbildung 47: Wechselwirkung mit Elektron der Atomhülle

Impulsänderung:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F} \mathrm{d}t = \int \boldsymbol{F}_\perp \mathrm{d}t$$

(die restlichen Komponenten heben sich weg, da das Problem symmetrisch ist). Also:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \frac{1}{v} \int e \boldsymbol{E}_\perp \mathrm{d}x$$

$(\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v})$. Mit dem Gaußschen Satz

$$\int_A \boldsymbol{E} \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 2\pi b \int \boldsymbol{E}_\perp \mathrm{d}x = \frac{Z_{\text{Ion}} e}{\varepsilon_0}$$

folgt

$$\Delta p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_{\text{Ion}}e^2}{vb}.$$

Energieänderung:

$$\Delta E = \frac{\Delta p^2}{2m_{\text{e}}} = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0^2 m_{\text{e}}}\left(\frac{Z_{\text{Ion}}e}{vb}\right)^2 \qquad (*)$$

(Energieübertrag des Hüllenelektrons im Abstand b).
Für n_{e} Elektronen pro cm^3:

$$\mathrm{d}E = \left(-\int_{b_{\text{min}}}^{b_{\text{max}}}\frac{\Delta p^2}{2m_{\text{e}}}n_{\text{e}}2\pi b\mathrm{d}b\right)\mathrm{d}x \underset{(*)}{=} \left(\frac{Z_{\text{Ion}}^2 e^4 n_{\text{e}}}{4\pi\varepsilon_0^2 v^2 m_{\text{e}}}\cdot\ln\frac{b_{\text{max}}}{b_{\text{min}}}\right)\mathrm{d}x$$

mit $b_{\text{min}} = \frac{\hbar}{m_{\text{e}}v}$ (folgt aus der Unschärferelation) und $b_{\text{max}} = \frac{v}{\omega}$.

Quantenmechanisch/relativistisch korrekte Version der *Bethe-Bloch-Formel*:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -\frac{Z_{\text{Ion}}^2 e^4 n_{\text{e}}}{4\pi\varepsilon_0^2 v^2 m_{\text{e}}}\left(\ln\left(\frac{2m_{\text{e}}v^2}{\langle I\rangle(1-\beta^2)}\right) - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right)$$

$\langle I\rangle \approx Z\cdot 1,44$ MeV ist die mittlere Ionistationsenergie.

Bei kleinen (nicht relativistischen) Geschwindigkeiten: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \sim \varrho\frac{Z_{\text{Ion}}^2}{E_0}$.

Bei relativistischen Energien ($E_0 \approx 3m_{\text{Ion}}\text{c}^2$): $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 1...2\varrho\frac{\text{MeV}}{\text{g}}$ cm^2.
BEISPIEL: Für 1 cm H_2O: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} \approx 1,5$ MeV.

Bei hochrelativistischen Energien: relativistischer Anstieg dominiert, gebremst durch Polarisationseffekte im Medium.

Reichweite R im Medium:

$$\langle R\rangle = \int_{E_0}^{0}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}\mathrm{d}E \approx \frac{E_0^2}{Z_{\text{Ion}}m_{\text{Ion}}}\cdot\frac{1}{\varrho_{\text{Absorber}}}$$

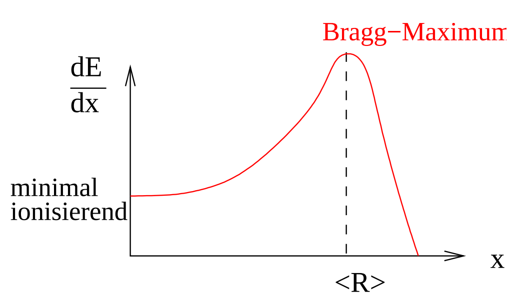


Abbildung 48: Die Verteilung von R

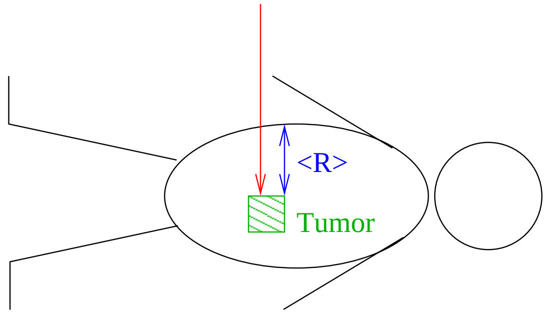


Abbildung 49: Anwendung: Gezielte Bestrahlung eines Tumors

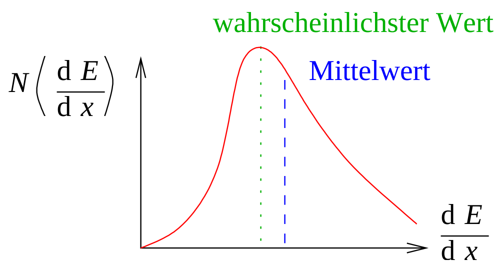


Abbildung 50: mittlerer Energieverlust folgt der *Landau-Verteilung*

Spezialfall: e^+, e^- in Materie.

- Ionisation (Bethe-Bloch)
- Bremsstrahlung nach Ablenkung im Coulomb-Feld der Kerne.

klassisch: $a = \frac{F}{m} = \frac{Z_{\text{Ion}} Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{1}{m}$, $I_{\text{Strahlung}} \sim \frac{Z_{\text{Ion}} Z^2}{m^2} \sim \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \mathrel{\hat{=}} \frac{I_{e^-}}{I_p} = \frac{m_p^2}{m_e^2} = 3 \cdot 10^6$.

Energieverlust nach der hochrelativistischen *Bethe-Heitler-Formel* :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{4 n_e Z^2 \alpha^3 (\hbar c)^2 E}{m_e c^4} \ln\left(\frac{187}{Z^{\frac{1}{3}}}\right) \sim Z^2 E$$

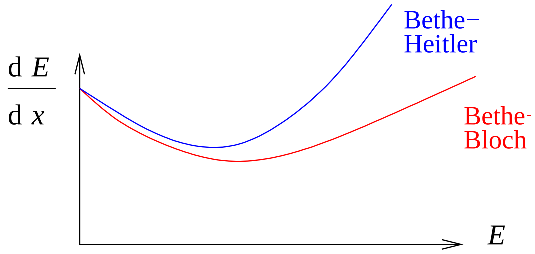


Abbildung 51: Verlauf der Bethe-Heitler- und Bethe-Bloch-Verteilung

Aus $-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{E}{x_0}$ folgt $E(x) = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{x_0}}$. Der Proportionalitätsfaktor x_0 heißt *Strahlungslänge*.

BEISPIELE:

Al	$x_0 = 9$ cm
Fe	$x_0 = 1,8$ cm
Pb	$x_0 = 0,56$ cm

3.5.2 Coulomb-Streuung

Einfache Streuung (vgl. 2.1):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Z_{\mathrm{Ion}} Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 4E_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\sin\frac{\theta}{2})^4}$$

Vielfachstreuung:
Wahrscheinlichkeit für Streuwinkel folgt der Normalverteilung:

$$\mathrm{P}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_{\mathrm{rms}}} \mathrm{e}^{-\frac{\theta^2}{2\theta_{\mathrm{rms}}}}$$

mit Streuung

$$\theta_{\mathrm{rms}} = \frac{21 \text{ MeV}}{\sqrt{2}p\beta c}\sqrt{\frac{x}{x_0}},$$

wobei x die Eindringtiefe ist.

BEISPIEL: Ein Proton mit Impuls $p = 1$ GeV$/\mathrm{c}^2$ in 1 m Argon ($x_0 = 714$ m):
$\theta_{\mathrm{rms}} = 0,5$ mrad $= 0,03°$.

3.5.3 Cerenkov-Effekt

1934: Für geladene Teilchen in Materie mit $v > \frac{\mathrm{c}}{n}$ (mit Brechungsindex n): Emission von Cerenkov-Licht.

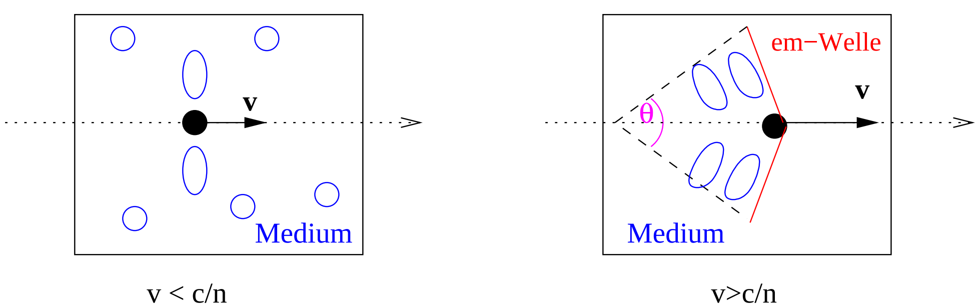


Abbildung 52: Bei $v < \frac{\mathrm{c}}{n}$: kein makroskopisches Dipolmoment; bei $v > \frac{\mathrm{c}}{n}$: elektromagnetische Welle wird erzeugt mit Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{c}}{n}$ der Wellenfront, $\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Cerenkov}} = \frac{4\pi^2 Z_{\text{Ion}} e^2}{\mathrm{c}^2} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \nu \mathrm{d}\nu$$

BEISPIEL: $H_2O : n = 1,33$
$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\text{Cerenkov}} = 0,4 \cdot 10^{-3}$ MeV/ cm, vergleiche $\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{I}} = 2$ MeV/ cm.

Für $\beta < \frac{1}{n}$: keine Cerenkov-Strahlung.

Zahl der Photonen:
$$\frac{\mathrm{d}^2 N_\gamma}{\mathrm{d}x \mathrm{d}\lambda} = \frac{2\pi Z_{\text{Ion}}^2}{\lambda^2} \frac{e^2}{\hbar \mathrm{c}} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)$$

BEISPIEL: 1 cm H_2O: $N_\gamma = 500$ (z.B. blaues Leuchten im Kühlwasser eines Reaktors).

3.5.4 Wechselwirkung von Photonen

1. *Photoeffekt*:
$$\sigma_{\text{Photo}} = \frac{4\pi r_{\mathrm{e}}^2 \alpha^2 Z^5}{\varepsilon}$$
mit $\varepsilon = \frac{E_\gamma}{m_{\mathrm{e}} \mathrm{c}^2}$.

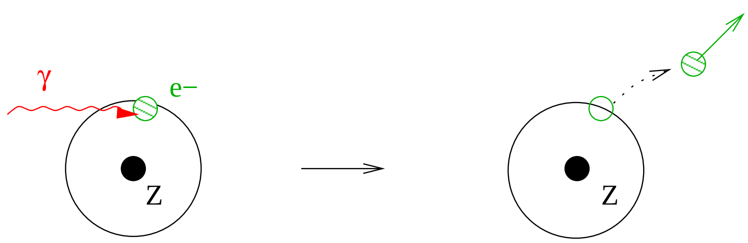


Abbildung 53: Photon löst Elektron aus der Atomhülle

2. *Compton-Streuung*:
$$\sigma_{\text{Compton}} \sim Z \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon}$$

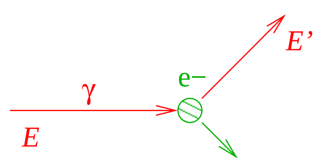


Abbildung 54: „elastischer Stoß“ zwischen Photon und Elektron

3. *Paarerzeugung*:
$$\sigma_{\text{Paar}} \sim r_{\mathrm{e}} Z^2,$$
wobei $E_\gamma > 2\mathrm{m_e c}^2$ gelten muss.

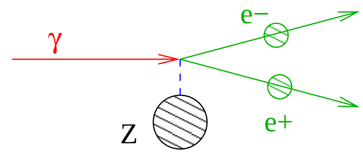


Abbildung 55: Das Photon benötigt einen Stoßpartner zur Paarbildung

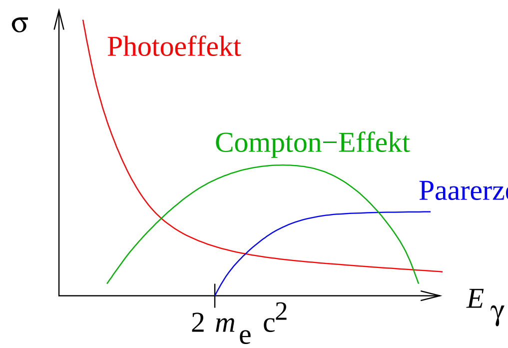


Abbildung 56: Vergleich von σ_{Photo}, σ_{Compton} und σ_{Paar}

3.5.5 Hadronische Wechselwirkung in Materie

Für uns relevant: Langlebige Hadronen

$$\mathsf{p}, \mathsf{n}, \overline{\mathsf{p}}, \overline{\mathsf{n}}$$
$$\pi^+, \pi^-, \mathsf{K}^+, \mathsf{K}^-, \mathsf{K}^0_{\text{long}}$$

Geladene Hadronen: $\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{C}}$.

Hadronische Wechselwirkung:

$$\text{Hadron} + \text{Kern} \to \text{Kernfragmente} + \text{Hadronen}$$

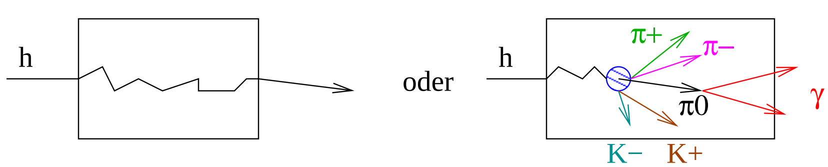


Abbildung 57: Hadronische Wechselwirkung

Bei hohen Energien:

$$\begin{aligned}\text{Hadron} + \text{Kern} \to\ & \text{Kernfragmente}\\ & + n \cdot [\pi^+, \pi^-, \pi^0]\\ & + \frac{n}{10} \cdot [\mathsf{K}^+, \mathsf{K}^-, \mathsf{K}^0_{\text{long}}, \mathsf{K}^0_{\text{short}}\\ & + \text{ einige \% Baryonen, Antibaryonen}\end{aligned}$$

Maß für die Absorption:
Nukleare Absorptionslänge $\lambda = \frac{A}{\sigma N_L \varrho}$, Einheit cm.

$$N(x) = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

BEISPIELE:

$$\begin{array}{lll} \text{C}: & \lambda_{\text{C}} = 34 \text{ cm} & x_{0,\text{C}} = 19 \text{ cm}\\ \text{Fe}: & \lambda_{\text{Fe}} = 17 \text{ cm} & x_{0,\text{Fe}} = 1,8 \text{ cm}\\ \text{U}: & \lambda_{\text{U}} = 11 \text{ cm} & x_{0,\text{U}} = 0,3 \text{ cm}\end{array}$$

3.6 Strahlenwirkung, Dosimetrie

1. Allgemeine Begriffe:
   Aktivität: $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$, Einheit: 1 Becquerel (Bq) $= \frac{1\text{ Zerfall}}{\text{s}} = 0,27 \cdot 10^{-10}$ Curie (Ci).
   Energiedosis: $D_E = \frac{\Delta E}{\Delta m}$, Einheit: 1 Gray (Gy) $= \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 100$ rad.
   Dosisrate: $\frac{\mathrm{d}D_E}{\mathrm{d}t}$, Einheit: Gy/ s.
2. Für ionisierende Strahlung:
   Ionendosis: $D_Q = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$, Einheit: 1 Röntgen (R) $= 2,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{As}}{\text{kg}}$.
3. Biologische Wirkung:
   Äquivalenzdosis: $H = qD_E$, Einheit: 1 Sievert (Sv) $= 1q$ Gy $= 100$ rem. Der Faktor q wird *biologischer Wirkungsfaktor* oder *Qualitätsfaktor* genannt.

BEISPIELE:

- Qualitätsfaktoren:

Teilchen	q
γ, e^-, e^+	1
n	5...20
p	5...20
α, Kernfragmente	20

- Energiedosiswerte:

Quelle	mSv/ a
kosmische Strahlung	0, 3
natürliche Radioaktivität	0, 5
eingenommene Radioaktivität	0, 3

- Gesetzlich vorgeschriebene Grenzwerte:

Organ	mSv/ a
Gebärmutter, Keimdrüsen	$0,3$
Haut	$1,8$
übrige Organe	$0,9$

tödlich innerhalb von 30 Tagen: 3 Gy $= 300$ rad.

4 Detektoren und Beschleuniger

Wichtigste Werkzeuge der Teilchenphysik:

Beschleuniger: Studium hochenergetischer Reaktionen; Erzeugung neuer Teilchen aus kinetischer Energie.

Detektoren: Nachweis von Teilchen aller Art.

4.1 Detektoren

Allgemein:

Vermessung von

E: Kalorimetrie (Absorption).

$\boldsymbol{p}$: Richtung, Krümmungsradius im ortsempfindlichen Detektor im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$.

v: Flugzeitmessung oder Cerenkovstrahlung.

m, q: Ionisationsmessung, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$.

τ: Zerfallsort im ortsemfindlichen Detektor.

4.1.1 Ionisationsdetektoren

Prinzip: Plattenkondensator mit Medium. Geladenes Teilchen ionisiert Atome,

$$\Delta E = \Delta x \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x},$$
$$n_{\mathsf{e}^-} = n_{\mathrm{Ion}} = n = \frac{\Delta E}{W_{\mathrm{Ion}}},$$

dabei ist W_{Ion} die effektive Ionisationsenergie.

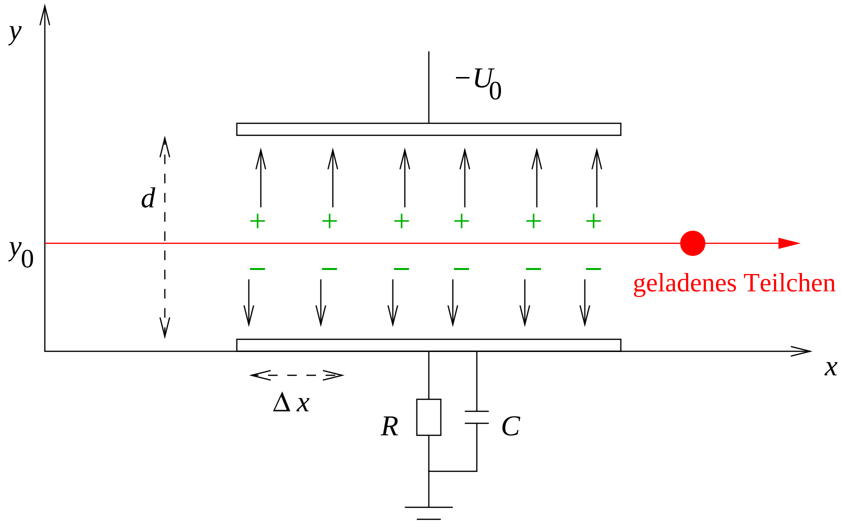


Abbildung 58: Ionisationsdetektor

Spannungsänderung:

$$\text{Ionen:}\quad \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 - \int_{y_0}^{d} neE\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(U_0 - ne\frac{U_0}{d}(d-y_0)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{Ion}}U = U - U_0 = -\frac{ne}{C}\left(\frac{d-y_0}{d}\right) \qquad (\text{mit } U + U_0 \approx 2U_0)$$

$$\text{Elektronen:}\quad \Delta_{\mathsf{e}}U = -\frac{ne}{C}\frac{y_0}{d}$$

$$\text{insgesamt:}\quad \Delta U = \Delta_{\text{Ion}}U + \Delta_{\mathsf{e}}U = -\frac{ne}{C}.$$

Signalform:

$$\Delta_{\mathsf{e}}U = -\frac{ne}{C}\frac{v_{\mathsf{e}}t}{d}, \qquad \Delta_{\text{Ion}}U = -\frac{ne}{C}\frac{v_{\text{Ion}}t}{d}$$

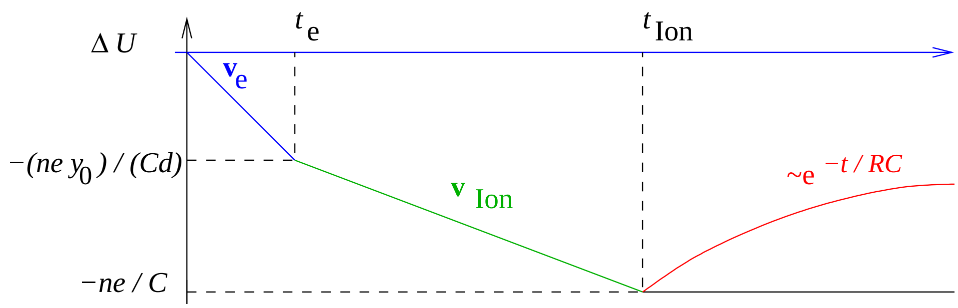


Abbildung 59: Realistisch: Aufladen über R: $\Delta U \sim \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$

BEISPIEL: $R = 1$ MΩ, $C = 100$ pF $\Rightarrow$ $RC = 100$ μs (d.h. Verfälschung des Signals, aber trotzdem gut genug).
Signal: $\Delta E = 1$ MeV, $W_{\text{Ion}} = 2$ GeV $\Rightarrow$ $\Delta U = 60$ μV.

4.1.2 Gasdetektoren

Charpak (Nobelpreis), Sauli: CERN-Report 77-09 (Klassiker!)

1. *Zählrohr*:

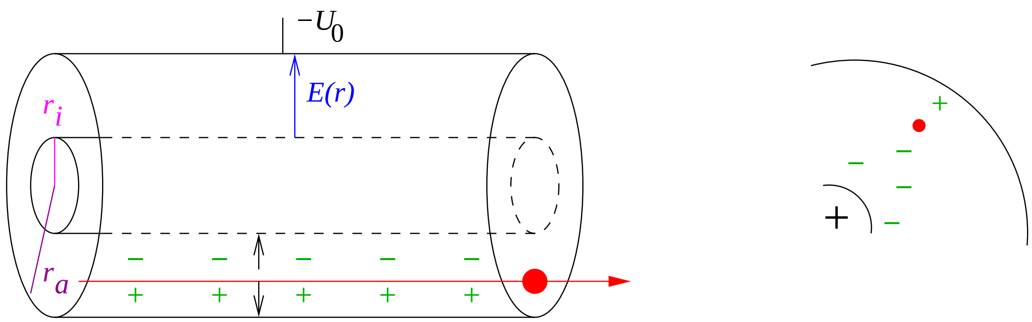


Abbildung 60: Aufbau des Zählrohrs (links), Elektronenlawine durch Sekundärionisation (rechts)

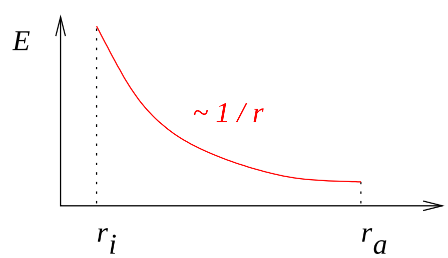


Abbildung 61: Verlauf des E-Feldes, r_i und r_a bilden die Grenzen

BEISPIEL: $U_0 = -2$ kV, $r_i = 50$ μm, $r_a = 1$ cm $\Rightarrow$ $E(r_a) = 75$ kV/ cm.

2. *Geiger-Müller-Zählrohr*: Sonderfall des Zählrohrs; $\approx 10^8$ Gasentladungen (vgl. Abb. 62, links).

$$\Delta Q = CU_0,$$
$$\Delta U = U_0.$$

Auch: *Funkenkammer* (vgl. Abb. 62, rechts). Gasentladungen werden durch Funken sichtbar; wird heute nur noch für spezielle Anwendungen eingesetzt.

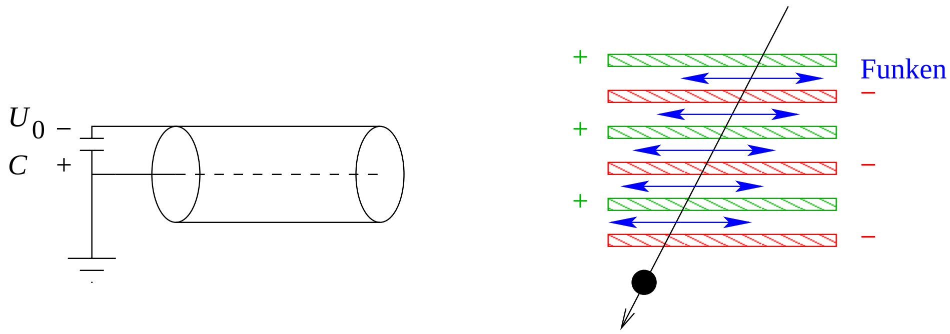


Abbildung 62: Geiger-Müller-Zähler (links); Funkenkammer (rechts)

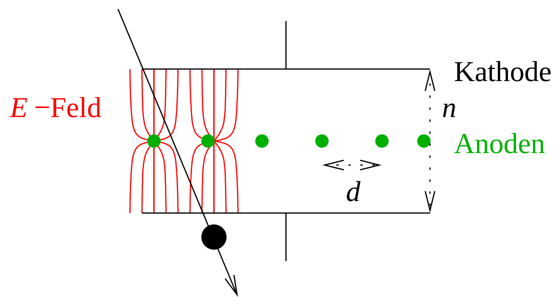


Abbildung 63: Proportionalkammer: In der Nähe zur Anode: $E(r) \sim \frac{1}{r}$

3. *Proportionalkammer* (von Charpak):

   Statt Aneinanderreihung von Zählrohren: "Ummantelung auflösen".

   Ort des Teilchendurchgangs: Adresse des angesprochenen Drahtes, Streuung $\sigma = \frac{d}{\sqrt{n}} \approx 0,5$ mm.

   Grenzen: Teilchendichte, -rate, Präzision, Volumen

4. *Driftkammer* (Abb. 64):

$$\Delta t = \frac{x}{v_{\text{drift}}}$$
$$v_{\text{drift}} = \text{const.} \approx 40...70\mu\text{m/ ns für } E > 1,5 \text{ keV/ cm}$$

   Ortsauflösung begrenzt durch Δt und Diffusion $\sigma \approx 30...100\mu$m.

5. *Zeitprojektionskammer* (Abb 65).

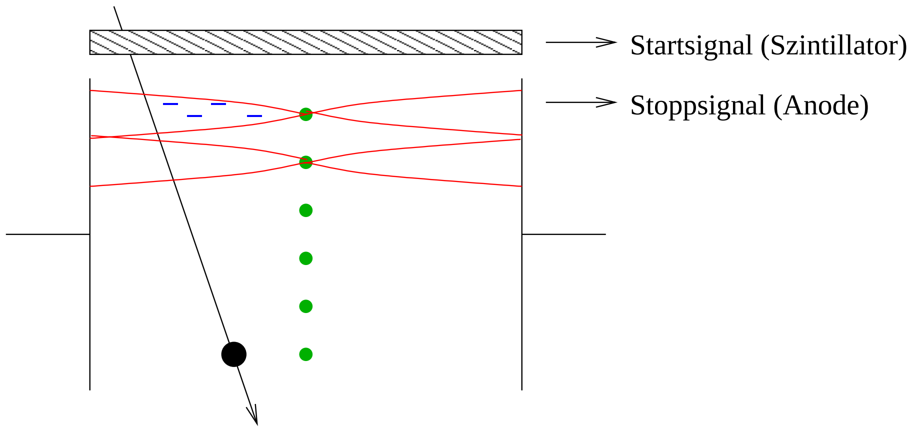


Abbildung 64: Dauer des Elektronendrift: Stoppsignal − Startsignal = Δt

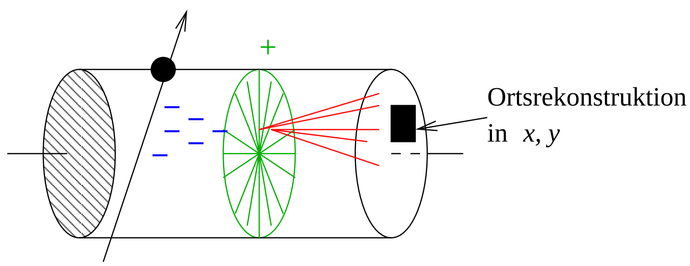


Abbildung 65: e^- schauert, der Schauer wird wiederum gemessen

4.1.3 Halbleiterdetektoren

Prinzip: Diode in Sperrichtung.

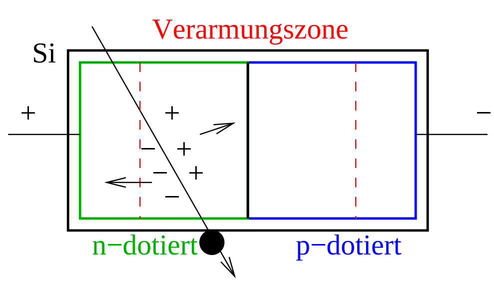


Abbildung 66: typisch: n: $10^{12}/\ \mathrm{cm}^3$ Phosphor (Donator); p: $10^{15}/\ \mathrm{cm}^3$ Bor (Akzeptor)

Signalhöhe: $W_{\text{Ion}}(\mathrm{Si}) = 3,6$ eV, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$ von $\mathrm{Si} = 3,9$ MeV/ cm.
$\Rightarrow$ für $d = 300\mu$m: $33000\mathrm{e}^-$-Loch-Paare (Signal muss verstärkt werden).

Ortsbestimmung: Verstärker anschließen, Signale mitteln. $\sigma_x = \frac{d}{\sqrt{2}} \approx 10...20\mu$m.

4.1.4 Szintillationsdetektoren

Prinzip:
Szintillator: Ionisation $\rightarrow$ Lichtemission.
Photodetektor: Licht $\rightarrow$ Photoelektron $\rightarrow$ Stromsignal

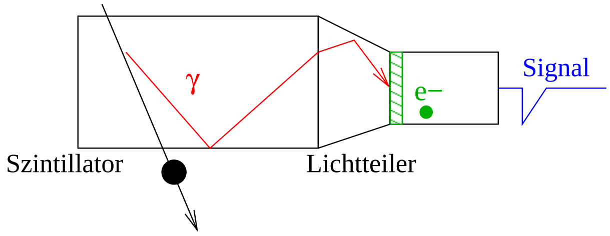


Abbildung 67: Licht erzeugt Photoelektron; Photoelektron erzeugt Stromsignal; Anstiegszeit des Signals im Bereich ns

1. *Anorganischer Szintillator*:
   Kristall mit sogenannten Aktivatoren.

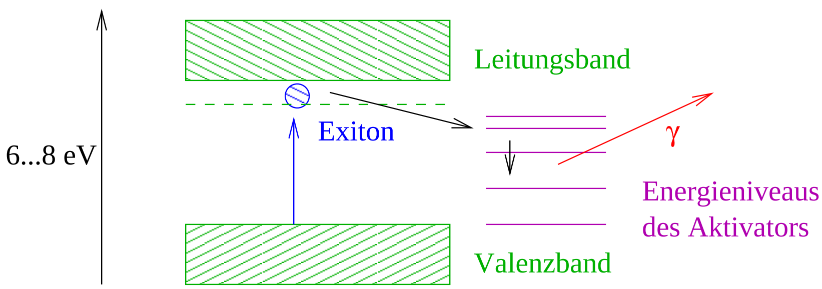


Abbildung 68: Energie wird an Fremdatome, die *Aktivatoren* abgegeben, diese wiederum emittieren Photonen (im UV-Bereich), die auf ein Photokathode treffen

   BEISPIEL: NaJ + Tl: $\varrho = 3,7$ g/ cm^3, $\lambda_{\mathrm{Sz}} = 410$ nm, $N_\gamma/\mathrm{MeV} = 4 \cdot 10^4$.

2. *Organischer Szintillator*:
   Prinzip: Ionisation $\rightarrow$ Molekülanregung $\rightarrow$ Emission (von UV-Licht).
   Dotierung mit Wellenlängenschieber $\rightarrow$ blaues, grünes Licht.

   BEISPIEL: Naphtalen+POPOP: $\lambda = 348$ nm $\rightarrow$ $450 \ldots 500$ nm (Effizienz $\approx 0,1$).

3. *Photomultiplier* (PMT):
   (dt.: Sekundärelektronenvervielfacher (SEV)) siehe Abb. 69

Anwendungen:

- Absorption von $\mathrm{e}^+, \mathrm{e}^-, \gamma$: Energiemessung.

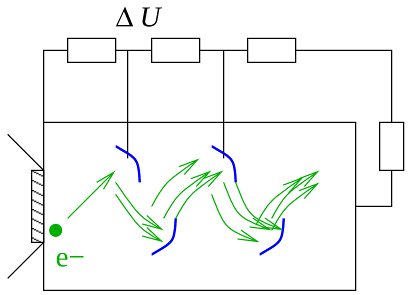


Abbildung 69: Photomultiplier; $\Delta U \approx 100$ V

- Durchtrittszeit geladener Teilchen; Markierung von Ereignissen („Triggern“).
- Durchtrittsort geladener Teilchen:
  Szintillierende Fasern („Fibers“): Kleine Szintillatoren nebeneinander ($\varnothing \approx$ mm).

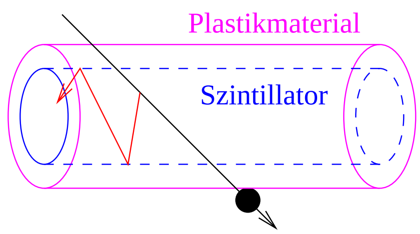


Abbildung 70: Äußeres und inneres Material haben verschiedene Brechungsindizes

4.1.5 Kalorimetrie

1. *Elektromagnetische Kalorimeter*: $\mathrm{e}^-, \mathrm{e}^+, \gamma$.
   Prinzip: $\mathrm{e}^-, \mathrm{e}^+ \to$ Ionisation, Bremstrahlung $\to \gamma \to$ Paarbildung $\to \mathrm{e}^+, \mathrm{e}^-$ usw. bis die Energie verbraucht ist

   Die Energie halbiert sich bei jeder Paarbildung, nach d Schritten ist die Anzahl der Sekundärteilchen $N(d) = 2^d$, die Energie eines solchen Teilchens ist $E = \frac{E_0}{2^d}$. Ab einem $d_{\max}$ werden keine neuen Teilchen gebildet, weil dafür keine Energie mehr vorhanden ist: $E_{\text{krit}} := E(d_{\max}) = \frac{E_0}{2^{d_{\max}}}$, $N(d_{\max}) = \frac{E_0}{E_{\text{krit}}}$. (Schema in Abb. 71.)

   Form des Schauers (Abb. 72):
   Longitudinal: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}d} \sim d^\alpha \mathrm{e}^{-d}$.
   Transversal: *Moliere-Radius*: $R_M = \frac{21 x_0}{R_{\text{krit}}}$ ($x_0 =$Strahlungslänge).

   Energiemessung: $N(d) = 2^d$, $N_{\text{total}} = \sum_{d=1}^{d_{\max}} 2^d = 2^{d_{max}+1}$.

   $E_0 \sim I_{\text{Signal}} \sim N_{\text{total}} \sim 2^{d_{\max}}$ mit $E(d_{\max}) = E_{\text{krit}} = \frac{E_0}{2^{d_{\max}}} \Rightarrow d_{\max} = \frac{\ln(E_0/E_{\text{krit}})}{\ln 2}$.
   $\sigma(E_0) \sim \sqrt{N_{\text{total}}} \sim \sqrt{I_{\text{Signal}}}$, relativer Fehler: $\frac{\sigma(E_0)}{E_0} = \frac{a}{\sqrt{E_0}}$.

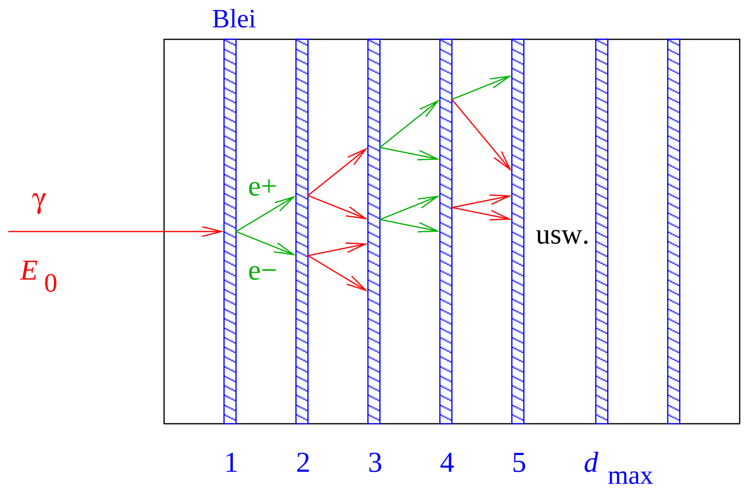


Abbildung 71: Schema des elektromagnetischen Kalorimeters

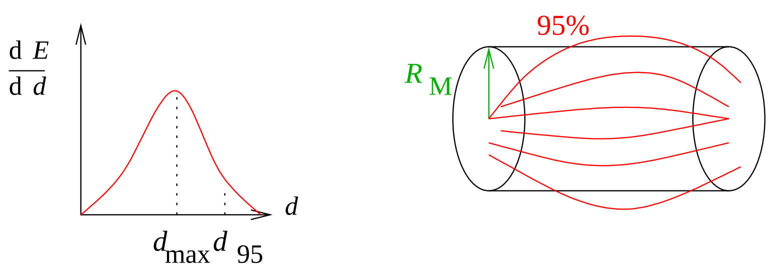


Abbildung 72: longitudinal (links): bei d_{95} sind 95% aller Teilchen enthalten; transversal (rechts): in R_M sind 95% aller Teilchen enthalten

BEISPIEL: Bleiglas: $E_0 = 100$ GeV, $x_0 = 2$ cm, $d_{\max} = 13x_0 = 26$ cm, $d_{95} = 23x_0 = 46$ cm, $R_M = 3,6$ cm.

2. *Hadronische Kalorimeter*:

Prinzip: Hadron $\rightarrow$ Kernreaktion $\rightleftarrows$ Sekundärhadronen $\rightarrow$ Ionisation.
etwa π, K $\rightarrow \mu, \gamma(,\nu)$. Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{\text{Hadron}} = 40$ mb$A^{\frac{1}{3}}$.

Schauerform:
$d_{\max}[\lambda] = 0,7 + 0,2\ln(E)[$ GeV$]$.
$R_M \approx 1\lambda$, $\frac{sigma(E)}{E} = \frac{100\%}{\sqrt{E}}$.

BEISPIEL: Eisen Fe, $E_0 = 100$ GeV:
$\mathrm{d}_{\max} = 1,6\lambda = 27$ cm, $d_{95} = 4,8\lambda = 80$ cm, $R_M = 17$ cm.

4.1.6 Ältere Technologien

- *Funkenkammer* (vgl. 4.1.2)

- *Blasenkammer*: Volumen, gefüllt mit einer Flüssigkeit, die unter Druck (≈ 20 bar) steht. Geladenes Teilchen ionisiert. Bei Druckabfall: Flüssigkeit beginnt bei den Ionisationskeimen zu kochen $\rightarrow$ Bläschen.

4.2 Experimente

Systeme von Detektoren zum Nachweis und zur Vermessung von Teilchen und Prozessen.

BEISPIELE:

- *Superkamiokande* in Kamioka, Japan

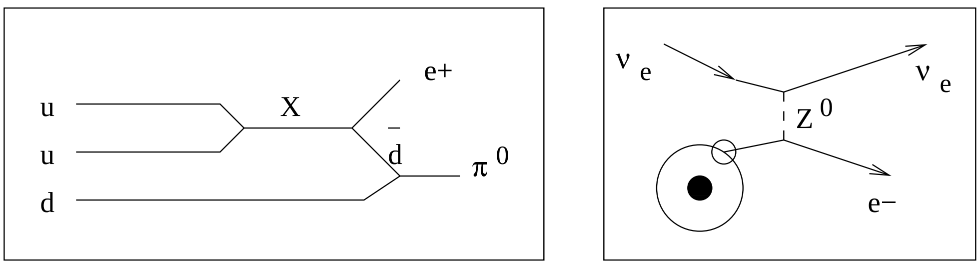


Abbildung 73: Protonenzerfall (links) und Neutrinonachweis (rechts) sollen im Superkamioka beobachtet werden

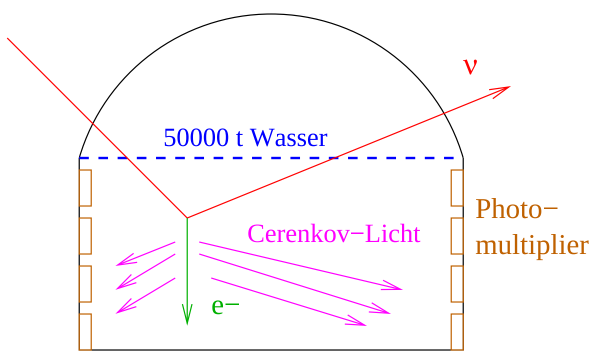


Abbildung 74: Aufbau des Experiments; Cerenkov-Strahlung im Wasser wird gemessen

- *CMS* (Compact Myon Solenoid) am LHC (cmsinfo.cern.ch)

  Studium von Ereignissen in pp-Kollisionen bei 14000 GeV. Ziele:

  - Higgs-Boson finden.
  - Supersymmetrien finden.
  - Anomalien untersuchen.
  - Strukturen der Quarks untersuchen.
  - Top-Quark-Physik.

4.3 Beschleuniger

Prinzip:

- Beschleunigung geladener Teilchen in elektrischen Feldern.
- Ablenkung in magnetischen Dipolfeldern.
- Fokussierung durch magnetische Multipolfelder.

4.3.1 Fixed-Target

Schieße Strahlen gegen Streukörper. Schwerpunktenergie:

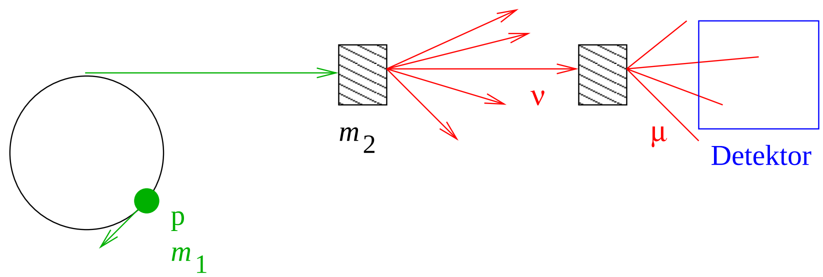


Abbildung 75: Mehrere Targets werden beschossen, $m_1 = m_\mathrm{p}$, m_2 =Masse des Targets

$$\sqrt{S} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_0 m_2} \approx 2\sqrt{2m_2 E_0}$$

Hohe Ereignisraten, einfacher Detektor, 100% Akzeptanz (d.h. alle Sekundärteilchen können vermessen werden).

BEISPIEL: CERN SPS: pp bei 450 GeV: $\sqrt{S} = 29$ GeV.

4.3.2 Collider

Schieße beschleunigte Teilchen gegeneinander.

Schwerpunktenergie:

$$\sqrt{S} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{p_2}} \approx 2\sqrt{E_1E_2}\ (= 2E_1,\ \text{wenn } E_1 = E_2)$$

Niedrige Ereignisraten, hohe Anforderungen an den Detektor, Akzeptanz unter 100%.

BEISPIEL: Fermilab Tevatron: 980 GeV p$\overline{\text{p}}$-Kollision, $\sqrt{S} = 1960$ GeV.

Die *Luminosität* L ist

$$L = \frac{N_{\mathsf{p}} N_{\bar{\mathsf{p}}}}{4\pi\sigma_x\sigma_y} f n_{\text{Bunch}}$$

Die p und $\bar{\mathsf{p}}$ werden in Teilchenpakten, den *Bunches*, aufeinandergeschossen. N_{p} bzw. $N_{\overline{P}}$ ist die Anzahl der jeweiligen Teilchen pro Bunch, f ist die Frequenz der Bunches. Die Teilchen sind ungefähr gaußförmig in x- und y-Richtung im Bunch verteilt, σ_x bzw. σ_y geben die Streuung an. Je kleiner σ_x, desto höher die Dichte im Bunch, und desto höher die Kollisionsrate.

Damit ist die Ereignisrate im Detektor: $\dot{N} = L\sigma_{\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}}$.

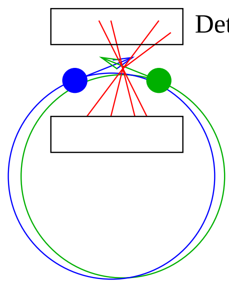


Abbildung 76: Zwei „Bunches“(blau mit m_1, E_1 und grün mit m_2, E_2) werden gegeneinander geschossen

Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung (für ein Proton):

$$\mathrm{P} = \frac{\sigma_{\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}} N_{\bar{\mathsf{p}}}}{F},$$

dabei ist F die Querschnittsfläche des $\bar{\mathsf{p}}$-Bunches.
Wechselwirkungsrate (für ein Proton):

$$\frac{\sigma_{\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}} N_{\bar{\mathsf{p}}}}{F} f.$$

Für N_{p} Protonen:

$$\dot{N} = \frac{\sigma_{\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}} N_{\mathsf{p}} N_{\bar{\mathsf{p}}}}{F} f.$$

Integrierte Luminosität:

$$N = \sigma_{\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}} \int L dt \; [\,\mathrm{pb}^{-1}].$$

BEISPIEL: Tevatron (2003)
$N_{\mathsf{p}} = 10^{11}, N_{\bar{\mathsf{p}}} = 10^{11}, n_{\text{Bunch}} = 6, f = \frac{c}{2\pi R} \approx 48$ kHz, $\sigma_x = \sigma_y = 50\mu$m
$\Rightarrow L_{\text{Tev}} = 10^{31}/\,\mathrm{cm}^2$ s.
Rate von $\mathsf{p}\bar{\mathsf{p}}$-Kollisionen:
$\sigma_{\text{inelast}} = 50$ mb $= 5 \cdot 10^{-26}$ cm^2, $\dot{N} = \sigma_{\text{inelast}} L = 5 \cdot 10^{-26}$ cm$^2 \cdot 10^{31}/$ cm^2 s $= 500$ kHz.
Rate von Top-Quarks ($\mathsf{u}\bar{\mathsf{u}} \to \mathsf{t}\bar{\mathsf{t}}$):
$\sigma_{\mathsf{t}\bar{\mathsf{t}}} = 7$ pb $= 7 \cdot 10^{-26}$ cm^2, $\dot{N}_{\mathsf{t}\bar{\mathsf{t}}} = 7 \cdot 10^{-5}$ Hz, d.h. in einem „Teilchenphysik-Jahr“ von 10^7 s: $N_{\mathsf{t}\bar{\mathsf{t}}} = \int_0^{10^7\,\mathrm{s}} \dot{N} \mathrm{d}t = 700$ und $\int_0^{10^7\,\mathrm{s}} L \mathrm{d}t = \frac{1}{100\,\mathrm{pb}}$.

5 Elementarteilchenphysik

5.1 Grundlagen

5.1.1 Der Teilchenzoo

1. Bis in die 1930er Jahre bekannte Teilchen: p, n, e^-, ν und ihre Antiteilchen.

2. *Pion* π:

   1935 Yukawa: Kurze Reichweite der Kernkraft: Austausch eines Teilchens mit Masse.

   Kernkraft hat das *Yukawa-Potential*:

   $$V(r) = -\frac{g}{r}\mathrm{e}^{-\frac{r}{r_0}}$$

   mit $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m} = \frac{\hbar}{m_\pi c} \Rightarrow m_\pi = 140\ \mathrm{MeV}/\mathrm{c}^2$.

   1947 Powell: π in der Höhenstrahlung gefunden.

   1950 Chamberlain: Bestimmung von $\tau_{\pi^\pm}$.

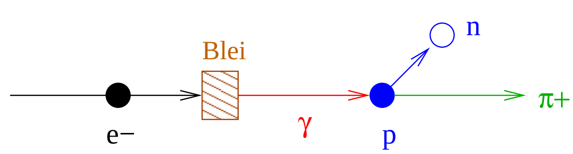


Abbildung 77: Erzeugung von π^+

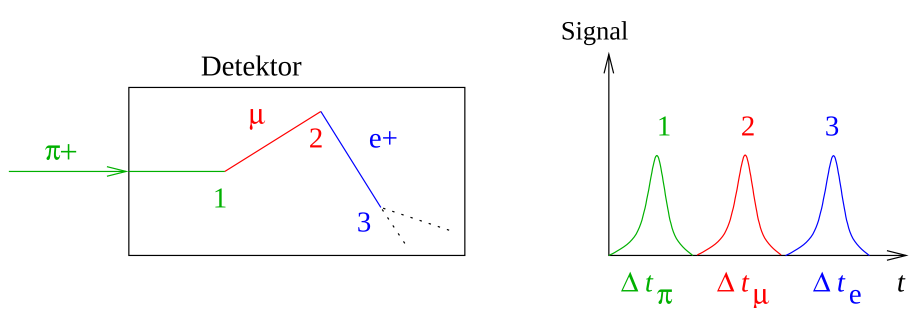


Abbildung 78: π^+ wird im Detektor abgebremst, zerfällt in ein μ, dieser wiederum zerfällt in ein e^+. Die Lebensdauer wird anhand der Zerfallsstrecke bestimmt

$N(t)$ folgt einer Exponentialverteilung: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$ mit $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s und $\tau_\pi = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s

Bestimmung des Spins von π:
Vergleiche $\sigma_1 := \sigma(\mathsf{p}+\mathsf{p} \to \pi^+ + \mathsf{d})$ und $\sigma_2 := \sigma(\pi^+ + \mathsf{d} \to \mathsf{p}+\mathsf{p})$. σ ist proportional der Anzahl der Endzustände inklusive Spin. Mit $J_\mathsf{p} = \frac{1}{2}$ und $(J_\mathsf{d} = 1)$ folgt:

$$\sigma_1 \sim (2J_\pi + 1)(2J_\mathsf{d} + 1) \sim 3(2J_\pi + 1)$$
$$\sigma_2 \sim \frac{1}{2}(2J_\mathsf{p} + 1)^2 = 2 \quad \text{(Faktor } \frac{1}{2} \text{ wegen des Pauli-Prinzips)}$$

Daraus ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{falls} \quad J_\pi = 0 \\ \frac{9}{2} & \text{falls} \quad J_\pi = 1 \end{cases}$$

Es stellt sich heraus, dass $J_\pi = 0$ zutrifft.

3. *Myon* μ:

   1937 Anderson: Bei der Suche nach π wird das μ in der Nebelkammer gefunden. $m_\mu = 106$ MeV$/\mathrm{c}^2$ und $\tau_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

   Rabi: „Who ordered that?“

4. *Kaon* K:

   1947 Butler, Rochester:

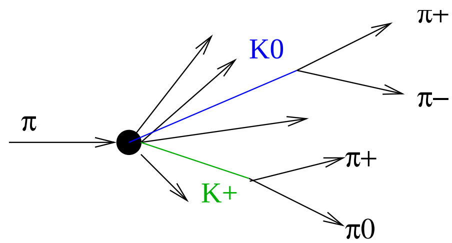


Abbildung 79: Kaonenerzeugung und -zerfall

Strangeness: Beschreibt die Tatsache, dass Kaonen zwar durch die starke Wechselwirkung erzeugt werden, aber nur durch die schwache Wechselwirkung zerfallen, obwohl ihre Zerfallsprodukte ebenfalls stark wechselwirkende Teilchen sein können. Lebensdauer $\gg 10^{-23}$ s.

$$m_{\mathsf{K}^\pm} = 494 \text{ MeV}/\mathrm{c}^2, \quad \tau_{\mathsf{K}^\pm} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$
$$m_{\mathsf{K}^0} = 498 \text{ MeV}/\mathrm{c}^2, \quad \tau_{\mathsf{K}^0_\text{long}} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$
$$\tau_{\mathsf{K}^0_\text{short}} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Zerfälle:

$$\mathsf{K}^\pm \overset{65\%}{\to} \mu^\pm + \overset{(-)}{\nu}_\mu$$
$$\overset{21\%}{\to} \pi^+ + \pi^0$$

$$
\begin{aligned}
K^0_{\text{long}} &\to \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \\
&\to 3\pi^0 \\
&\overset{10^{-3}\%}{\to} 2\pi^0; \pi^+\pi^-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^0_{\text{short}} &\to \pi^+ + \pi^- \\
&\to 2\pi^0 \\
&\overset{10^{-3}\%}{\to} 3\pi^0; \pi^+\pi^- + \pi^0
\end{aligned}
$$

5.1.2 Fundamentale Teilchen des Standardmodells

Materieteilchen *Fermionen*: Spin $\frac{1}{2}$.

1. *Leptonen*:

	Ladung Q	Wechselwirkung
e^-, μ^-, τ^-	-1	elektromagnetisch, schwach, Gravitation
ν_{e}, ν_μ, ν_τ	0	schwach, Gravitation

   und ihre Antiteilchen $\mathsf{e}^+, \mu^+, \tau^+, \overline{\nu}_{\mathsf{e}}, \overline{\nu}_\mu, \overline{\nu}_\tau$.

2. *Quarks*:

	Ladung Q
u, c, t	$\frac{2}{3}$
d, s, b	$-\frac{1}{3}$

   Wechselwirkungen: elektromagnetisch, schwach, stark, Gravitation.

5.1.3 Zusammengesetzte Objekte

BEISPIELE:

- Elektromagnetisch gebundene:

  H: p mit e^- in der Schale.
  Das *Positronium* $\mathsf{e}^-\mathsf{e}^+$.
  Ein *myonisches Atom* mit μ^- (statt e^-) in der Schale.

- Stark gebundene:

  Mesonen, z.B. $\pi^+ = \mathsf{u}\overline{\mathsf{dd}}$.
  Baryonen, z.B. $\mathsf{n} = \mathsf{udd}$, $\Lambda = \mathsf{uds}$.
  Exoten (Existenz nicht wirklich bewiesen): *Glueball* (nur Gluonen g), *Hermaphroditen* (z.B. $q\overline{q}g$).

1. Klassifizierung der Hadronen durch Quantenzahlen:

$$\begin{aligned}&\text{Spin } J\\ &\text{Ladung } Q\\ &\text{Isospin } I\\ &\text{Baryonenzahl } B\\ &\text{Strangeness } S\end{aligned}$$

- *Isospin* (Heisenberg)
  Zustände $|I, I_3\rangle$; Isospin erhalten in starken Prozessen.
  Dublett:
  $$\mathsf{p} = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \quad \mathsf{n} = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$
  Triplett:
  $$\pi^+ = |1,1\rangle \quad \pi^0 = |1,0\rangle \quad \pi^- = |1,-1\rangle$$
- *Baryonenzahl*
  $$B(\pi) = 0 \quad B(\mathsf{n}) = B(\mathsf{p}) = +1 \quad B(\overline{\mathsf{n}}) = B(\overline{\mathsf{p}}) = -1$$
- *Strangeness*
  Für $\pi, \mathsf{n}, \mathsf{p}$ ist $S = 0$.
  $$\begin{gathered}S(\mathsf{K}^+) = +1 \quad S(\mathsf{K}^-) = -1\\ S(\Lambda) = -1\\ S(\mathsf{s}) = -1 \quad S(\overline{\mathsf{s}}) = +1\end{gathered}$$

Zusammenhang der Quantenzahlen:

$$\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{B}{2} + \frac{S}{2} =: I_3 + \frac{Y}{2}$$

mit *Hyperladung* Y.

Mesonen mit Spin 0, Quark-Antiquark-Paare (Abb. 80)

$$\begin{aligned}\mathsf{K}^0 &= \mathsf{d}\overline{\mathsf{s}}\\ \mathsf{K}^+ &= \mathsf{u}\overline{\mathsf{s}}\\ \mathsf{K}^- &= \overline{\mathsf{u}}\mathsf{s}\\ \overline{\mathsf{K}}^0 &= \overline{\mathsf{d}}\mathsf{s}\\ \pi^+ &= \mathsf{u}\overline{\mathsf{d}}\\ \pi^- &= \overline{\mathsf{u}}\mathsf{d}\\ \pi^0 &= \mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}\mathsf{d}\overline{\mathsf{d}}\\ \eta &= \mathsf{u}\overline{\mathsf{u}}\mathsf{d}\overline{\mathsf{d}}\mathsf{s}\overline{\mathsf{s}}\end{aligned}$$

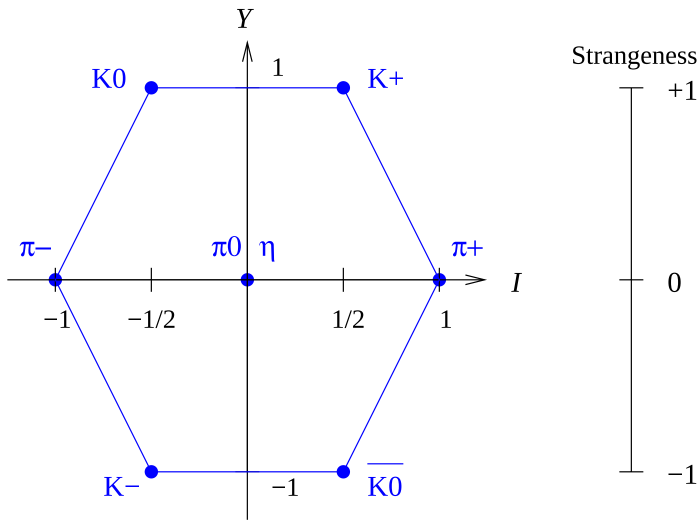


Abbildung 80: Mesonenoktett

Baryonen mit Spin $\frac{1}{2}$, drei Quarks (Abb. 81)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{n} &= \mathsf{udd} \\
\mathsf{p} &= \mathsf{uud} \\
\Sigma^- &= \mathsf{dds} \\
\Sigma^0 &= \mathsf{uds} \\
\Sigma^+ &= \mathsf{uus} \\
\Xi^- &= \mathsf{dss} \\
\Xi^0 &= \mathsf{uss} \\
\Lambda &= \mathsf{uds}
\end{aligned}
$$

Baryonen mit Spin $\frac{3}{2}$, drei Quarks (Abb. 82)

$$
\begin{aligned}
\Delta^- &= \mathsf{ddd} \\
\Delta^0 &= \mathsf{ddu} \\
\Delta^+ &= \mathsf{duu} \\
\Delta^{++} &= \mathsf{uuu} \\
\Sigma^- &= \mathsf{dds} \\
\Sigma^0 &= \mathsf{uds} \\
\Sigma^+ &= \mathsf{uus} \\
\Xi^- &= \mathsf{dss} \\
\Xi^0 &= \mathsf{uss} \\
\Omega^- &= \mathsf{sss}
\end{aligned}
$$

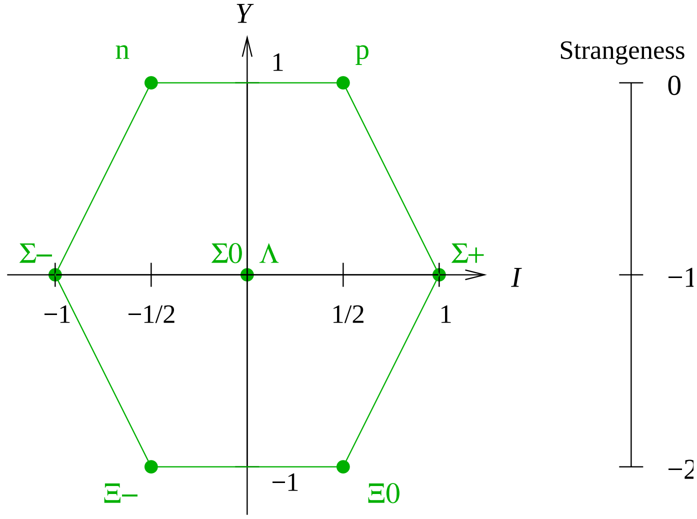


Abbildung 81: Baryonenoktett

Vorhersage: Es gibt ein Baryon Ω^- mit Spin $\frac{3}{2}$, $S = -3$ und $m_{\Omega^-} \approx m_\Delta + |S| \cdot 150$ MeV.

2. Das statische Quarkmodell von Gell-Mann und Zweig (1964):

   Hadronen zusammengesetzt aus u, d, s-Quarks (Spin $J = \frac{1}{2}$, Baryonenzahl $B = \frac{1}{3}$):

Flavour	Ladung Q	Isospin I	I_3	Strangeness S	Charm
u	$2/3$	$1/2$	$1/2$	0	0
d	$-1/3$	$1/2$	$-1/2$	0	0
c	$2/3$	0	0	0	1
s	$-1/3$	0	0	-1	0
t	$2/3$	0	0	0	0
b	$-1/3$	0	0	0	0

   Es ist $\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$.

   Beispiel: u-Quark: $\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

   Baryonen aus drei Quarks zusammengesetzt.

3. Der *Farbfreiheitsgrad*:

   Δ^{++}(uuu) ist symmetrisch in Flavour, Spin $\uparrow\uparrow\uparrow$ und wegen Bahndrehimpuls $\ell = 0$ auch symmetrisch im Raum. Dies scheint ein Widerspruch zu sein, da es keine vollständig symmetrischen Teilchen geben darf (die totale Wellenfunktion muss antisymmetrisch sein)! Es muss also einen zusätzlichen Freiheitsgrad geben, den Farbfreiheitsgrad (vgl. Abb. 83):

$$\text{Quarks: blau, grün, rot}$$
$$\text{Antiquarks: } \overline{\text{blau}}, \overline{\text{grün}}, \overline{\text{rot}}$$

   Hadronen sind farbneutral.

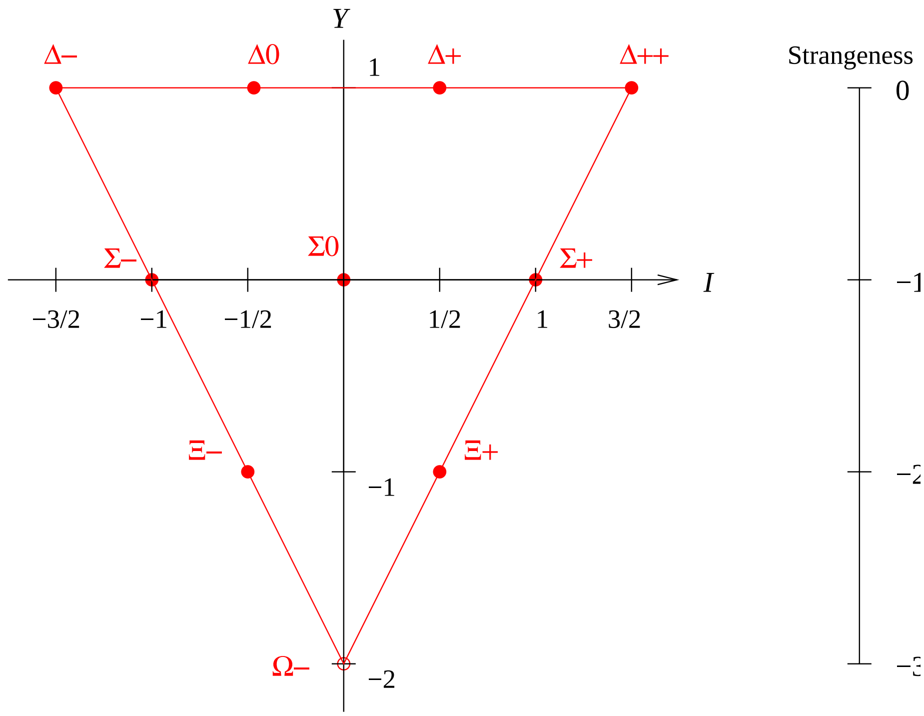


Abbildung 82: Baryonendekuplett

BEISPIEL:

$$\pi = \mathsf{u}\overline{\mathsf{d}}: \ \text{rot}\ \overline{\text{rot}}$$
$$\mathsf{p} = \mathsf{uud}: \ \text{rot grün blau}\ (= \text{„weiß“})$$

Farbneutrale Baryonen:

$$|qq'q''\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}(\,|\text{rot, grün, blau}\rangle - |\text{rot, blau, grün}\rangle + |\text{blau, rot, grün}\rangle - |\text{blau, grün, rot}\rangle + |\text{grün, blau, rot}\rangle - |\text{grün, rot, blau}\rangle)$$

Starke Wechselwirkung: Beziehung zwischen Farbobjekten.

5.1.4 Fundamentale Wechselwirkung

1. Elektromagnetische Wechselwirkung (Quantenelektrodynamik):
   Kräfte durch Austausch *virtueller Photonen*.

   - Photoeffekt mit Kopplungskonstante $\alpha_{\text{em}} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$.
   - Rutherford-Streuung mit $\sqrt{\alpha} \sim e$, Streuamplitude $A(q) = \sqrt{\alpha}\frac{1}{q^2}\sqrt{\alpha} = \frac{\alpha}{q^2} = \frac{e^2}{4\pi q^2}$.
   - Bremsstrahlung.
   - Selbstenergiebeiträge (Teilchen koppelt mit sich selbst).

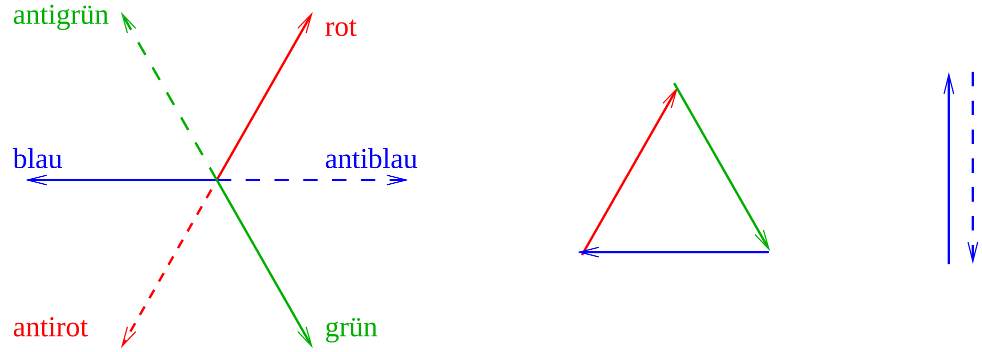


Abbildung 83: Aus der Kombination einer Farbe mit ihrer Antifarbe ergibt sich ein farbloser Zustand. Aus der Addition der drei verschiedenen Farben ergibt sich gleichfalls ein farbloser Zustand.

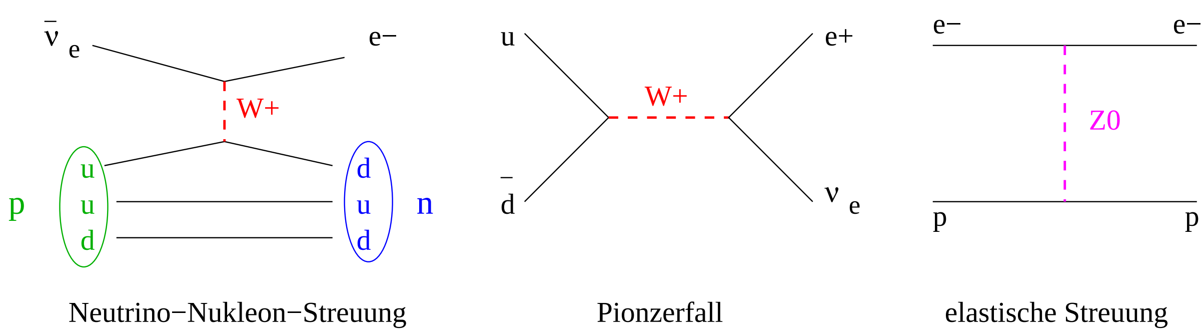
Geladene Teilchen: Gebundene Systeme, $V \sim \frac{\alpha}{r}$. Potential V bestimmt durch Messung der Energieniveaus (Spektroskopie).

2. Starke Wechselwirkung (Quantenchromodynamik):
   Austausch masseloser *Gluonen*. Kopplungskonstante $\alpha_\mathrm{s} = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c}$. Für kleine Impulsüberträge $q^2 < 0,5$ GeV^2: $g_s = 1$.

   Gebundene Systeme für Quarks: Hadronen.

   α_s hängt vom Impulsübertrag q^2 ab. Für kleine Abstände, also große q^2 wird die Kopplung der Quarks untereinander kleiner und verschwindet asymptotisch (*asymptotische Freiheit*). Umgekehrt wächst die Kopplungsstärke zwischen den Quarks bei großen Abständen so stark, dass einzelne Quarks nicht aus dem Hadron entfernt werden können (*Confinement*).

3. Schwache Wechselwirkung (Quantenflavourdynamik):
   Austausch von *Bosonen* mit Masse.



$\alpha_\mathrm{W} = \frac{g^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{30} > \alpha_\mathrm{em}$.

Propagator: $\frac{1}{q^2+m^2}$, $m = m_\mathrm{W}$ bzw. $= m_\mathrm{Z}$. Streuamplitude: $f(q) = \frac{g^2}{q^2+m^2}$.

Für $q \to 0$: $G_\mathrm{F} = \frac{g^2}{m_\mathrm{W}^2} \approx 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} = \mathrm{const.}$

4. Gravitation:
   vergleiche

$$\frac{F_{m_1 m_2}}{F_{q_1 q_2}} = \frac{\frac{G m_1 m_2}{r^2}}{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} (= 6 \cdot 10^{-38} \text{ für p, e}^-)$$

$\alpha_{\text{grav}} = \frac{G m_{\mathrm{p}}^2}{\hbar c} = 6 \cdot 10^{-39}$.

5. Laufende Kopplung:

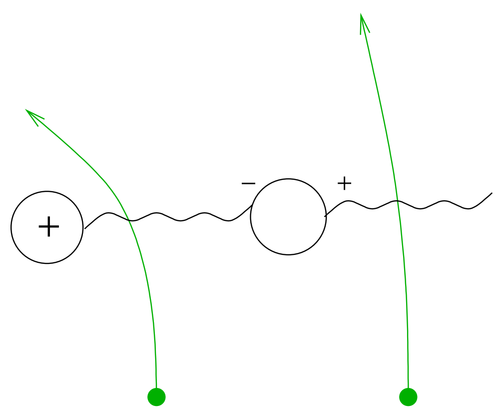


Abbildung 84: Vakuumpolarisation (QED): Großer Abstand $\hat{=}$ kleiner Impulsübertrag q^2: Probeladung sieht abgeschirmte Zentralladung, Wechselwirkung wird schwächer mit größerem Abstand

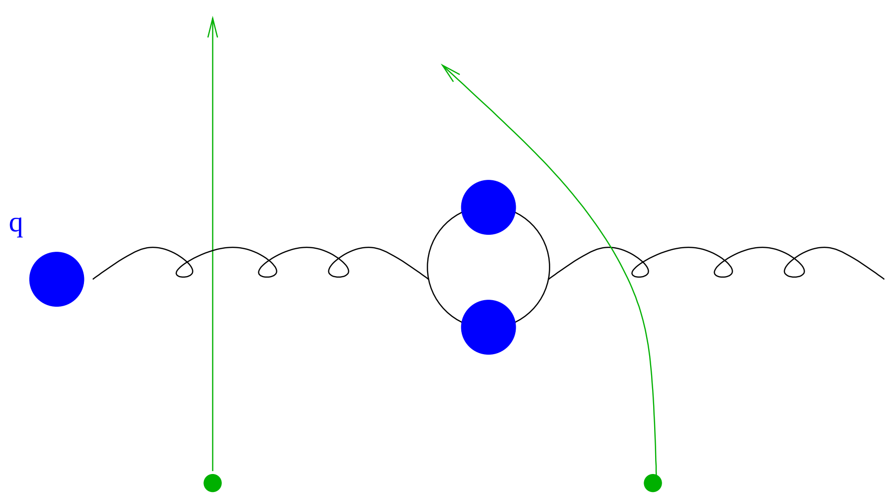


Abbildung 85: Vakuumpolarisation (QCD): Großer Abstand $\hat{=}$ große Farbladung: Wechselwirkung wird stärker mit größerem Abstand

5.1.5 Zusatz: Farbe und Gluonen

1. Indirekt: Existenz von Δ^{++}: $\mathsf{uuu}, \uparrow\uparrow\uparrow, \ell = 0,$ rot blau grün.

2. Messung des Wirkungsquerschnitts von

   $$\mathsf{e}^+ + \mathsf{e}^- \to q + \overline{q} + \text{Hadronen}$$

   und Vergleich mit dem von

   $$\mathsf{e}^+ + \mathsf{e}^- \to \mu^+ + \mu^-$$

   ergibt (mit Schwerpunktsenergie S)

   $$\sigma_{q\overline{q}} = \sum_{\text{Farben}} \sum_{\text{Quarks } i} \frac{4\pi\alpha^2}{3S} q_i^2$$
   $$\sigma_{\mu^+\mu^-} = \frac{4\pi\alpha^2}{3S}$$

   und damit für $N_{\text{Farben}} = 3$:

   $$\begin{aligned} R = \frac{\sigma_{q\overline{q}}}{\sigma_{\mu^+\mu^-}} &= N_{\text{Farben}} \sum q_i^2 \\ &= \underbrace{\frac{4}{3}}_{\mathsf{u\overline{u}}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\mathsf{d\overline{d}}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\mathsf{s\overline{s}}} + \underbrace{\frac{4}{3}}_{\mathsf{c\overline{c}}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\mathsf{b\overline{b}}} \\ &= 3\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3. Anzahl der Gluonen:
   Drei Farbfreiheitsgrade, $q\overline{q}$-, qqq-Systeme farbneutral.
   3 mal 3 Farbkombinationen:

   $$\left.\begin{array}{c} \mathrm{R\overline{G}, R\overline{B}, G\overline{R}} \\ \mathrm{G\overline{B}, B\overline{R}, B\overline{G}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{R\overline{R}} - \mathrm{G\overline{G}}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{R\overline{R}} + \mathrm{G\overline{G}} - 2\mathrm{B\overline{B}}) \end{array}\right\} \text{Oktett}$$
   $$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{R\overline{R}} + \mathrm{B\overline{B}} + \mathrm{G\overline{G}}) \quad \text{Singulett; farbloses Gluon}$$

4. Gibt es virtuelle Zustände? Konsistent:

   - Lambshift.
   - $g - 2$
   - laufende Kopplung

5.1.6 Symmetrien und Erhaltungssätze

Emmy Noether (1917): Jeder Symmetrie (unter gewissen Transformationen) entspricht eine Erhaltungsgröße.

Kontinuierliche Tranformationen

Transformation	Erhaltungsgröße
Raumtranslation	Impuls $\boldsymbol{p}$
Zeittranslation	Energie E
Rotation	Drehimpuls $\boldsymbol{\ell}$
Eichtransformation	Ladung Q

Diskrete Transformationen

Transformation	Erhaltungsgröße
Spiegelung	Parität P
Teilchen-Antiteilchen-Tausch	Ladungsparität C
Zeitspiegelung	Zeitparität T

1. *Parität*:

$$\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(-\boldsymbol{r},t),$$
$$\mathscr{P}^2\psi(\boldsymbol{r},t) = \psi(\boldsymbol{r},t).$$

Für Eigenzustände $\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{r},t) = \pm\psi(\boldsymbol{r},t)$ gibt es die Eigenwerte $P = \pm 1$.

BEISPIEL:

$$\psi(x) = \cos(x), \mathscr{P}\psi(x) = \cos(-x) = \cos(x) = \psi(x) \Rightarrow P = 1$$
$$\psi(x) = \sin(x), \mathscr{P}\psi(x) = \sin(-x) = -\sin(x) = \psi(x) \Rightarrow P = -1$$
$$\psi(x) = \cos(x) + \sin(x), \mathscr{P}\psi(x) = \cos(x) - \sin(x) \Rightarrow \mathscr{P}\psi \neq P\psi.$$

2. *Ladungsparität* (C-Parität):

Naturgesetze gleich für Teilchen und Antiteilchen:

$$\mathscr{C}\,|\text{Teilchen}\rangle = |\text{Antiteilchen}\rangle$$

BEISPIEL:

	Q	μ	J	B
p	e	$+2,79\mu_K$	$+\frac{\hbar}{2}$	$+1$
$\overline{\text{p}}$	$-e$	$-2,79\mu_K$	$+\frac{\hbar}{2}$	-1

Erhaltung der C-Parität:

(a) Starke Wechselwirkung:

$$\mathscr{C}(\mathsf{p} + \overline{\mathsf{p}} \to \pi^- + X) = (\overline{\mathsf{p}} + \mathsf{p} \to \pi^+ + \overline{X})$$

Wirkungsquerschnitt, Kinematik von π^-, π^+ gleich (bis auf Promille).

(b) Elektromagnetische Wechselwirkung:
Es gibt $\pi^0 \to \gamma + \gamma$:

$$\mathscr{C}\left|\pi^0\right\rangle = \mathscr{C}\left|\gamma\right\rangle\mathscr{C}\left|\gamma\right\rangle = \mathscr{C}^2\left|\gamma\right\rangle = +\left|\gamma\gamma\right\rangle = +\left|\pi^0\right\rangle$$

Gibt es auch $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$?

$$\mathscr{C}\left|\gamma\gamma\gamma\right\rangle = \mathscr{C}\left|\gamma\right\rangle\mathscr{C}\left|\gamma\right\rangle\mathscr{C}\left|\gamma\right\rangle = -\left|\gamma\gamma\gamma\right\rangle = -\left|\pi^0\right\rangle$$

dies wäre eine Verletzung der C-Parität, der Prozess existiert nicht.

(c) Schwache Wechselwirkung:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_L(\uparrow)$$

(der Index L steht für Linkshändigkeit, $\uparrow$ für den Spin).
Aber

$$\mathscr{C}(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_L(\uparrow)) = (\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_L(\uparrow))$$

existiert nicht: Maximale C-Paritätsverletzung!

3. *Zeitumkehr*:

Invarianz unter Zeitspiegelung: $\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t) = \psi(\boldsymbol{r},-t)$.

BEISPIELE:
Klassisch: Die Gesetze von Newton, $F = \mathscr{T}F$.
Teilchenphysik:

$$\begin{gathered} A + B \to C + D \\ \Leftrightarrow \\ C + D \to A + D \end{gathered}$$

4. CP*-Symmetrie*:

$$\begin{aligned} \left[\pi^+ \to \mu^+ + \nu_L(\uparrow)\right] &\xrightarrow{\mathscr{P}} \left[\pi^+ \to \mu^+ + \nu_R(\uparrow)\right] \\ &\xrightarrow{\mathscr{C}} \left[\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_L(\uparrow)\right] \end{aligned}$$

existieren nicht!

Aber:

$$\left[\pi^+ \to \mu^+ + \nu_L(\uparrow)\right] \xrightarrow{\mathscr{C}\mathscr{P}} \left[\pi^- \to \mu^- + \nu_R(\uparrow)\right]$$

gibt es.

$\Rightarrow$ alle Wechselwirkungen sind CP-invariant.

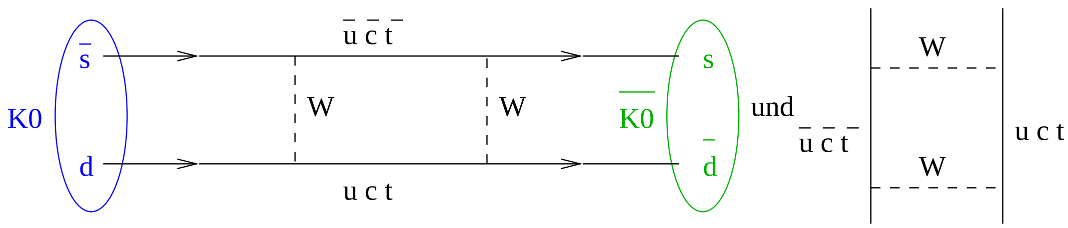
Oder doch nicht?

Christensen, Cronin, Fitch (1964): CP-Symmetrie ist in K-Zerfällen verletzt.

Neutrale Kaonen:

$$\mathscr{P}\left|\mathsf{K}^0\right\rangle = -\left|\mathsf{K}^0\right\rangle \qquad \text{(Konvention!)}$$
$$\mathscr{P}\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle = -\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle$$
$$\mathscr{C}\left|\mathsf{K}^0\right\rangle = \left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle$$
$$\mathscr{C}\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle = \left|\mathsf{K}^0\right\rangle$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}^0\right\rangle = -\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle = -\left|\mathsf{K}^0\right\rangle$$

K^0-Mischungen durch folgende Übergänge:



Gemische:

$$\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathsf{K}^0\right\rangle - \left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle\right)$$
$$\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\mathsf{K}^0\right\rangle + \left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle\right)$$

dann:

$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle + \left|\mathsf{K}^0\right\rangle\right) = +\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle \qquad \text{Eigenwert } +1$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left|\overline{\mathsf{K}}^0\right\rangle - \left|\mathsf{K}^0\right\rangle\right) = -\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle \qquad \text{Eigenwert } -1$$

Zerfälle:

$$\mathsf{K}_1^0 \to \pi^+ + \pi^- \text{ oder } \pi^0 + \pi^0$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle = \mathscr{C}\mathscr{P}\left|\pi^+\pi^-\right\rangle = +\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle$$

$$\mathsf{K}_2^0 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle = \mathscr{C}\mathscr{P}\left|\pi^+\pi^-\pi^0\right\rangle = -\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle$$

Aber es wird auch beobachtet:

$$\mathsf{K}^1 \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$
$$\mathscr{C}\mathscr{P}\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle = \mathscr{C}\mathscr{P}\left|\pi^+\pi^-\pi^0\right\rangle = -\left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle$$

im Widerspruch dazu, dass $|\mathsf{K}_1^0\rangle$ den $\mathscr{CP}$-Eigenwert $+1$ hat.
$\Rightarrow CP$-Verletzung!

Mit einer Häufigkeit von $2,3$ Promille tritt auch der Zerfall

$$\left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle \to \pi^+ + \pi^-$$

auf. Mischzustände:

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{K}_{\text{long}}^0\right\rangle &= \left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle + \varepsilon \left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle \quad \text{(langlebig)}\\ \left|\mathsf{K}_{\text{short}}^0\right\rangle &= \left|\mathsf{K}_1^0\right\rangle - \varepsilon \left|\mathsf{K}_2^0\right\rangle \quad \text{(kurzlebig)}\end{aligned}$$

Auch:

$$\mathsf{K}_{\text{long}}^0 \to \begin{Bmatrix}\pi^+ + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_R \\ \pi^- + \mathrm{e}^+ + \overline{\nu}_L\end{Bmatrix} \quad \text{Branch ratio} = 39\%$$

5. CPT-*Symmetrie*:

   Ist verletzt, wenn z.B. Masse eines Teilchens ungleich der Masse seines Antiteilchens ist, oder die Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen verschieden sind.

   Illustration:

$$\begin{gathered}\underbrace{\pi^0}_{p_{\pi^0}} \leftarrow \mathsf{K}^+ \rightarrow \underbrace{\pi^+}_{p_{\pi^+}}\\ \downarrow \mathscr{P}\\ \pi^+ \leftarrow \mathsf{K}^+ \rightarrow \pi^0\\ \downarrow \mathscr{C}\\ \pi^- \leftarrow \mathsf{K}^- \rightarrow \pi^0\\ \downarrow \mathscr{T}\\ \underbrace{\pi^-}_{p_{\pi^+}} \rightarrow \mathsf{K}^- \leftarrow \underbrace{\pi^0}_{p_{\pi^0}}\end{gathered}$$

   Wenn $m_{\mathsf{K}^-} \neq m_{\mathsf{K}^+}$, so ist kein Prozess $\pi^0 + \pi^- \to \mathsf{K}^-$ mit den Impulsen p_{π^+} und p_{π^0} möglich!

   Wenn CPT erhalten, dann ist CP verletzt, erwarte T-Verletzung; Suche nach *elektrischen Dipolmomenten* (EDM) $q\boldsymbol{\ell}$. Betrachte etwa

$$\mathsf{n}(\text{Spin}\uparrow, q\boldsymbol{\ell}\downarrow) \xrightarrow{\mathscr{T}} \mathsf{n}(\text{Spin}\downarrow, q\boldsymbol{\ell}\downarrow)$$

   Wenn resultierendes EDM gesehen wird:

$$\text{Anzahl } \mathsf{n}(\text{Spin}\uparrow, q\boldsymbol{\ell}\downarrow) \neq \text{Anzahl } \mathsf{n}(\text{Spin}\downarrow, q\boldsymbol{\ell}\downarrow) \overset{(*)}{=} \text{Anzahl } \mathscr{T}\mathsf{n}(\text{Spin}\uparrow, q\boldsymbol{\ell}\downarrow)$$

   Wenn „$\neq$“ bei $(*)$, dann ist T-Symmetrie verletzt.

5.2 Moderne Teilchenphysik

5.2.1 Struktur der Hadronen

1. Formfaktor:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(q^2)|^2$$

   Hofsatdter 1956: Elektron-Proton-Streuung, $E_\mathsf{e} = 188$ MeV:

$$|F(q^2)| = \frac{1}{(1 + q^2/0,71\ \text{GeV}^2)^2}$$

   $\Rightarrow R_\mathsf{p} = 0,8$ fm.

2. Inelastische Elektron-Kern-Streuung:

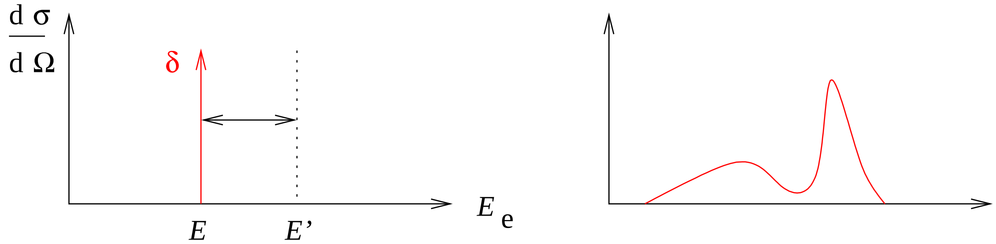


Abbildung 86: Links: Für $\lambda \approx R$: $E - E' = \nu = \frac{q^2}{2m_{\text{Kern}}}$. Rechts: Für $\lambda \ll R$: Elastische Streuung wird seltener

3. Tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung:

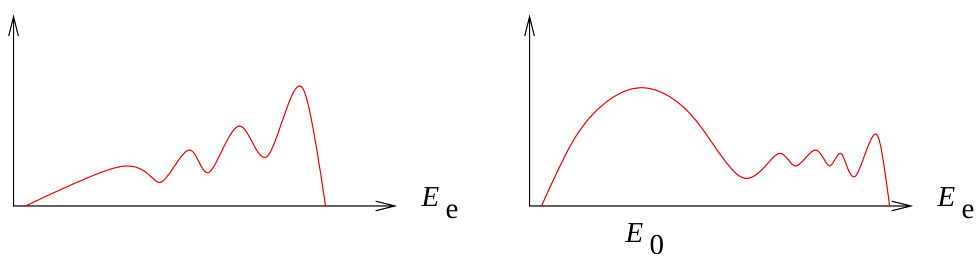


Abbildung 87: Links: Protonenresonanzen für $\lambda < R_\mathsf{p}$. Rechts: $\lambda \ll R_\mathsf{p}$: Bei E_0 elastische Streuung an punktförmigen Quarks

   Kinematik: Seien P bzw. P_e die Viererimpulse des p bzw. e, W die invariante Masse des Systems und $\nu = E - E'$.

$$W^2 = P'^2 = (P+q)^2 = P^2 + 2Pq + q^2 = m_\mathsf{p}^2 + 2m_\mathsf{p}\nu - Q^2$$

$$Pq = \begin{pmatrix} m_\mathsf{p} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu \\ P_\mathsf{e} - P'_\mathsf{e} \end{pmatrix}$$

Elastische Elektron-Proton-Streuung:
$W = m_\mathsf{p} \Rightarrow Q^2 = 2m_\mathsf{p}\nu \Rightarrow \frac{Q^2}{2m_\mathsf{p}\nu} = 1$,
$W > m_\mathsf{p} : \frac{Q^2}{2m_\mathsf{p}\nu} =: x < 1$, die Größe x heißt *Bjorken*-x.

Inelastische Streuung ab $\sqrt{Q^2} = 10$ GeV$\hat{=}\lambda = 0,1$ fm.

Beobachtung: Elastische Streuung hat ein Maximum bei $x \approx \frac{1}{3}$.
Interpretation (von Feynman und Bjorken): Bestandteile des Protons: *Partonen*.

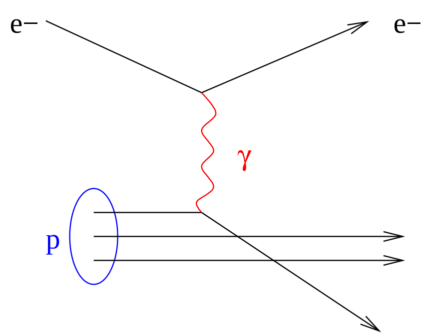


Abbildung 88: Tiefinelastische Elektron-Proton-Streuung im Partonmodell

4. Partonverteilung bei der Elektron-Proton-Streuung:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\frac{E'}{E\nu}\left(\frac{m}{\nu}F_2(Q^2,\nu)(\cos\frac{\theta}{2})^2 + 2F_1(Q^2,\nu)(\sin\frac{\theta}{2})^2\right),$$

dabei entspricht F_1 bzw. F_2 dem magnetischen bzw. elektrischen Anteil der Streuung. Mit $(\cos\frac{\theta}{2})^2 = 1 - \frac{Q^2}{4EE'} \approx 1$, $\frac{\mathrm{d}\nu}{\nu} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $1 - y := \frac{E}{E'}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\left((1-y)\frac{F_2(x)}{x} + \frac{y^2}{2}\frac{2xF_1(x)}{x}\right)$$

für $Q \Rightarrow 0, y \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}\underbrace{\int\frac{F_2(x)}{x}\mathrm{d}x}_{\sum q_i^2}$$

daraus:

$$F_2(x) = x\left(\frac{4}{9}(\mathsf{u}(x) + \bar{\mathsf{u}}(x)) + \frac{1}{9}(\mathsf{d}(x) + \bar{\mathsf{d}}(x)) + \mathsf{s}(x) + \bar{\mathsf{s}}(x)\right)$$

Allgemein zu Lepton-Nukleon-Streuung:

- elastische Streuung:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{4\pi\alpha}{q^2}\left|F(q^2)\right|^2$$

- inelastische Streuung:
$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}\nu} = \frac{4\pi\alpha}{q^2}F(x)$$

Aus Messungen von $F_2(x)$ bei $\mathsf{e}+\mathsf{p}$, $\mathsf{e}+N$, $\nu+\mathsf{p}$, $\nu+N$: $\mathsf{u}(x), \mathsf{d}(x), \overline{\mathsf{u}}(x), \overline{\mathsf{d}}(x), \ldots$.

$$\int_0^1 \left(\mathsf{u}(x)+\mathsf{d}(x)+\overline{\mathsf{u}}(x)+\overline{\mathsf{d}}(x)+\ldots\right) x\mathrm{d}x, = 0,50 \pm 0,05$$

aber erwartet: $= 1$. Der Rest sind Gluonen.

Frage: Sind Quarks punktförmig?
Wenn nicht:

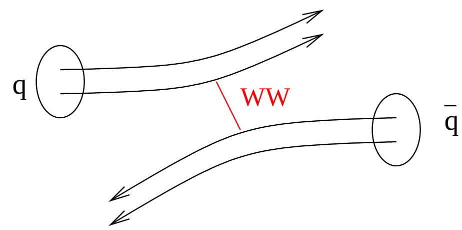


Abbildung 89: Wechselwirkung von eventuellen zusammengesetzten Quarks

Erwarte nicht $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha_s}{S}$, sondern $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \to \mathrm{const.}(\pi R^2)$.

Falls Neutrino aus *Preonen* zusammengesetzt:

$$\left.\begin{array}{r} m_\nu \approx 10\ \mathrm{meV} \\ V > 1000\ \mathrm{GeV} \end{array}\right\} \frac{m_\nu}{V} < 10^{-19}$$
$$\left.\begin{array}{r} m_\tau \approx 100\ \mathrm{GeV} \\ V > 1000\ \mathrm{GeV} \end{array}\right\} \frac{m_\tau}{V} < 10^{-1}$$

5.2.2 Phänomene der schwachen Wechselwirkung

1. Hochenergetische $\nu + N$-Streuung.

   Vergleiche

$$\nu_\mu + N \to \mu^- + X$$
und
$$\overline{\nu}_\mu + N \to \mu^+ + X.$$

Beobachtung:

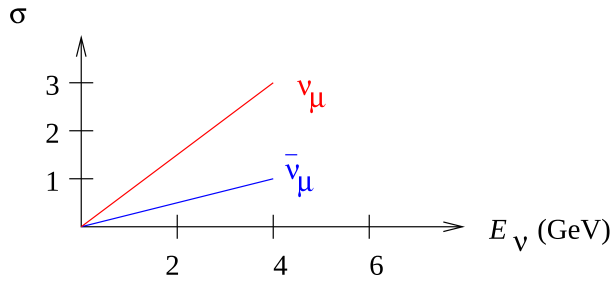


Abbildung 90: σ in Einheiten von 10^{-38} cm^2

also $\sigma_{\nu N} \sim E_\nu$ (darf nicht sein!) und $\frac{\sigma_{\overline{\nu} N}}{\sigma_{\nu N}} = \frac{1}{3}$.
Für $\nu + N$ hat μ^- eine isotrope Winkelverteilung.
Für $\overline{\nu} + N$ hat μ^- Vorwärtsrichtung.

Erklärung:

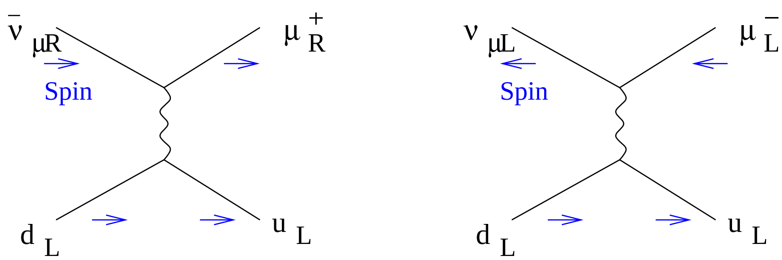


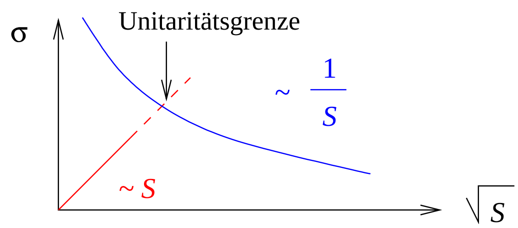
Abbildung 91: Links: Summe der Spins $= 1$, Vorwärtsstreuung (Helizität des μ!). Rechts: Summe der Spins $= 0$, isotrope Winkelverteilung möglich

Warum ist $\sigma_{\nu N} = 3\sigma_{\overline{\nu} N}$?
Wegen der Zahl der möglichen Spinorientierungen!

Angenommen: $\sigma_{\nu N} \sim E_\nu \sim G_F^2 S$ mit $S = 2m_\nu E_\nu$.
Generell: Für punktförmige Streuung von Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen ist

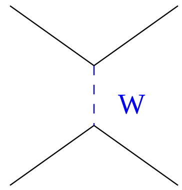
$$\sigma_{\max} = \pi \frac{\hbar^2}{p^2} \frac{2\ell + 1}{2J + 1} = \frac{\pi \hbar^2}{2p^2 m} = \frac{2\pi\hbar}{S}$$

für $\ell = 0$, $J = \frac{1}{2}$.



Widerspruch, wenn Unitaritätsgrenze überschritten wird!

Ausweg: Austausch von massiven Bosonen.



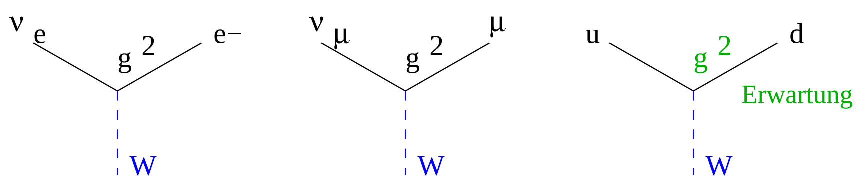
$$G_F = g^2 \frac{\sqrt{2}}{8m_{\mathsf{W}}^2}$$

mit $m_{\mathsf{W}} \approx 800$ GeV$/\mathrm{c}^2$. Für die Kopplungskonstante folgt:

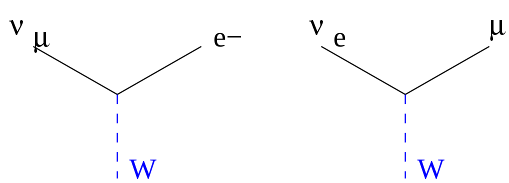
$$a_{\mathrm{w}} = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{1}{2g}.$$

2. Schwache Wechselwirkung von Quarks.

   β-Zerfälle, Mesonzerfälle, ν-Nukleon-Streuung: Austausch eines massiven Bosons mit universeller Kopplung an q, Leptonen.



nicht beobachtet:



$\Rightarrow$ keine Sprünge zwischen Teilchengenerationen (Isospindubletts). Andererseits:

$$\Lambda \to \mathsf{p} + \mathsf{e}^- + \overline{\nu}_{\mathsf{e}}$$
$$\mathsf{K}^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$

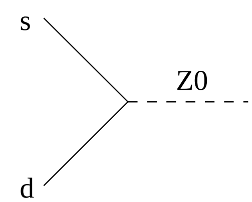
Aus n-,μ-Zerfällen: $\frac{G_{F\mathsf{n}}}{G_{F\mu}} = 0,98 \neq 1$.

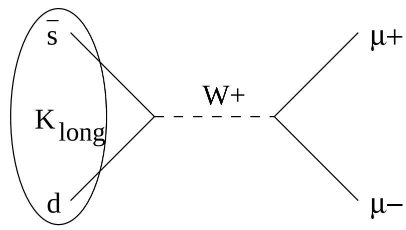
Cabibbo: Quarks mischen.
Isospindublett:

$$\begin{pmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{d}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{d}\cos\theta_C + \mathsf{s}\sin\theta_C \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:
Kopplung u, d $\sim \frac{g}{\sqrt{s}} \cos\theta_C$,
Kopplung u, s $\sim \frac{g}{\sqrt{s}} \sin\theta_C$
$\Rightarrow \frac{G_{F\mathsf{n}}}{G_{F\mu}} = (\cos\theta_C)^2 = 0,98$.

Problem: Erwarte folgende Reaktionen:



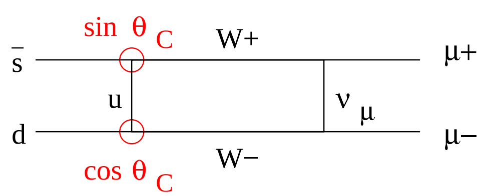


Branch ratios:
$7 \cdot 10^{-9}\%$ für $\mathsf{K}^0 \to \mu^+ + \mu^-$ im Gegensatz zu 64% für $\mathsf{K}^+ \to \mu^+\nu_\mu$.

Vorschlag von Glashauer, Illiopolis, Maiani 1970:

Neben $\begin{pmatrix} \mathsf{u} \\ \mathsf{d}_C \end{pmatrix}$ auch

$$\begin{pmatrix} \mathsf{c} \\ \mathsf{s}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{c} \\ \mathsf{s}\cos\theta_C - \mathsf{d}\sin\theta_C \end{pmatrix}$$



zusätzlich:

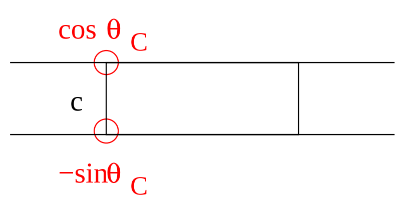


Abbildung 92: Oben: $\mathscr{M} \sim g^2 \cos\theta_C \sin\theta_C$. Unten: $\mathscr{M} \sim g^2 \cos\theta_C(-\sin\theta_C)$

$\Rightarrow \sum \mathscr{M} = 0$ (Auslöschung durch Interferenz).

In Wirklichkeit: $\sum \mathscr{M}$ sehr klein, da $m_\mathsf{c} \gg m_\mathsf{u}$.

Schwacher Strom:

$$J_\mathrm{w} = (\bar{\mathsf{u}} \quad \bar{\mathsf{c}}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{d} \\ \mathsf{s} \end{pmatrix}$$

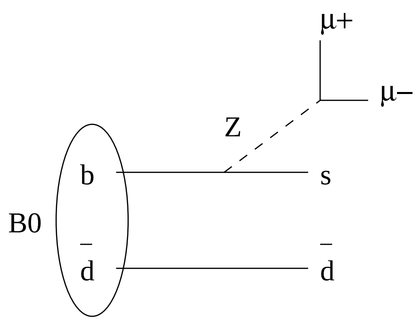
Bei drei Quarkgenerationen:

$$J_\mathrm{w} = \begin{pmatrix} \bar{\mathsf{u}} & \bar{\mathsf{c}} & \bar{\mathsf{t}} \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} \mathsf{d} \\ \mathsf{s} \\ \mathsf{b} \end{pmatrix} ,$$

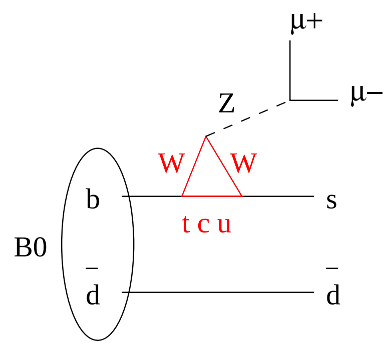
dabei ist M die *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix*. Sie kann beschrieben werden durch drei Winkel und eine komplexe Phase.

Suche nach FCNC („flavour changing neutral current“):

nicht möglich:



aber dies ist möglich:

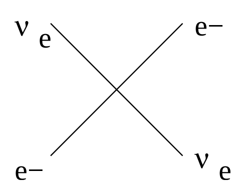


Branch ratio von $\mathsf{B}^0 \to \overline{\mathsf{K}}^0 + \mu^+ + \mu^-$ im Standardmodell: $\approx 10^{-6}$.

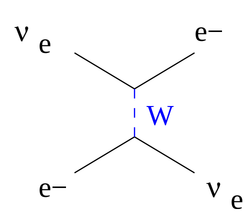
5.2.3 Elektroschwache Vereinigung

Weinberg, Salam 1967,-68: Vereinigung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung.

1. Divergenz in der schwachen Wechselwirkung
   Erinnerung: G_F hat eine Dimension: $\frac{1}{\mathrm{GeV}^2}$.

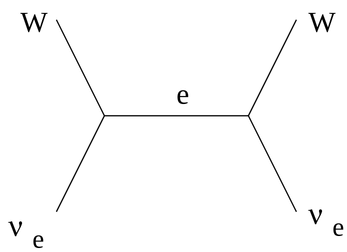


$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}q^2} = \frac{G_F^2}{\pi} \Rightarrow \sigma_{\nu\mathsf{e}} = \frac{G_F^2}{\pi} S$
$\Rightarrow$ Unitaritätsverletzung bei $\sqrt{S} \approx 600$ GeV.
$\Rightarrow$ W-Bosonen:

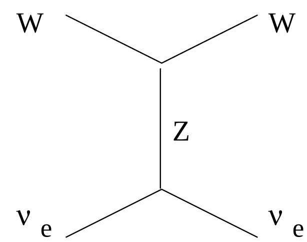


Propagator: $\frac{1}{q^2+m_{\mathrm{W}}^2}$.

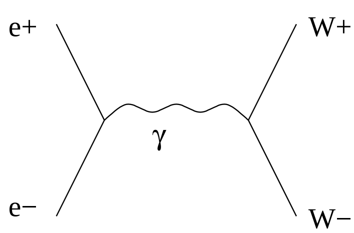
2. Weitere Divergenzen Propagator: $\frac{g_{\mu\nu}-\frac{g_\mu g_\nu}{m_{\mathrm{e}}^2}}{q^2-m_{\mathrm{e}}^2}$



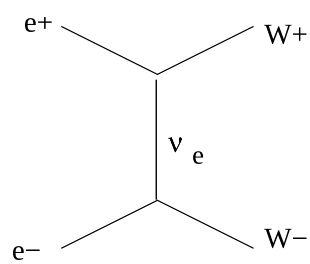
und



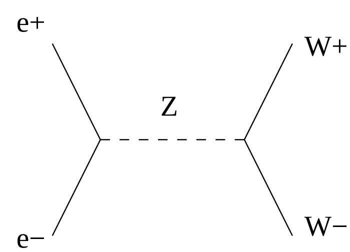
3. Anpassung der Kopplung



und

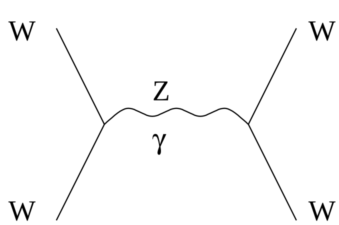


und

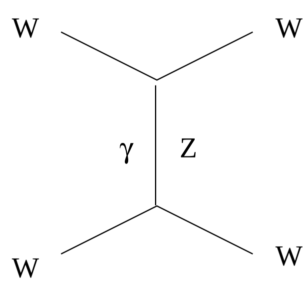


Nicht divergent, wenn $g = \frac{e}{\sin\theta_{\mathrm{W}}}, \sin\theta_{\mathrm{W}} \approx 0,22$ und $g_{\mathrm{Z}} = \frac{e}{\sin\theta_{\mathrm{W}}\cos\theta_{\mathrm{W}}}$.

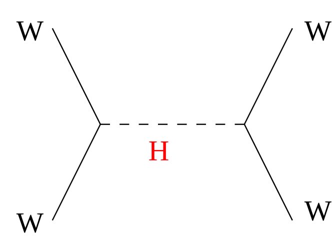
4. Weitere Divergenzen verlangen ein skalares Boson: Das *Higgs-Boson* H.



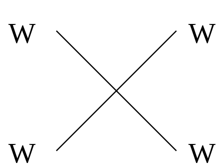
und



und

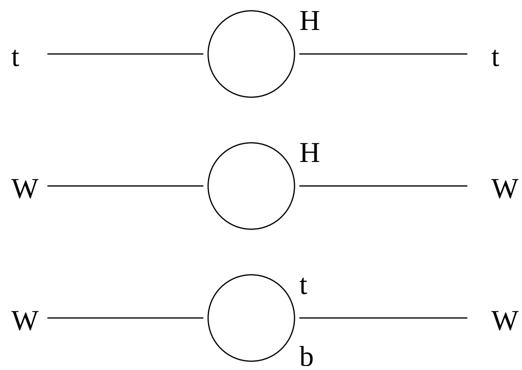


und



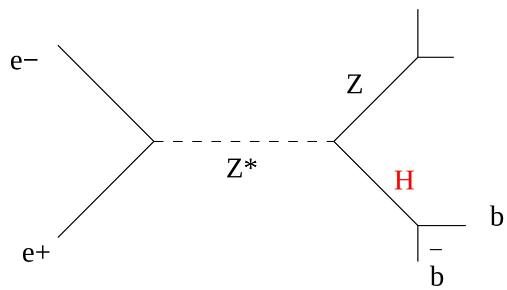
Wenn H existiert: $m_{\mathrm{H}} < 1,2$ TeV, $g_{\mathrm{H}} \sim m_{\text{Teilchen}}$.

Wie kann man m_{H} bestimmen?



$\Rightarrow m_{\mathsf{H}} < 250$ GeV.

Such nach dem Higgs-Boson (LEP):



$\Rightarrow m_{\mathsf{H}} > 114,5$ GeV.

Elektroschwache Eichtheorie $\rightarrow$ Standardmodell.

Freie Parameter: e, $\sin\theta_{\mathsf{W}}$, m_{W}, m_{H}, die Massen der drei Leptonen, die Massen der drei Neutrinos, die Massen der Quarks, drei Winkel der CKM-Matrix, eine Phase der CKM-Matrix, Λ_{QCD}.
Insgesamt 21 freie Parameter.

5.2.4 Offene Fragen

Warum drei Familien von Quarks?

C-, P-, CP-Verletzung.

Warum gerade $Q(\mathsf{u} + \mathsf{u} + \mathsf{d}) = -Q(\mathsf{e}^-)$?

Wie lässt sich die Gravitation einbauen?

Warum gerade 21 Parameter?

5.3 Astrophysik

Elemententstehung im frühen Universum:

- Als das Universum $t_\mathrm{U} \approx 10^{-4}$ s...1 s alt war, betrug die Temperatur $T_\mathrm{U} = 10^{12}$ K...10^{10} K. Im thermischen Gleichgewicht:

  $$\begin{aligned} \mathsf{e}^+ + \mathsf{e}^- &\leftrightarrow \gamma + \gamma \\ \mathsf{p} + \mathsf{e}^- &\leftrightarrow \mathsf{n} + \nu_\mathsf{e} \\ \mathsf{n} + \mathsf{e}^+ &\leftrightarrow \mathsf{p} + \overline{\nu}_\mathsf{e} \end{aligned}$$

  aber: $\frac{N_\mathsf{n}}{N_\mathsf{p}} = \mathrm{e}^{-\frac{m_\mathsf{n} - m_\mathsf{p}}{kTc^2}}$.

- Bei $t_\mathrm{U} = 1$ s, $T_\mathrm{U} = 10^{10}$ K: $\frac{N_\mathsf{n}}{N_\mathsf{p}} = \mathrm{e}^{-1,5} \approx 0,22$.

- Bis zu $t_\mathrm{U} = 220$ s: Die Neutronen zerfallen, $\frac{N_\mathsf{n}}{N_\mathsf{p}} = 0,14$.
  $\Rightarrow$ Fusion:

  $$\mathsf{n} + \mathsf{p} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He}.$$

  $\frac{N_\mathrm{He}}{N_\mathrm{H}} = \frac{N_\mathsf{n}}{2(N_\mathsf{p} - N_\mathsf{n})} = 0,081$
  $\Rightarrow \frac{m(\mathrm{He})}{m(\mathrm{He+H+d+Li})} = 0,25$ (interstellare Gase).

Literatur

[1] Diekmann, Heinloth: *Energie*, 2. Auflage Teubner 1997.

[2] Hagiwara et al.: PRD 66 (2002), pdg.lbl.gov/2003/contents-listing.html

[3] Povh, Rith, Scholz, Zetsche: *Teilchen und Kerne*, 6. Auflage Springer 2004.

Index