

1. Klein, Kleiner, am Kleinsten, Unteilbar

Die Vorstellung, dass die Materie aus elementaren Bestandteilen (atomos = unteilbar) aufgebaut ist, wurde bereits in der Antike von griechischen Philosophen im 5. vorchristlichen Jahrhundert entwickelt, so z.B. von Leukippos von Milet und seinem Schüler Demokritos von Abdera. Welche physikalischen Modelle der Neuzeit (vor 1911 als Rutherford den Atomkern "entdeckt") beruhen auf dieser Vorstellung, welche experimentellen Ergebnisse belegen sie?

2. Größenordnungen und Einheiten

Ein Wasserstoffatom hat einen Radius von etwa $0.25 \text{ \AA}$ und ein Bleiatom von $1.8 \text{ \AA}$.

- (a) Welcher Anteil des Volumens eines Wasserstoffatoms ist vom Kern ausgefüllt (Radius des Protons ist etwa 0.87 fm)?
- (b) Ein Proton wiegt etwa $938.3 \text{ MeV}/c^2$. Schätzen sie die Dichte von Kernmaterie in g/cm^3 daraus ab. Was ist eine sinnvollere Einheit für diese Größe?
- (c) Welcher Anteil der Masse des Wasserstoffatoms befindet sich im Kern (Bindungsenergie der Elektronen vernachlässigen)?
- (d) Der Radius von schweren Kernen berechnet sich näherungsweise mit $r = 1,3 A^{1/3} \text{ fm}$. Wiederholen sie die vorherigen Abschätzungen für das Isotop ^{208}Pb mit einer atomaren Masse von 207.98 u (Bindungsenergie der Elektronen vernachlässigen).
- (e) Schätzen sie grob ab, welches Volumen ein Nukleon im Bleikern einnimmt. Wie vergleicht dies mit dem Volumen eines Protons? Führen sie die gleiche Abschätzung für Bleimetall (Dichte $11.34 \text{ g}/\text{cm}^3$) und Wasserstoffgas (Dichte unter Normalbedingungen $0.09 \text{ kg}/\text{m}^3$, das Volumen des H_2 -Moleküls kann als das Doppelte eines H-Atoms angenommen werden) durch. Wie würden sie Kernmaterie eher beschreiben: fest, flüssig oder gasförmig?
- (f) Noch etwas zum Rechnen: Die Erde wiegt $5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und hat einen Radius von $6.38 \cdot 10^6 \text{ m}$. Welchen Radius hätte die Erde, wenn sie aus Kernmaterie wie der Bleikern bestehen würde? Welchen Radius hätte ein Bleikern, wenn er aus "Erdmaterial" bestehen würde?

3. Spezielle Relativitätstheorie

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c eines:

- Protons $p(uud) : m_p = 938.2796 \text{ MeV}/c^2$,
- Elektrons $e : m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$,
- Myons $\mu : m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$,
- Kaons $K^+(u\bar{s}) : m_{K^+} = 493.677 \text{ MeV}/c^2$,
- Pions $\pi^+(u\bar{d}) : m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$,

mit jeweils einer totalen Energie von 1GeV .

b) Protonen aus der kosmischen Höhenstrahlung wurden mit Energien bis zu $5 \cdot 10^{21} \text{ eV}$ gemessen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines Tennisballs ($m = 80 \text{ g}$) mit dieser kinetischen Energie.

(b) Aus welchen Quarks (und aus was noch) besteht denn der Tennisball?

Lexikon: Vergleicht man die Masse eines Atomkerns mit der Gesamtmasse seiner Nukleonen, so stellt man fest, daß die Masse des Kerns stets kleiner ist als die Summe der Nukleonenmassen. Dieser Unterschied Δm heißt Massendefekt.

Definition: Die Bindungsenergie eines Kerns ist diejenige Energie, die dem Massendefekt äquivalent ist, der beim Zusammenfügen des Kerns aus seinen Nukleonen entsteht.

Masse des Protons: $m_p = 1,007276470 \text{ u}$ ($1u = 1,660540 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

Masse des Neutrons: $m_n = 1,008665012 \text{ u}$

Masse des Elektrons: $m_e = 0,000548580u$

Die atomare Masseneinheit 1 u entspricht der Energie $E = mc^2 = 931,5 \text{ MeV} (\approx 1 \text{ GeV})$.

Die Avogadro Zahl: $N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$r_{\text{Nukleon-in-Pb}} \approx 1,3 \text{ fm}$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor

Tel.: 07247 82 4173; Büro

Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Klein, Kleiner, am Kleinsten, Unteilbar

- Kinetische Gastheorie (Boyle, Bernoulli, Clausius, Maxwell, Boltzmann)
 - alle Gasmoleküle eines Gases sind identisch
 - elastische Stöße zwischen Molekülen
 - $T \propto E_{kin} \rightarrow$ mikroskopische Definition der Temperatur
- Physikalische Chemie (Dalton, Gay-Lussac, Avogadro, Loschmidt) Reaktion / Mischung von Gasen: $n_A A + n_B B \rightarrow n_C C + n_D D$
- n_{A-D} sind kleine ganze Zahlen Avogadro-Konstante, Stoffmenge $1 \text{ mol} = 6 \cdot 10^{23}$ Moleküle / Atome eines Stoffs
- Faraday-Gesetz Bei Elektrolyse abgeschiedene Menge $m \propto$ transportierte Ladung $Q \rightarrow$ geladene Atome = Ion $\rightarrow$ es existiert eine Elementarladung
- Struktur des Atoms
 - Entdeckung des e- (Thompson)
 - Radioaktivität (Bequerel) $\rightarrow$ Atome sind wohl doch nicht Elementarteilchen.
- Milikan Messung der Elementarladung

2. Größenordnungen und Einheiten

Ein Wasserstoffatom hat einen Radius von etwa $0.25 \text{ \AA}$ und ein Bleiatom von $1.8 \text{ \AA}$.

(a) Volumenvergleich Atom/Kern

$$V_H = \frac{4\pi}{3}(0.25 \cdot 10^{-10})^3 = 6.54 \cdot 10^{-32} \text{ m}^3 \quad (1)$$

$$V_p = \frac{4\pi}{3}(0.87 \cdot 10^{-15})^3 = 2,76 \cdot 10^{-45} \text{ m}^3 = 2,76 \text{ fm}^3 = 4,22 \cdot 10^{-14} V_H \quad (2)$$

(b) Dichteberechnung:

Achtung Avogadrozahl gilt für u:

$$\frac{938.3}{931.5} \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ g}; \quad \varrho = \frac{m}{V} = 6.05 \cdot 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad (3)$$

Nützlichere Einheit:

$$\frac{938.3 \text{ MeV c}^{-2}}{2,76 \text{ fm}^3} = 339,96 \frac{\text{MeV c}^{-2}}{\text{fm}^3} \quad (4)$$

Die brauchbare Einheit ist also $\frac{\text{GeV}}{\text{fm}^3}$, wobei c^2 dann weggelassen wird :-)

(c) Anteil der Kernmasse eines Atoms:

$$\frac{938,3}{938,3 + 0,5} \approx 99,5\% \quad (5)$$

(d) Desgleichen für Blei, zunächst das Volumen

$$\begin{aligned} r &= 1,3 \cdot 208^{1/3} fm = 7,7 fm \\ V_{PB-Atom} &= 2,44 \cdot 10^{-29} m^3 \\ V_{PB_{Kern}} &= 1,91 \cdot 10^{-42} m^3 = 1,91 \cdot 10^3 fm^3 = 7,83 \cdot 10^{-14} V_{PB-Atom} \end{aligned}$$

Dann die Dichte:

$$\frac{207,98 \cdot 931,5 - 82 \cdot 0,5 MeV}{1,91 \cdot 10^3 fm^3} = 101,41 \frac{MeV}{fm^3} \approx 0,1 \frac{GeV}{fm^3} \quad (6)$$

(e) Anteil den die Nukelonen im Kernvolumen einnehmen:

$$\begin{aligned} V_{N/Pb} &= \frac{4\pi}{3} (1,3 fm)^3 \\ V_p &= \frac{4\pi}{3} (0,87 fm)^3 \Rightarrow \frac{V_p}{V_{N/Pb}} \approx 30\% \end{aligned}$$

Für Bleiatome sieht die Abschätzung wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \rho_{Pb} &= 11,34 \frac{g}{cm^3} \\ \rho_{Pb-Atom} &= \frac{207,98 \cdot 931,5 MeV c^{-2}}{\frac{4\pi}{3} (1,8 \text{Å})^3} = 14,185 \frac{g}{cm^3} \Rightarrow \frac{\rho_{Pb}}{\rho_{Pb-Atom}} \approx 80\% \end{aligned}$$

Für Wasserstoffgas:

$$\begin{aligned} \rho_{H_2} &= 0,09 \frac{kg}{m^3} \\ \rho_{H-Atom} &= \frac{938,3 MeV c^{-2}}{\frac{4\pi}{3} (0,25 \text{Å})^3} = 25,643 \frac{g}{cm^3} \Rightarrow \frac{\rho_{H_2}}{\rho_{H-Atom}} \approx 3,5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse legen nahe, Atomkerne eher nicht als ein relativ dünnes Gas, sondern als Festkörper oder — entsprechend der mangelnden festen räumlichen Anordnung — als Flüssigkeit zu beschreiben.

(f) Wenn die Erde um den Faktor $\frac{\rho_{Kernmaterie}}{\rho_{Erdmaterie}}$ dichter werden soll, verringert sich das eingenommene Volumen um den Kehrwert dieses Ausdrucks, und der Radius schrumpft entsprechend mit der dritten Wurzel:

$$\begin{aligned} \rho_{Kernmaterie} &= \frac{0,87^3}{1,3^3} \cdot 6,05 \cdot 10^{14} \frac{g}{cm^3} \\ \rho_{Erdmaterie} &= \frac{5,98 \cdot 10^{24} kg}{\frac{4\pi}{3} (6,38 \cdot 10^6)^3} \\ \Rightarrow R &= 6,38 \cdot 10^6 m \cdot \left(\frac{\rho_{Kernmaterie}}{\rho_{Erdmaterie}} \right)^{1/3} \approx 200 m \end{aligned}$$

Umgekehrt wird ein Atom, dessen Dichte man um den Faktor $\frac{\rho_{\text{Kernmaterie}}}{\rho_{\text{Erdmaterie}}}$ reduziert, um den Faktor $\left(\frac{\rho_{\text{Kernmaterie}}}{\rho_{\text{Erdmaterie}}}\right)^3$ grösser, das ergibt:

$$R_{\text{Erddmaterialbleikern}} = 2,4 \text{ \AA} \quad (7)$$

Es mag zunächst verwundern, dass der Kern nicht wesentlich grösser wird, als das Atom, aber wenn man sich überlegt, dass die Atome ja im wesentlichen in der Erde dicht gepackt sind, kann die Erddichte nicht dramatisch von der mittleren Atomdichte abweichen ...

3. Spezielle Relativitätstheorie

(a) $E = \gamma m_0$ mit $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ also $\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$

$$\begin{array}{llll} \gamma_p & = & E/m_p & = & 1.066, & \beta_p & = & 0.346 \\ \gamma_e & = & E/m_e & = & 1957, & \beta_e & = & 1-1.3 \cdot 10^{-7} \\ \gamma_\mu & = & E/m_\mu & = & 9.52, & \beta_\mu & = & 0.9945 \\ \gamma_K & = & E/m_K & = & 2.03, & \beta_K & = & 0.869 \\ \gamma_\pi & = & E/m_\pi & = & 7.165, & \beta_\pi & = & 0.9902 \end{array}$$

(b) Umrechnung eV $\rightarrow$ J: $1 \text{ eV} = e [\text{C}] \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

$5 \cdot 10^{21} \text{ eV} = 801 \text{ J}$ bei diesen Energien gilt $E_{\text{tot}} \approx E_{\text{kin}}$ somit folgt für den Tennisball:

$$E_{\text{kin}} = p^2/2m \rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

$$v = p/m = \sqrt{2E/m} = \sqrt{\frac{2 \cdot 801 \text{ kgm}^2/\text{s}^2}{0.080 \text{ kg}}} = 141.5 \text{ m/s}$$

Dies ist etwas weniger als die Hälfte der Schallgeschwindigkeit.

- (c) Aus Protonen und Neutronen $\rightarrow$ u,d Quarks ($\leftarrow$ reine Materie der ersten Quark-generation
(plus See-quarks) plus Gluonen plus Elektronen.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor
Tel.: 07247 82 4173; Büro
Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Iso-X

Was sind

- Isotope
- Isobare
- Isotone
- Isomere
- Isotrope
- Spiegelkerne

Geben Sie jeweils ein Beispiel an!

Zeichnen Sie ein Z-A Diagramm incl. der Iso-X Linien!

2. Wirkungsquerschnitt und Stoßparameter – Streuung an einer harten Kugel

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Teilchens hat die folgende Form:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right|$$

Dabei ist b der Stoßparameter, welcher als Abstand zwischen Streuzentrum und der Asymptote der Bahn des einlaufenden Teilchens definiert ist. θ ist der Streuwinkel, der als der Winkel zwischen der Fortsetzung der Asymptote der Bahn des einlaufenden Teilchens über das Streuzentrum hinaus und der Asymptote der Bahn des auslaufenden Teilchens definiert ist.

Berechnen Sie den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung eines punktförmigen Teilchens an einer harten Kugel mit Radius R .

Hinweis: Zeichnen Sie sich zur Lösung der Aufgabe eine Skizze, in der Sie die Kugel, die Teilchenbahn, den Streuparameter und Einfalls- und Ausfallswinkel eintragen. Zeigen Sie unter Verwendung von Drehimpulserhaltung, dass Einfalls- und Ausfallswinkel gleich sind. Berechnen Sie b als Funktion von θ .

3. Atomare Masseneinheit, Bindungsenergie, Massendefekt:

- (a) Die atomare Masseneinheit u wurde als $\frac{1}{12} \cdot m_{^{12}\text{C}}$ definiert. Bestimmen Sie die Bindungsenergie pro Nukleon für die folgenden Nuklide ($u = 931.494 \text{ MeV}/c^2$):

$^{12}_6\text{C}$:	$m(^{12}_6\text{C})$	=	12 u
$^{56}_{26}\text{Fe}$:	$m(^{56}_{26}\text{Fe})$	=	55.9394 u
$^{238}_{92}\text{U}$:	$m(^{238}_{92}\text{U})$	=	238.0486 u
^6_3Li :	$m(^6_3\text{Li})$	=	6.015125 u
$^{39}_{19}\text{K}$:	$m(^{39}_{19}\text{K})$	=	38.963710 u
$^{208}_{82}\text{Pb}$:	$m(^{208}_{82}\text{Pb})$	=	207.976650 u

Tragen Sie die Bindungsenergie/Nukleon gegen A und Z auf. In welchem Bereich kann man durch Kernspaltung, in welchem durch Kernfusion Energie gewinnen?

(b) Weizsäcker Massenformel

- Wie setzen sich die oben berechneten Bindungsenergien zusammen? Nennen Sie die Bethe-Weizsäcker-Formel und erläutern Sie die physikalischen Bedeutung der einzelnen Glieder.
- Bestimmen Sie analytisch aus der Weizäckerschen Massenformel die Ladungszahl Z der jeweils stabilsten Isotope in Abhängigkeit von A . Nehmen Sie dabei A und Z als kontinuierlich an.
- Bestimmen Sie die bei der Spaltung eines ^{238}U -Kerns ($Z+92$) in zwei identische Bruchstücke freiwerdende Energie.

Lexikon:

Konstanten:

Ruhemasse des Elektrons:	$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$
Ruhemasse des Protons $p(uud)$:	$m_p = 938.2723 \text{ MeV}/c^2$ (PDG 1998)
Ruhemasse des Neutrons $n(udd)$:	$m_n = 939.5656 \text{ MeV}/c^2$ (PDG 1998)
Plancksches Wirkungsquantum:	$\hbar = 6.5822 \cdot 10^{-16} \text{ eVs}$,
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Nettes Periodensystem der Elemente: <http://web.mit.edu/3.091/www/pt/pert1.html>

**Matrix der “virtuellen“ Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:
(1/2/3a+3bi/3bii+3biii)**

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor

Tel.: 07247 82 4173; Büro

Email: Frank.Hartmann@cern.ch

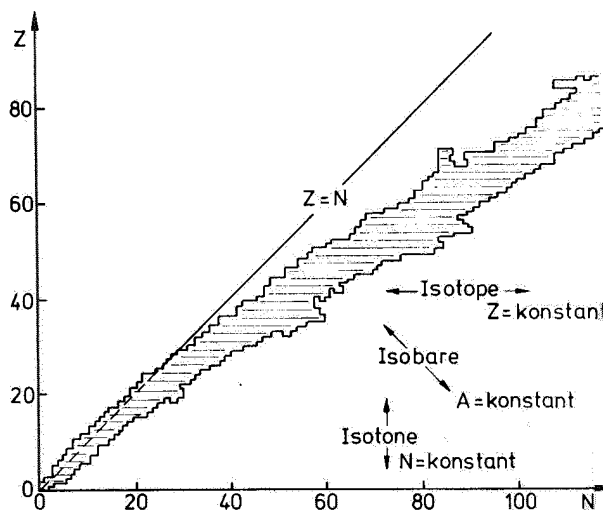
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Iso-X

Was sind..

Begriff	Erläuterung	Beispiel
Nukleonen	Protonen und Neutronen	
Nuklid	Kern A_ZX mit Z Protonen und $N = (A - Z)$ Neutronen	${}^7_3\text{Li}$, ${}^{238}_{92}\text{U}$
Isotope	Kerne mit gleicher Protonenzahl Z und unterschiedl. Neutronenzahl N	${}^{12}_6\text{C}$, ${}^{14}_6\text{C}$
Isobare	Kerne mit gleicher Massenzahl A aber verschied. Protonenzahl Z	${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$
Isotone	Kerne mit gleicher Neutronenzahl N aber verschied. Protonenzahl Z	${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{15}_7\text{N}$, ${}^{16}_8\text{O}$
Spiegelkerne	Kerne mit vertauschten Werten von Z und N : $Z_1 = N_2$; $N_1 = Z_2$	${}^3_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$; ${}^{13}_6\text{C}$, ${}^{13}_7\text{N}$
Isotrope	Gleichförmig im Raum verteilte Anordnung; hat nichts mit Kernen zu tun!	
Isomere	Kerne mit gleichen Z und N in verschiedenen Energiezuständen	

Zeichnen sie ein Z-A Diagramm incl. der Iso-X Linien!



2. Wirkungsquerschnitt und Stoßparameter – Streuung an einer harten Kugel

Aus der Skizze: $\varphi_1 + \varphi_2 + \theta = \pi$

zu zeigen: $\varphi_1 = \varphi_2$ (Reflexionsgesetz)

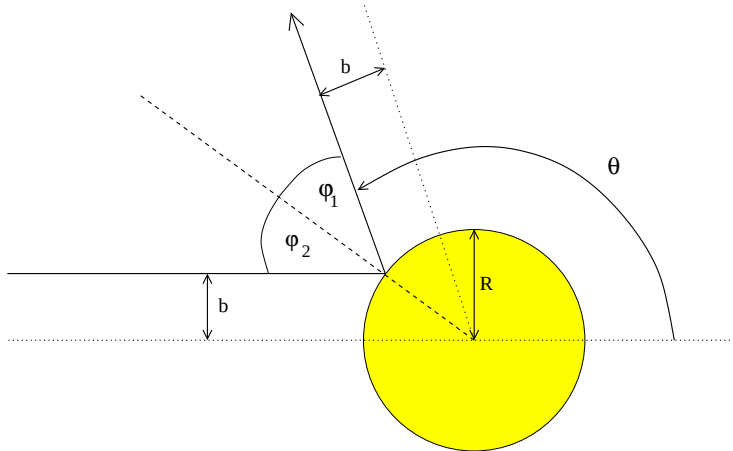


Abbildung 1: Streuung an einer harten Kugel.

Drehimpuls des punktförmigen Probeteilchens: $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r}$, $|\vec{L}| = L_z = pR \sin \varphi$

Drehimpulserhaltung im Umkehrpunkt:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ p R \sin \varphi_1 &= p R \sin \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad (q.e.d.) \end{aligned}$$

Damit gilt für den Streuwinkel: $\theta = \pi - 2\varphi$

Aus der Zeichnung:

$$b = R \sin \varphi = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} R \sin \frac{\theta}{2}$$

Einsetzen in die gegebene Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \frac{1}{2} R \sin \frac{\theta}{2}$$

Mit $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2$$

$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}$ hängt nicht vom Streuwinkel ab.
 $\Rightarrow$ isotrope Streuung.

Totaler Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \pi R^2$$

$\Rightarrow$ Querschnittsfläche der Kugel.

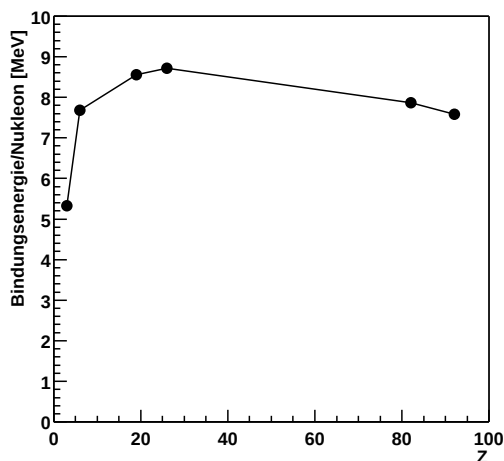
3. Atomare Masseneinheit, Bindungsenergie, Massendefekt:

- (a) u ist als $\frac{1}{12}$ der Masse des Kohlenstoffatoms definiert, d.h. die Elektronen müssen bei der Masse der Bestandteile berücksichtigt werden:

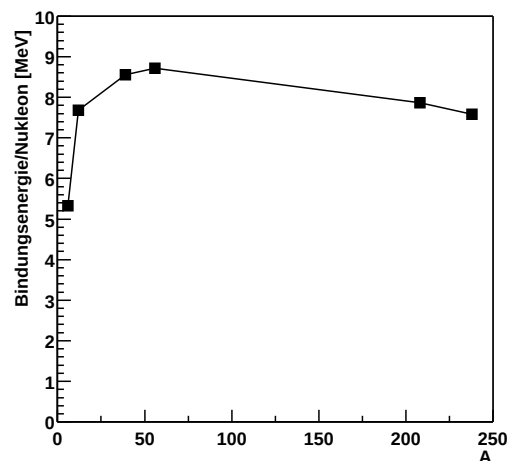
$$E_b = Z \cdot (m_p + m_e)c^2 + (A - Z) \cdot m_n c^2 - m_{Atom} c^2$$

Element	E_b/A (MeV/c ²)
${}^6_3\text{Li}$:	5.33
${}^{12}_6\text{C}$:	7.68
${}^{39}_{19}\text{K}$:	8.56
${}^{56}_{26}\text{Fe}$:	8.72
${}^{208}_{82}\text{Pb}$:	7.87
${}^{238}_{92}\text{U}$:	7.58

Bindungsenergie als Funktion von Z



Bindungsenergie als Funktion von A



Bei kleinen Massenzahlen ($A < 50..60$) ist Kernfusion möglich, bei größeren Kernspaltung.

(b) Weizsäcker Massenformel

- (i) Wie setzt sich die oben berechnete Bindungsenergie zusammen? Nennen sie die Bethe-Weizsäcker-Formel und erläutern sie die physikalischen Bedeutung

der einzelnen Glieder.

Massenformel auf Mayer-Kuckuk:

$$\begin{aligned}
 m(Z, A) &= Z \cdot m_P + (A - Z)m_n - B(Z, A) \\
 &= Z \cdot m_P + (A - Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \pm \delta \\
 \delta &\approx a_p A^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Bindungsenergiebeiträge der Weizsäckerformel:

$$B_1 = a_V A \quad \text{Volumenenergie} \propto A \text{ Kernvolumen} \tag{2}$$

$$B_2 = a_S A^{2/3} \quad \text{Oberflächenenergie} \propto A^{\frac{2}{3}} \tag{3}$$

$$B_3 = a_C Z^2 A^{-1/3} \quad \text{Coulombenergie} \tag{4}$$

$$B_4 = a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \quad \text{Asymmetrie - Energie} \tag{5}$$

$$B_5 = \pm \delta \quad \text{Paarungsenergie (empirisch)} \tag{6}$$

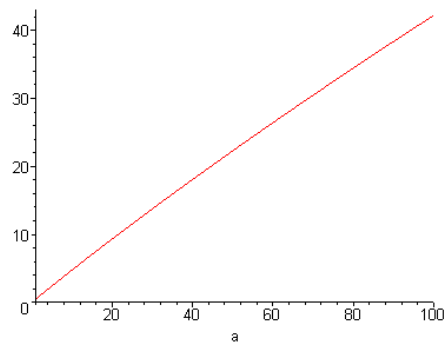
$$\begin{aligned}
 \delta &\text{ für gg - Kerne} \\
 B_5 &= 0 \quad \text{für ug - oder gu - Kerne} \\
 &-\delta \quad \text{für uu - Kerne}
 \end{aligned}$$

- (ii) Gesucht wird die Lage des Tals der Stabilität. β -Zerfälle finden entlang von Isobaren zum Tal hin statt. Man untersucht also Änderungen bei festem A: Bindungsenergie maximal bei stabilstem Kern (Masse minimal) .

Für die Masse des Kerns gilt:

$$\begin{aligned}
 m(Z, A) &= Z \cdot m_P + (A - Z)m_n - B(Z, A) \\
 &= Z \cdot m_P + (A - Z)m_n - a_V A + a_S A^{2/3} + a_C Z^2 A^{-1/3} + a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \\
 \frac{\partial m}{\partial Z} &= m_P - m_n + 2a_C Z A^{-1/3} + 2a_A \frac{Z - A/2}{A} = 0 \\
 Z_{Stab} &= \frac{m_n - m_P + a_A}{2a_C A^{-1/3} + 2a_A/A} = \frac{A}{2} \cdot \frac{a_A + m_n - m_P}{a_C A^{2/3} + a_A} \\
 &= \frac{A}{2} \cdot \frac{90 + 938.3 - 939.6}{0.7A^{2/3} + 90} = \frac{A}{1.972 + 0.0153A^{2/3}}
 \end{aligned}$$

Dieser funktionelle Zusammenhang ist in dem Plot unten dargestellt.



(iii) Symmetrische Spaltung

$$m(Z = 92, A = 238)$$

$$\Rightarrow 2m(Z = 46, A = 119)$$

$$\Rightarrow \text{frei werdenden Energie: } 2B(46, 119) - B(92, 238)$$

$$\begin{aligned} X &= 2 \cdot (a_V 119 - a_S 119^{2/3} - a_c 46^2 \cdot 119^{-1/3} - a_A \frac{(46 - 119/2)^2}{119}) \\ &\quad - (a_V 238 - a_S 238^{2/3} - a_c 92^2 \cdot 238^{-1/3} - a_A \frac{(92 - 238/2)^2}{238}) \\ &= -2a_S 119^{2/3} - 2a_c 46^2 \cdot 119^{-1/3} + a_S 238^{2/3} + a_c 92^2 \cdot 238^{-1/3} \\ &= a_S (238^{2/3} - 2 \cdot 119^{2/3}) + a_c (92^2 238^{-1/3} - 2 \cdot 46^2 119^{-1/3}) \\ &= 17.2 \text{ MeV}(-9.98) + 0.7(505.4) \text{ MeV} \\ &= 182.1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

frei werdende Bindungsenergie bei der symmetrischen Spaltung von
 $^{238}\text{U} \Rightarrow 46\text{Pd}$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor

Tel.: 07247 82 4173; Büro

Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

Kleine Anmerkung: Bitte beachten Sie, dass es in der Kernphysik häufig der Literaturrecherche zuzüglich zum Vorlesungsstoff bedarf, um alle Aufgaben vollständig zu bearbeiten, da in der Vorlesung Themen nur angerissen werden können!

Ich hoffe Sie haben trotzdem Spass an der Vorlesung und an den Übungen und nehmen das Thema auch ohne "Scheindruck" ernst.

1. Massenspektograph

Eine Aufgabe incl. Lösung zum Massenspektrograph ist auf der Webpage zu finden, die Aufgabe wird nicht in den Tutorien behandelt

2. Rutherford-Streuung an einer Al-Folie:

Die Wahrscheinlichkeit $W(\Theta)$, dass ein Teilchen in den Winkelbereich zwischen Θ und 180° gestreut wird, ist gegeben durch:

$$W(\Theta) = n \cdot \sigma_{int}(\Theta, 180^\circ) \quad (1)$$

(n = Anzahl der Streuzentren pro Flächeneinheit)

Eine Al-Folie (Dichte $\rho_V = 2.7 \text{ g/cm}^3$, $1 \text{ mol Al} \simeq 27 \text{ g}$) mit einer Flächendichte von $40 \text{ } \mu\text{g/cm}^2$ wird mit α -Teilchen der Energie $E = 5 \text{ MeV}$ beschossen. Man nehme im folgenden an, dass es sich bei der Streuung um reine Rutherford-Streuung handelt.

(a) Wie dick ist die Folie?

(b) Wie groß ist die Anzahl der Streuzentren pro Flächeneinheit (mbarn)?

(c) Wieviel Prozent der Teilchen werden um mehr als 60° abgelenkt?

(Hinweis: der integrierte Wirkungsquerschnitt lautet: $\sigma_{int}(\Theta, 180^\circ) = \pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2}$)

(d) Wie groß ist der Winkelbereich, in den 50 % der Teilchen gestreut werden?

(e) Wie groß ist der Durchmesser der Kreisfläche im Abstand von 50 mm von der Al-Folie, durch die 90 % der Intensität der nach vorn gestreuten Teilchen treten, wenn die α -Teilchen in die Folie über eine Kreisfläche von 3 mm Durchmesser parallel und gleichmäßig verteilt eintreten?

3. Recherche: Streuung – Formfaktoren – Spin – magn. und el. Momenten – Rosenbluth

Rutherford geht von einem spinlosen Projektil aus, welches rückstossfrei auf ein punktförmiges, Teilchen ohne magnetisches und elektrisches Moment trifft.

- Welchen physikalische Bedeutung hat der Formfaktor?
- Wie sieht der diff. Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und Formfaktor $F(q)$ bei Rutherford aus?
- Was muss man zum $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hinzufügen um den Spin $\frac{1}{2}$ des Projektils zu berücksichtigen? (Stichwort: Mott)
- Was passiert wenn das Atom nicht punktförmig ist?
- Welcher Term muss bei $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ beachtet werden, wenn der Target-Rückstoss beachtet wird?
- Wie wird ein magnetisches und elektrisches Moment berücksichtigt? (Stichwort: Rosenbluth)

Matrix der "virtuellen" Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:

(2a+b/2c/2d+e/3 erste hälfte/ 3 zweite Hälfte/4a/4b/4c/4d/4e+f/5a/5b+c))

4. Formfaktor einer homogen geladenen Kugel

- (a) Zeigen Sie, dass sich die allgemeine Definition des Formfaktors

$$F(q^2) = \int_V \exp\left(\frac{i \vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right) \rho(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2)$$

für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(r)$ wie folgt umschreiben lässt.

$$F(q^2) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(qr/\hbar)}{(qr/\hbar)} \cdot \rho(r) \cdot r^2 dr \quad (3)$$

Wählen Sie dazu das Koordinatensystem so, dass die z-Achse entlang von $\vec{q}$ zeigt.

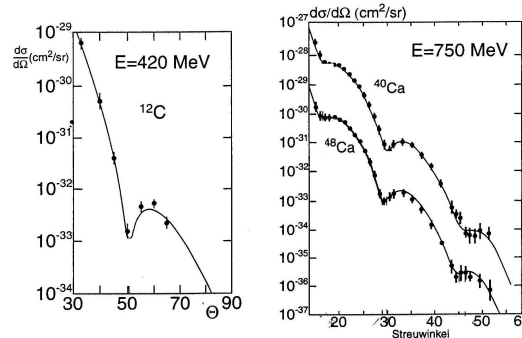
- (b) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie unter Benutzung von (3), dass hierfür der Formfaktor folgende Form hat:

$$F(q^2) \propto \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3} \text{ mit } x = \frac{qR}{\hbar}$$

- (c) Ermitteln Sie auf grafischem oder numerischem Wege die ersten vier Nullstellen dieser Funktion.
 (d) In den folgenden Abbildungen ist der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Streuung hochenergetischer Elektronen an ^{12}C , ^{40}Ca und ^{48}Ca gegen den Streuwinkel aufgetragen. Bestimmen Sie aus allen Minima den jeweiligen Kernradius. Vernachlässigen Sie dabei die Ruhemasse der Elektronen und verwenden Sie die Näherung $E = pc$. Nützliche Konstante: $\hbar c = 197.3 \text{ MeV fm}$.
 (e) Überprüfen Sie anhand der Radien aus Aufgabenteil d), ob die Relation $R \propto A^{1/3}$ erfüllt ist.
 (f) In der Optik wird für das erste Minimum bei der Beugung an einer kreisförmigen Öffnung die Formel

$$\sin \Theta_1 = 0.61 \cdot \frac{\lambda}{R}$$

angegeben. Berechnen Sie die Kernradien, indem Sie für λ die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons einsetzen.



5. Magnetisches Momente!

- (a) Was versteht man unter dem Kern-Lande-Faktor? Was ist das gyromagnetische Verhältnis? Warum ist das Kernmagneton kleiner als das Bohrsche Magneton? Wann ist μ_p positiv? Erläutern Sie die Rabi-Methode, ziehen Sie Parallelen zum Stern-Gerlach Versuch!
 (b) Das magnetische Moment setzt sich aus einem Drehimpuls- und Spinanteil wie folgt zusammen

$$\vec{\mu} = g\vec{j} = \frac{1}{|\vec{j}|^2} (g_l(\vec{l} \cdot \vec{j}) + g_s(\vec{s} \cdot \vec{j})\vec{j}) \quad (4)$$

Erläutern Sie die quantenmechanischen Überlegungen, um hieraus den Lande-Faktor g herzuleiten.

$$g = \frac{g_l(j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)) + g_s(j(j+1) - (s(s+1) - l(l+1)))}{2j(j+1)} \quad (5)$$

- (c) Erklären Sie NMR!

1. Massenspektrograph

Aufgabe 7: 180° Sektorfeld-Massenspektrograph

In dieser Aufgabe wird die Funktionsweise eines 180° Sektorfeld-Massenspektrographen diskutiert. Ein typischer Aufbau ist in Abb. 1 skizziert. Eine Materialprobe befindet sich in gasförmiger Phase im Probenbehälter. Die Atome werden mit Hilfe eines niederenergetischen Elektronenstrahls ionisiert und dann in einer Blendenstruktur, über der eine Potentialdifferenz von $U = 10002\text{ V}$ anliegt, beschleunigt. Die Fokusblende sorgt dabei für eine Bündelung des Strahls hin auf den Austrittsspalt.

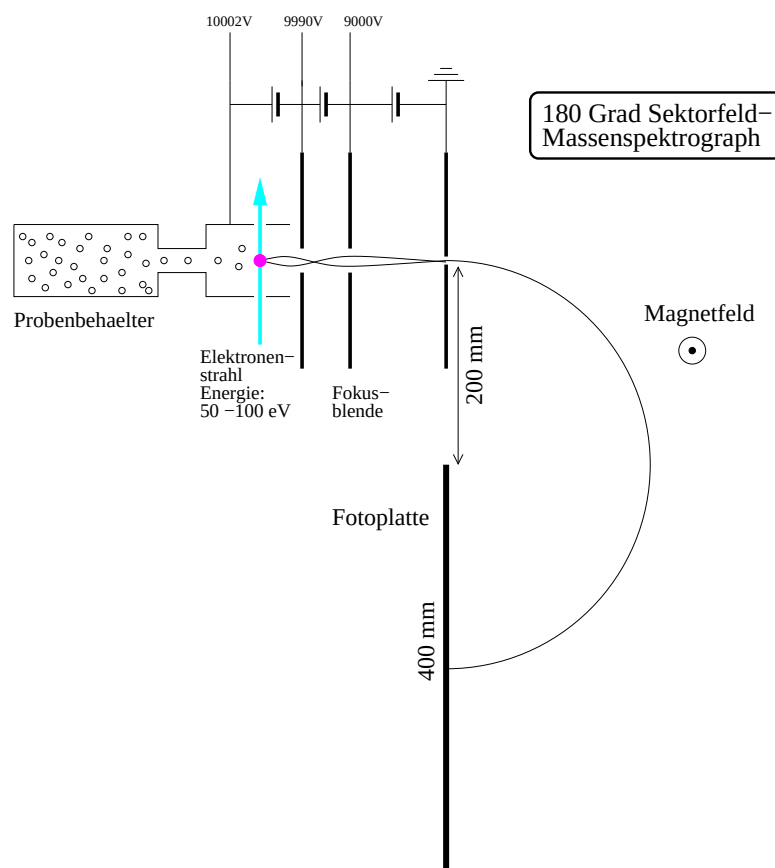


Abbildung 1: Typischer Aufbau eines 180° Sektorfeld-Massenspektrographen.

Nach Verlassen der Beschleunigungsstruktur durch den Austrittsspalt treten die Ionen in ein magnetisches Feld mit der Stärke $B = 0.5 \text{ T}$ ein. Die Ionen werden auf eine Kreisbahn abgelenkt und treffen auf einer Fotoplatte (Länge 400 mm) auf.

Benötigte Konstanten:

$$1 \text{ u} = 931.494 \text{ MeV}/c^2 = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

a) Reicht es aus klassisch zu rechnen?

Machen Sie sich anhand eines Beispiels klar, dass es ausreicht, in diesem Problem klassische Kinematik zu verwenden. Berechnen Sie dazu zunächst die Geschwindigkeit $\beta = v/c$ von einfach geladenen Eisenionen ${}^{56}_{26}\text{Fe}^+$ ($m = 55.934932 \text{ u}$) mit der klassischen Formel. Vergleichen Sie dann mit dem Wert, der sich nach relativistischer Rechnung ergibt. Gehen Sie davon aus, dass die Ionen im Mittel eine Potentialdifferenz von $\overline{U}_B = 10 \text{ kV}$ durchlaufen.

b) Der Messbereich des Spektrographen

Berechnen Sie den Massenbereich, der sich mit dem Spektrographen abdecken lässt. Geben Sie die Massen in der atomaren Masseneinheit u an. Gehen Sie davon aus, dass alle Ionen nur einfach ionisiert sind und eine mittlere Potentialdifferenz von $\overline{U}_B = 10 \text{ kV}$ durchlaufen haben. Welche stabilen Nuklide kann man gerade noch auf der Fotoplatte nachweisen?

c) Einfluss des Öffnungswinkels

Nicht alle Ionen treten genau senkrecht in das Magnetfeld ein. Vielmehr hat der Ionenstrahl einen kleinen, aber endlichen Öffnungswinkel. Man muss sich daher die Frage stellen, ob der Öffnungswinkel berücksichtigt werden muss. Anders gefragt: Werden Ionen mit leicht unterschiedlichem Öffnungswinkel auf unterschiedliche Punkte der Fotoplatte abgebildet? Betrachten Sie dazu Abb. 2.

Es sind drei Kreisbahnen von Teilchen eingezeichnet, die vom Punkt A aus ins Magnetfeld eintreten. Bahn e wird von einem Teilchen beschrieben, das senkrecht ins Magnetfeld eintritt, Bahn d und Bahn f von Teilchen, die unter einem Winkel $\pm\alpha$ ins Magnetfeld eintreten. Der Öffnungswinkel des Strahls beträgt somit 2α . Alle drei Kreisbahnen (d, e und f) haben den gleichen Radius R. Die entsprechenden Kreismittelpunkte D, E, und F liegen auf einem Kreis mit Radius R um Punkt A.

Zeigen Sie, dass die Bahnen d und f die Strecke AC im gleichen Punkt B schneiden. Berechnen Sie die Länge der Strecke EB als Vielfaches von R. Leiten Sie aus dem Ergebnis ab, dass man für kleine Öffnungswinkel α den Unterschied zwischen $|EB|$ und R vernachlässigen kann. Wählen Sie dazu $\alpha = 0.02 \text{ radian}$.

Für kleine Öffnungswinkel kann man daher davon ausgehen, dass sich alle Teilchenstrahlen wieder in einem Punkt der Bildebene treffen. Der Öffnungsfehler wird daher im Folgenden vernachlässigt.

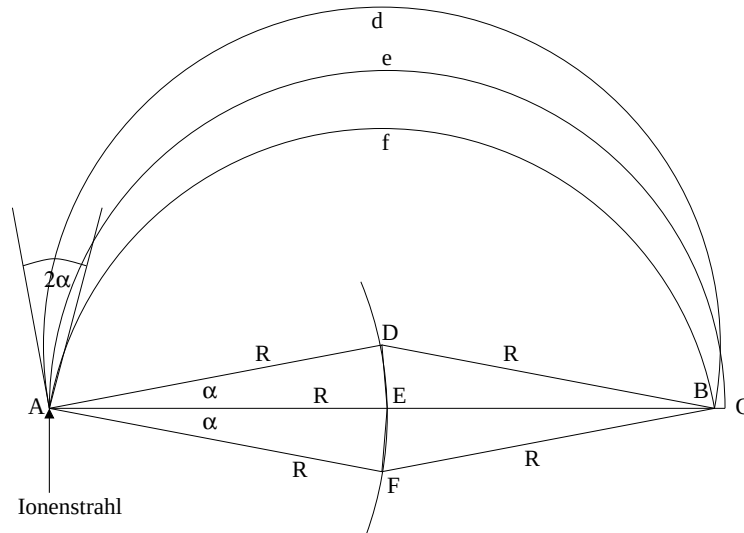


Abbildung 2: Skizze zur Abschätzung des Öffnungsfehlers.

d) Abschätzung des Auflösungsvermögens

Verschiedene Faktoren bestimmen das Auflösungsvermögen des Spektrographen. Wir wollen hier die zwei wichtigsten in Betracht ziehen.

1. Die **Energieinhomogenität**:

Nicht alle Ionen haben die gleiche Energie. Unterschiede entstehen durch verschiedene Potentiale an den Entstehungsorten innerhalb der Ionenquelle.

Innerhalb der Ionenquelle werden die Ionen in einem endlich großen Bereich erzeugt. Das Potentialgefälle in diesem Bereich betrage $2\Delta U$. In unserem Beispiel sei $\Delta U = 2 \text{ V}$. Die Ionenquelle ist auf ein Potential von $U = 10002 \text{ V}$ gelegt. Im Mittel durchfallen die Ionen eine Potentialdifferenz von $\bar{U}_B = 10 \text{ kV}$.

Berechnen Sie die Abweichungen ΔR_{min} und ΔR_{max} , die sich für $^{56}_{26}\text{Fe}^+$ Ionen ergeben, die eine Potentialdifferenz von $\bar{U}_B - \Delta U$ bzw. $\bar{U}_B + \Delta U$ durchlaufen haben. Berechnen Sie dazu die Radien: R_{min} , $\bar{R}$ und R_{max} .

Wenden Sie die Formel für die Gaußschen Fehlerfortpflanzung auf die Funktion $R(U)$ an und berechnen Sie ΔR auf diese Weise. Rechtfertigen Sie so eine einfache Formel für ΔR .

2. Die **Spaltbreite**:

Bisher haben wir die endliche Größe b des Austrittspalts nicht berücksichtigt. Sie betrage in unserem Beispiel $b = 100 \text{ }\mu\text{m}$. Auf der Fotoplate entsteht daher ein Spaltbild der Größe b , denn es liegt in guter Näherung eine symmetrische Abbildung vor.

Um zwei Spaltbilder gerade noch trennen zu können, müssen die benachbarten Aussenkanten der Bilder einen minimalen Abstand $a = 5 \text{ }\mu\text{m}$ haben.

Als Massenauflösungsvermögen A_M eines Massenspektrographen definiert man den

reziproken Wert der minimalen relativen Massendifferenz $(\frac{\Delta M}{M})_{min}$, die gerade noch aufgelöst werden kann.

Leiten Sie eine Formel für das Massenauflösungsvermögen A_M ab. Berechnen Sie dazu den Abstand $D_m(M)$ zwischen zwei Bildmitten (Bündelachsendispersion), der sich aufgrund einer kleinen Massendifferenz ΔM ergibt. Berechnen Sie ebenso $D_m(U)$. Verwenden Sie die Gaußschen Fehlerfortpflanzung und als typischen Wert für den Radius den oben berechneten Wert $\bar{R}$ für die $^{56}\text{Fe}^+$ Ionen.

Durch welche einfache Massnahme könnte man das Auflösungsvermögen verbessern? Welchen großen Nachteil würde man sich jedoch damit einhandeln? In der Praxis hat man mit einfach fokussierenden Sektorfeld-Spektrographen ein Auflösungsvermögen von bis zu 3000 erreicht.

e) Trennung von Isobaren

Reicht das Auflösungsvermögen aus, um Isobare zu trennen? Betrachten Sie das Beispiel von ^{54}Fe ($m = 53.939621$ u) und ^{54}Cr ($m = 53.938879$ u).

Für Messprobleme, die eine sehr hohe Präzision erfordern, wurden doppelfokussierende Massenspektrographen bzw. -spektrometer entwickelt wie das von Mattauch und Herzog, das in der Vorlesung kurz vorgestellt wurde.

Lösungen 180° Sektorfeld-Massenspektrograph

a) Reicht es aus klassisch zu rechnen?

klassische Rechnung: $\frac{1}{2}mv^2 = e\bar{U}_B$

Masse von $^{56}\text{Fe}^+$ in kg: $m = 55.934932 \cdot 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 9.2882192 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

Masse von $^{56}\text{Fe}^+$ in GeV/c^2 : $m = 55.934932 \cdot 931.494 \text{ MeV}/c^2 = 52.103054 \text{ GeV}/c^2$

$$v = \sqrt{2 \bar{U}_B \frac{e}{m}} = \sqrt{2 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \frac{1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{9.2882 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 1.6022}{9.288219}} \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.857407 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\beta = 6.195694 \cdot 10^{-4}$$

relativistisch: $E = E_{kin} + mc^2 = e\bar{U}_B + mc^2$ und $E = \gamma mc^2$

Berechne γ :

$$\gamma = \frac{e\bar{U}_B + mc^2}{mc^2} = 1 + \frac{e\bar{U}_B}{mc^2} = 1 + \frac{10^4 \text{ eV}}{52.103054 \text{ GeV}} = 1 + 1.91927 \cdot 10^{-7}$$

Definitionsgemäß gilt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 6.19559 \cdot 10^{-4}$$

Diese Abweichung ist akzeptabel.

b) Der Messbereich des Spektrographen
aus a):

$$v = \sqrt{2 \bar{U}_B \frac{e}{m}}$$

im Magnetfeld: Lorentzkraft = Zentripetalkraft:

$$evB = \frac{mv^2}{R}$$

Damit folgt:

$$m = \frac{R^2 B^2 e}{2 \bar{U}_B}$$

Kleinste nachweisbare Masse: Für $R_{min} = 0.1 \text{ m}$

$$m_{min} = \frac{(0.1 \text{ m})^2 \cdot (0.5 \text{ T})^2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2 \cdot 10^4 \text{ V}} = \frac{2^2 \cdot 2.5^2 \cdot 1.6022}{2} \cdot 10^{-27} \cdot \frac{\text{m}^2 \cdot \text{N}^2 \text{s}^2 \cdot \text{C} \cdot \text{C}}{\text{Nm} \cdot \text{C}^2 \text{m}^2}$$

$$m_{min} = 20.0275 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 12.0608 \text{ u}$$

entsprechend für $R_{max} = 0.3 \text{ m}$

$$m_{max} = 3^2 / 2 \cdot 5^2 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 180.2475 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 108.5475 \text{ u}$$

Der Spektrograph deckt den Massenbereich von 12.06 bis 108.54 u ab. Damit lässt sich ^{13}C als Nuklid niedrigster Masse und ^{108}Cd und ^{108}Pd als Nuklide höchster Masse gerade noch nachweisen.

c) Einfluss des Öffnungswinkels

Die Dreiecke $\triangle ADE$ und $\triangle AEF$ sind gleichschenklige Dreiecke. Sie stimmen in einem Winkel und einer Seite überein, daher sind sie kongruent. Analog folgt, dass $\triangle BDE$ und $\triangle BEF$ kongruent sind. Daher treffen sich die beiden Bahnen d und f im Punkt B.

Berechnung von $|EB|$: Fällt man das Lot von Punkt D auf die Strecke AB, so erhält man die Dreiecke $\triangle ADG$ und $\triangle BDG$. Sie stimmen in zwei Seiten und einem Winkel (90°) überein und sind daher kongruent. Folglich gilt: $|AB| = 2 R \cos \alpha$. Für die Strecke EB gilt daher: $|EB| = |AB| - R = R(2 \cos \alpha - 1)$.

Mit $\alpha = 0.02$ ergibt sich:

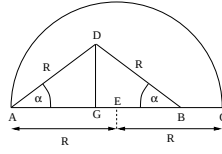


Abbildung 3: Skizze zur Abschätzung des Öffnungsfehlers.

$$|EB| = R \cdot (2 \cos 0.02 - 1) = 0.9996 R$$

d) Abschätzung des Auflösungsvermögens

Der Radius der Teilchenbahnen ist durch

$$R = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{2 U \frac{m}{e}} \quad (1)$$

gegeben. Damit lassen sich $\bar{R}$, R_{min} und R_{max} für unterschiedliche Energien berechnen.

$$\bar{R} = \frac{1}{0.5 \text{ T}} \cdot \sqrt{2 \cdot 10^4 \text{ V} \frac{9.2882192 \cdot 10^{-26} \text{ kg}}{1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}}} = 2 \frac{\text{Cm}}{\text{Ns}} \sqrt{\frac{2 \cdot 0.92882192}{1.6022}} 10^{-1} \sqrt{\frac{\text{kg}^2 \text{m}^2}{\text{C}^2 \text{s}^2}}$$

$$\bar{R} = 0.215353955 \text{ m} = 215.353955 \text{ mm}$$

$$R_{min} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0.9998 \cdot 0.92882192}{1.6022}} 10^{-1} \text{ m} = 215.33242 \text{ mm}$$

$$R_{max} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 1.0002 \cdot 0.92882192}{1.6022}} 10^{-1} \text{ m} = 215.37549 \text{ mm}$$

$\Delta R_{min} = 21.5 \mu\text{m}$ und $\Delta R_{max} = 21.5 \mu\text{m}$. Es gilt also: $\Delta R_{min} = \Delta R_{max} \equiv \Delta R$

Mit Gaußscher Fehlerabschätzung erhalten wir aus (1):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta U}{U} \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \text{ V}}{10000 \text{ V}} \cdot 215.354 \text{ mm} = 21.5 \mu\text{m}$$

Die Bündelachsendiffusion D_m ist für das magnetische 180°-Sektorfeld gleich dem Unterschied der **Bahndurchmesser**: $D_m = 2 \Delta R$ (Dies gilt allgemein für alle symmetrischen Spektrometer). Betrachtet man die Auswirkungen von kleinen Massenunterschieden ΔM so ergibt sich mit Gaußscher Fehlerabschätzung aus (1):

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta M}{M}$$

$$D_m(M) = R \cdot \frac{\Delta M}{M}$$

$$D_m(U) = R \cdot \frac{\Delta U}{U}$$

Die Bedingung dafür, dass sich zwei Ionenbündel noch trennen lassen ist:

$$D_m(M) > a + b + D_m(U)$$

$$\frac{\Delta M}{M} > \frac{a+b}{R} + \frac{\Delta U}{U}$$

Für das Auflösungsvermögen ergibt sich somit:

$$A_m < \frac{1}{\frac{a+b}{R} + \frac{\Delta U}{U}} = \frac{1}{\frac{0.005+0.1}{215.4} + \frac{2}{10000}} \simeq 1455$$

Verbesserung des Auflösungsvermögens durch Verkleinerung des Austrittsspalts. Dies würde jedoch einen großen Intensitätsverlust und damit eine Verlängerung der Messzeiten bedeuten.

e) Trennung von Isobaren

$$\frac{53.939621}{53.939621 - 53.938879} = 72694$$

Es reicht also nicht aus. Die Differenz der Radien ist nur 3 μm .

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor

Tel.: 07247 82 4173; Büro

Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Massenspektograph

Lösung und Aufgabe siehe Web Übung3a

2. Rutherford-Streuung an einer Al-Folie:

(a) Volumendichte = Flächendichte/Dicke: $\rho_V = \frac{\rho_A}{d}$.

$$\Rightarrow d = \frac{\rho_A}{\rho_V} = \frac{4 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm}^2}{2.70 \text{ g/cm}^2} = 0.148 \text{ } \mu\text{m}$$

(b) 1 mol Al $\hat{=}$ 27 g; $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol
 Ansatz: $27 \text{ g/cm}^2 \hat{=} 6.022 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen/cm}^2$

$$\Leftrightarrow \rho_A = 40 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^2 \hat{=} \frac{40 \cdot 10^{-6}}{27} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen/cm}^2$$

$$\rho_A \hat{=} 8.92 \cdot 10^{17} \text{ Teilchen/cm}^2 = 8.92 \cdot 10^{-10} \text{ Teilchen/mbarn}$$

(c) Int WQ in der Aufgabe gegeben (in einem früheren Blatt war dieser WQ in einer Aufgabe vorher gefragt, da diese Aufgabe aber eine reine Integrationsaufgabe war, habe ich sie nicht genommen, obwohl sie in den Kontext gepasst hätte).

$$\begin{aligned} \sigma_{int}(\Theta, 180^\circ) &= \pi \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2E} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2} \\ &= \pi \left(1.44 \text{ MeV fm} \frac{Z_1 Z_2}{2E} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2} \\ &= 1.63 \text{ MeV}^2 \text{ fm}^2 \left(\frac{Z_1 Z_2}{E} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2} \quad | \quad 1 \text{ fm}^2 = 10 \text{ mbarn} \\ &= 16.3 \left(\frac{Z_1 Z_2}{E} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2} \quad ; \quad E [\text{MeV}] \text{ und } \sigma [\text{mbarn}] \end{aligned}$$

Es sind: $Z_1 = 2$; $Z_2 = 13$; $E = 5 \text{ MeV}$ und damit:

$$\begin{aligned} W(\Theta) &:= n \sigma_{int}(\Theta, 180^\circ) = 8.92 \cdot 10^{-10} \cdot 16.3 \left(\frac{2 \cdot 13}{5} \right)^2 \cot^2 \frac{\Theta}{2} \\ W(\Theta) &= 3.928 \cdot 10^{-7} \cot^2 \frac{\Theta}{2} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$W(60^\circ) = 1.178 \cdot 10^{-6} \hat{=} 1.178 \cdot 10^{-4} \%$$

(d) Ansatz: $W(\Theta) = 0.5$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \cot^2 \frac{\Theta}{2} &= \frac{1}{2 \cdot 3.928 \cdot 10^{-7}} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{\Theta}{2} &= \sqrt{2 \cdot 3.928 \cdot 10^{-7}} \\ \Rightarrow \Theta &= 0.102^\circ\end{aligned}$$

d.h. in den Winkelbereich von 0 bis 0.1° werden 50 % aller Teilchen gestreut; unter Rückwärtswinkeln ist die Ausbeute sehr mager (siehe auch 8 c).

(e) 90 % der Teilchen nach vorn gestreut entspricht 10 % nach hinten: $W(\Theta) = 0.1$:

$$\Theta = 2 \arctan \left(\sqrt{10 \cdot 3.928 \cdot 10^{-7}} \right) = 0.227^\circ$$

$$x = a \tan \Theta = 0.198 \text{ mm}$$

$$D = 2x + b = 3.4 \text{ mm}$$

Der Durchmesser der Kreisfläche, durch die ungefähr 90 % der Intensität geht, beträgt 3.4 mm.

3. Recherche: Streuung – Formfaktoren – Spin – magn. und el. Momenten – Rosenbluth

Rutherford geht von einem spinlosen Projektil aus, welches rückstossfrei auf ein punktförmiges, Teilchen ohne magnetisches und elektrisches Moment trifft.

- Welchen physikalische Bedeutung hat der Formfaktor?
Er repräsentiert die Ladungsverteilung! Fourier Transformierte der Ladungsdichteverteilung!

$\rho(r)$	$ F(q^2) $	Beispiel
punktförmig	konstant	Elektron
exponentiell	Dipol	Proton
gaußförmig	gaußförmig	^6Li
homogene Kugel	oszillierend	–
Kugel mit diffusem Rand	oszillierend	^{40}Ca

- Wie sieht der diff. Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{RF} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{KIN})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

und Formfaktor $F(q)$:

$$F(q) = 1 \quad \text{punktförmig; Konturlos} \quad (2)$$

bei Rutherford aus?

- Was muss man zum $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ hinzufügen um den Spin $\frac{1}{2}$ des Projektils zu berücksichtigen? (Stichwort: Mott):

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{RF} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (3)$$

- Was passiert wenn das Atom nicht punktförmig ist?

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT} \cdot |F(q)|^2 \quad (4)$$

z.B. MOTT

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4E_{KIN})^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot |F(q)|^2 \quad (5)$$

mit $\tau = \frac{Q^2}{4M^2c^2}$

- Welcher Term muss bei $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ beachtet werden, wenn der Target-Rückstoss beachtet wird?

Um die Struktur von Kernen (0.8fm) zu untersuchen, benötigt man Energien von einigen GeV, hier ist der Energieverlust durch Rückstoss nicht mehr zu vernachlässigen:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT}^* \frac{E'}{E} = \quad (6)$$

- Wie wird ein magnetisches und elektrisches Moment berücksichtigt? (Stichwort: Rosenbluth)

Die Rosenbluthformel enthält

- Elektrischen Formfaktor G_E , der über die Ladungsverteilung Auskunft gibt.
- Magnetischer Formfaktor G_M , der die Momentverteilung enthält. Beide sind abhängig von $Q^2 = -q^2$ und sind auf die Elementarladung e bzw. auf das Magnetische Moment μ des Teilchens normiert.

$$\frac{\sigma}{d\Omega}(eN \rightarrow eN) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{MOTT} \left(\frac{G_g^2(Q^2) + \tau \cdot G_M^2(Q^2)}{1 + \tau} + 2\tau \cdot G_M^2(Q^2) \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (7)$$

Siehe auch Anhang Formfakoren.pdf

4. Formfaktor einer homogen geladenen Kugel

- (a) Wähle das Koordinatensystem so, dass die z-Achse entlang von $\vec{q}$ zeigt. Dann gilt:
 $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$.

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= \int_V e^{i \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{\hbar}} \rho(\vec{r}) d\vec{r} = 2\pi \int_0^\pi \int_0^\infty \exp\left(\frac{iqr \cos \theta}{\hbar}\right) \rho(r) r^2 \sin \theta dr d\theta \\
 &= 2\pi \left[\int_0^\infty -\frac{\hbar}{iqr} \exp\left(\frac{iqr \cos \theta}{\hbar}\right) \rho(r) r^2 dr \right]_0^\pi \\
 &= 2\pi \int_0^\infty -\frac{\hbar}{iqr} \left[\exp\left(\frac{-iqr}{\hbar}\right) - \exp\left(\frac{iqr}{\hbar}\right) \right] \rho(r) r^2 dr \\
 &= 2\pi \int_0^\infty -\frac{\hbar}{iqr} \left[\cos \frac{qr}{\hbar} - i \sin \frac{qr}{\hbar} - \cos \frac{qr}{\hbar} - i \sin \frac{qr}{\hbar} \right] \rho(r) r^2 dr \\
 &= 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(qr/\hbar)}{(qr/\hbar)} \rho(r) r^2 dr
 \end{aligned} \tag{8}$$

- (b) Die Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel ist gegeben durch:

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const.}$$

für $r < R$ und 0 sonst. Die konstante Ladungsdichte ρ_0 lässt sich mit Hilfe der Gesamtladung Q_g ausdrücken:

$$\rho_0 = \frac{Q_g}{V_{Kugel}} = \frac{3 \cdot Q_g}{4\pi R^3}$$

Aus a) folgt:

$$F(q^2) = 4\pi \rho_0 \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \tag{9}$$

Substitution: $y = qr/\hbar \Rightarrow dy = q/\hbar dr \Rightarrow dr = \hbar/q dy$

damit:

$$\begin{aligned}
 F(q^2) &= 4\pi \rho_0 \int_0^{qR/\hbar} \frac{\sin y}{y} y^2 (\hbar/q)^3 dy = 4\pi \rho_0 (\hbar/q)^3 \int_0^{qR/\hbar} y \sin y dy \\
 &= \frac{3Q_g}{R^3} (\hbar/q)^3 \int_0^x y \sin y dy = \frac{3Q_g}{x^3} \int_0^x y \sin y dy
 \end{aligned}$$

wobei $x = qR/\hbar$ verwendet wurde. Durch partielle Integration ($\int u v' = uv - \int u'v$) erhält man:

$$\int y \sin y dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y \tag{9}$$

$$F(q^2) = \frac{3Q_{ges}}{x^3} [\sin y - y \cos y]_0^x = \frac{3Q_{ges}}{x^3} (\sin x - x \cos x) \tag{9}$$

- (c) Nullstellen, wenn $\sin x - x \cos x = 0 \Rightarrow x = \tan x$

Dies ist analytisch nicht lösbar. Durch grafisches Auftragen kann man die Nullstellen ungefähr abschätzen (siehe unten). Genauer dann mit numerischen Verfahren (z. B. Newton, secant.....)

$$\Rightarrow x_0 = 0 \quad x_1 = 4.4934 ; \quad x_2 = 7.7253 ; \quad x_3 = 10.9041$$

- (d) Atomkerne können in guter Näherung als fast homogen geladen angesehen werden. Die Minima entsprechen daher den Nullstellen aus b).
Es gilt:

$$x_i = \frac{q_i R}{\hbar} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\hbar}{q_i} x_i$$

mit $q = 2p \sin(\theta/2)$ gilt:

$$R = \frac{\hbar c}{2pc \sin \frac{\theta_i}{2}} x_i = \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{2E \sin \frac{\theta_i}{2}} x_i$$

Dabei wurde die Näherung $E = pc$ gemacht.

i.) ^{12}C : $\theta = 50^\circ$; $E = 420 \text{ MeV}$

$$R = \frac{197.3 \text{ MeV fm}}{2 \cdot 420 \text{ MeV} \sin(25^\circ)} \cdot 4.493 \simeq 2.50 \text{ fm}$$

ii.)

$$R = \frac{0.1315 \text{ fm}}{\sin \theta_i/2} \cdot x_i$$

$$\begin{array}{llll} \theta_1 = 18^\circ & E = 750 \text{ MeV} & R = 3.78 \text{ fm} \\ ^{40}\text{Ca}: & \theta_2 = 30^\circ & E = 750 \text{ MeV} & R = 3.92 \text{ fm} \Rightarrow \bar{R} = 3.77 \text{ fm} \\ & \theta_3 = 47^\circ & E = 750 \text{ MeV} & R = 3.60 \text{ fm} \end{array}$$

^{48}Ca :

$$\begin{array}{l} \theta_1 = 17^\circ; \quad E = 750 \text{ MeV}; \quad R = 4.09 \text{ fm} \\ \theta_2 = 29^\circ; \quad E = 750 \text{ MeV}; \quad R = 4.06 \text{ fm} \\ \theta_3 = 44^\circ; \quad E = 750 \text{ MeV}; \quad R = 3.83 \text{ fm} \\ \Rightarrow \bar{R} = 3.99 \text{ fm} \end{array}$$

- (e) Überprüfung von $R \propto A^{1/3}$

i.) ^{12}C : $2.50 \text{ fm}/12^{1/3} = 1.09$

ii.) ^{40}Ca : $3.77 \text{ fm}/40^{1/3} = 1.10$

iii.) ^{48}Ca : $3.99 \text{ fm}/48^{1/3} = 1.09$

$R \propto A^{1/3}$ ist ziemlich gut erfüllt. Aus der Literatur erwartet man: $R = 1.128 A^{1/3} \text{ fm}$ (Äquivalentradius einer homogen geladenen Kugel).

- (f) de Broglie Wellenlänge:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} = \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeV fm}}{E}$$

i.) ^{12}C :

$$R = 0.61 \frac{1}{\sin(51^\circ)} \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeVfm}}{420 \text{ MeV}} = 2.35 \text{ fm}$$

ii.) ^{40}Ca :

$$R = 0.61 \frac{1}{\sin(18^\circ)} \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeVfm}}{750 \text{ MeV}} = 3.26 \text{ fm}$$

iii.) ^{48}Ca :

$$R = 0.61 \frac{1}{\sin(17^\circ)} \frac{2\pi \cdot 197.3 \text{ MeVfm}}{750 \text{ MeV}} = 3.45 \text{ fm}$$

5. Magnetische Momente

(a) Begriffe

- Kern-Landé-Faktor:

$$g_I = \frac{|\mu_I|/\mu_K}{|I|/\hbar} \quad (10)$$

Der Landé Faktor ist das dimensionslose Verhältnis zwischen magnetischem Moment und mechanischem Drehimpuls; er wird auch gyromagnetisches Verhältnis genannt.

- gyromagnetisches Verhältnis: siehe oben Landé
- Größe: Das Kernmagneton μ_K ist wegen der größeren Protonenmasse m_p um den Faktor $\frac{m-e}{m_p} \approx 1/1836$ kleiner als das Bohrsche Magneton μ_B .
 $\mu_B = \frac{e}{2m_e} \cdot \hbar = 0,597 \cdot 10^{-4} \text{ eV/T}; \quad \mu_K = \frac{e}{2m_p} \cdot \hbar = 31,52 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$
- Warum positiv: Das positive Vorzeichen von μ_p besagt, dass Protonenspin und magnetisches Moment μ_p parallel zueinander sind.
- Rabi-Methode: Siehe Literatur!!

(b) g:

$$\vec{\mu} = g\vec{j} = \frac{1}{|j|^2} (g_l(\vec{l} \cdot \vec{j}) + g_s(\vec{s} \cdot \vec{j})\vec{j}) \quad (11)$$

Setze $|j|^2 = j(j+1)$ und berechne die Ausdrücke durch Quadrieren der Identitäten $\vec{s} = \vec{j} - \vec{l}$ bzw. $\vec{l} = \vec{j} - \vec{s}$

$$g = \frac{g_l(j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)) + g_s j(j+1) - (s(s+1) - l(l+1))}{2j(j+1)} \quad (12)$$

(c) NMR: NMR aus Wikipedia, der freien Enzyklopädie:

NMR, kurz für Kernmagnetische Resonanz, aus dem Englischen für "Nuclear Magnetic Resonance".

Methode zum Nachweis der Energieaufnahme oder -abgabe von Kernspins, d.h. von Spins, das sind Eigendrehimpulse, die die meisten Atomkerne haben. Damit kann das Vorhandensein und die Zahl bestimmter Kerne in einer Probe nachgewiesen werden. Die Hauptanwendung der Methode liegt in der analytischen Chemie,

jedoch liefert die NMR heute in vielen weiteren Gebieten der Wissenschaft und der angewandten Wissenschaften (z.B. Physik, Biologie, Medizin, Geologie, Polymerchemie, chemische Technik u.s.w.) äusserst wertvolle Informationen über das "Innerste der Materie", d.h. über mikroskopische, z.B. molekulare, Eigenschaften und mikroskopische, lokale Bereiche.

Verschiedene Verfahren weisen den Kernspin bestimmter Atome, z.B. ^1H , ^{13}C , ^{15}N , ^{17}O , ^{31}P , in einzelnen Molekülen nach. Je nach chemischer Bindung haben z.B. einzelne Wasserstoffatome oder Kohlenstoffatome Signale (Resonanzlinien) bei unterschiedlichen Frequenzen (Chemische Verschiebung). So kann man dann verschiedene, wasserstoffhaltige, chemische Gruppen in einem Molekül unterscheiden und nachweisen. Zudem kann man die Kopplung verschiedener Atome, d.h. die räumliche Nachbarschaft, in einem Molekül untersuchen. So kann man die chemische Struktur und den räumlichen Aufbau neuer und unbekannter Moleküle erforschen. Man kann in der NMR, und das ist das einzigartige, sowohl energie- (Spektroskopie), zeit- (Relaxationszeit-Messungen) als auch räumlich-aufgelöst (bildgebende Verfahren, Fluss- und Diffusionsmessungen) beobachten.

Ein wichtiges Kapitel der räumlich aufgelösten NMR sind bildgebende Verfahren, genannt Kernspintomographie oder Magnetresonanztomografie, Englisch: NMR-Imaging, magnetic resonance imaging (MRI)

Funktionsprinzip Die Probe mit der zu untersuchenden Atomkernsorte (meist die Kerne des Wasserstoffatoms ^1H) wird in ein äusseres Magnetfeld gegeben. Man unterscheidet zwischen NMR in hohen Magnetfeldern im Tesla-Bereich und niedrigen Magnetfeldern im Mikrotelsa-Bereich. Die entsprechenden Resonanzfrequenzen für den Wasserstoffkern ^1H liegen damit in der Praxis zwischen ca. 900 MHz bei 21.1 Tesla und ca. 2 kHz im Erdmagnetfeld. Ein etwas grösserer Teil der Kernspins, und damit verbunden ihre magnetischen Kerndipole, richtet sich in Feldrichtung aus und aufgrund der Boltzmannverteilung ergibt sich eine Polarisierung der Atomkerne in Richtung des Magnetfeldes (als z-Achse bezeichnet). In der x-y-Ebene sind eine oder mehrere Spulen angeordnet, mit denen auf die Probe elektromagnetische Wechselfelder eingestrahlt werden (Sendespule) oder mit denen solche Felder empfangen werden (Empfangsspule). Im häufigsten Falle dient eine einzige Spule in x-Richtung als Sende- und Empfangsspule.

Werden die Atomkerne durch ein elektromagnetisches Wechselfeld, typischerweise im MHz-Bereich) angeregt, drehen sich deren Spins in Phase um das Magnetfeld. Da die Kernspins nicht nur Kreisel sondern auch winzige Stabmagnete (magnetische Kerndipole) sind, addiert sich ihr Magnetfeld und in der Spule dreht sich dann eine makroskopische Magnetisierung. Bekanntlich werden aber durch magnetische Wechselfelder in einer Spule auch elektrische Wechselspannungen erzeugt. So wird in der Spule eine elektrische Wechselspannung induziert, welche als "NMR-Signal" gemessen werden kann.

Experimentelle Verfahren In der NMR gibt es zwei wesentliche Verfahren:

CW (Continuous Wave) Verfahren. Bei diesem Verfahren wird eine Radiofrequenz langsam durchgestimmt und das Resonanzsignal der einzelnen Atome aufgenommen. Man arbeitet in der Frequenzdomäne und erhält das Spektrum, ei-

ne Signalintensität als Funktion der Frequenz.

Das Puls-Verfahren. Hierbei wird ein einzelner Radiofrequenzimpuls (RF-Puls) oder auch eine Serie solcher elektromagnetischer RF-Pulse auf die Probe gesandt, die sich in der Spule befindet. Das Signal, der freie Induktionsabfall (englisch: free induction decay, FID) nach einem Puls oder das Spin-Echo nach zwei oder mehreren Impulsen, wird als Funktion der Zeit registriert, man arbeitet in der "Zeitdomäne". Mittels einer mathematischen Operation, die "Fourier-Transformation" (FT), die in der Praxis ein Computer durchführt, wird das Zeitsignal in ein Spektrum umgewandelt. Das Verfahren wird als FT-Spektroskopie bezeichnet und wird auch in anderen Spektroskopiearten, wie z.B. IR, Massenspektrometrie, ESR angewendet. Nicht zuletzt aufgrund der hohen Zeitersparnis, die man in ein Signal / Rausch-Gewinn umwandelt, hat das Puls-Verfahren das CW-Verfahren heute weitgehend abgelöst.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor

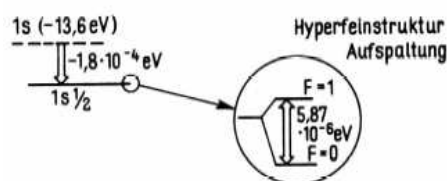
Tel.: 07247 82 4173; Büro

Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Magnetisches Moment des Protons

Im Experiment kann das magnetische Moment des Protons μ_p bestimmt werden aus der energetischen Aufspaltung der Hyperfeinstrukturzustände des Grundzustands des Wasserstoffatoms, die $5.87 \cdot 10^{-6}$ eV beträgt. Welchen Wert für μ_p erhält man?



Berechnen sie dazu die Wechselwirkung von μ_p mit dem magnetischen Feld $\vec{B}_0$, das vom Elektron am Kernort erzeugt wird. Die Stärke dieses Feldes $\vec{B}_0$ ist für das 1s-Orbital (Spin $s = \frac{1}{2}$):

$$\vec{B}_0 = \frac{8g_s s \mu_B}{3a_0^3} \text{ mit } a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \text{ (Bohrscher Radius)} \quad (1)$$

Für das Elektron kann der g-Faktor $g_s = 2$ verwendet werden. Warum weicht der hier ermittelte Wert von μ_p vom Literaturwert ab?

Zusatzfrage: Berechnen sie die Wellenlänge des elektromagnetischen Übergangs zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus. Wo spielt dieser Übergang eine sehr wichtige Rolle?

2. Bestimmung von magnetischen Momenten mit NMR

In einem NMR-Experiment wird die Absorption von eingestrahelter Hochfrequenzstrahlung beobachtet. Wenn die Frequenz gerade der Aufspaltung zwischen den Hyperfeinstrukturzuständen entspricht, die im Magnetfeld auftritt, steigt die Absorption stark an (Resonanz).

- Der Grundzustand von ^{191}Ir spaltet im Magnetfeld in 4 magnetische Unterzustände auf. Welchen Spin hat der Grundzustand?
- Bei einem Magnetfeld von 1 T beobachtet man die Resonanz bei 747 kHz. Berechnen sie daraus das magnetische Moment des Grundzustands.
- Unter der Annahme, dass das ungerade Nukleon für das magnetische Moment verantwortlich ist, überlegen sie, ob dies ein Neutron oder Proton ist und welches Orbital es besetzt. ($\mu_{\text{exp}} = 0,147$)
- Die Messung wird bei Zimmertemperatur durchgeführt. Berechnen sie die Besetzungszahlen der magnetischen Unterzustände.
- In Eisen legiertes ^{192}Ir ($J = 4; \mu = 1,88 \mu_K$) wird auf 5 mK abgekühlt. Man beobachtet die Resonanz bei 503.5 MHz. Wie groß ist das Hyperfeinfeld für $^{192}\text{IrFe}$ und wie groß sind die Besetzungszahlen in diesem Fall?

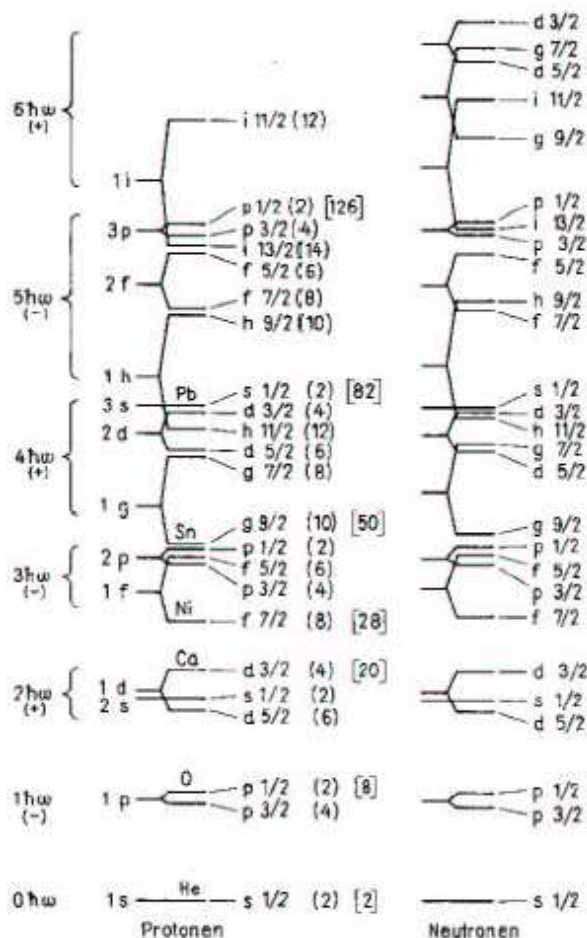
3. Magnetische Momente von Schalenmodellkernen; Spins und Paritäten

In Analogie zur Atomphysik werden auch Kerne in einem Schalenmodell beschrieben. Den Edelgasen entsprechen dabei die sogenannten doppelmagischen Kerne: alle Orbitale einer Schale sind besetzt und das nächste Orbital, das in der nächsten Schale in grossem energetischen Abstand liegt, ist noch völlig leer. ^{40}Ca ist zum Beispiel solch ein doppelmagischer Kern. Als letztes wurde das $d_{3/2}$ -Orbital gefüllt, die nächsten Nukleonen würden dann das $f_{7/2}$ -Orbital besetzen. Die Struktur von Kernen, die ein Nukleon mehr haben als ein doppelmagischer Kern, wird in guter Näherung beschrieben durch das Modell eines doppelmagischen Kerns als inertem Rumpf plus einem "Leuchtnukleon", das die wesentlichen spektroskopischen Eigenschaften dominiert. Bei Kernen, die ein Nukleon weniger haben als ein doppelmagischer Kern, verhält sich das Loch in einem sonst vollen Orbital effektiv wie ein Teilchen in einem sonst leeren Orbital.

Experimentell findet man für Spin und Parität des Grundzustands (Index 0) und des ersten angeregten Zustands (Index 1) einiger Kerne folgende Werte:

	^7_3Li	$^{23}_{11}\text{Na}$	$^{33}_{16}\text{S}$	$^{41}_{21}\text{Sc}$	$^{83}_{36}\text{Kr}$	$^{93}_{41}\text{Nb}$
J_0^P	$3/2^-$	$3/2^+$	$3/2^+$	$7/2^-$	$9/2^+$	$9/2^+$
J_1^P	$1/2^-$	$5/2^+$	$1/2^+$	$3/2^+$	$7/2^+$	$1/2^-$

- Geben sie im Einteilchen-Schalenmodell die Konfiguration der Protonen und Neutronen in nicht abgeschlossenen Unterschalen für diese Kerne an, und vergleichen sie die sich daraus ergebenden Quantenzahlen mit den beobachteten Werten.
- Bei uu-Kernen koppeln die ungepaarten Nukleonen durch Vektoraddition ihrer Gesamtdrehimpulse. Welche möglichen Kernspins und Paritäten ergeben sich für ^6_3Li und $^{40}_{19}\text{K}$? Experimentell misst man für diese Kerne die Quantenzahlen 1^+ und 4^- .
- Der Kern $^{42}_{21}\text{Sc}$ hat einen tiefliegenden angeregten Zustand mit $J^P(T) = 7^+(0)$. Welche Schalenmodellkonfiguration liegt vor, und welches magnetische Moment ergibt sich für diesen Zustand?



Matrix der "virtuellen" Berechnung: Für $..../..$ gibt es jeweils ein Kreuz:
 $(1/2a-c/2d+e/3a/3b+c)$

Lexikon:

Landéscher g-Faktor: $g = \frac{\mu}{\mu_K \cdot j}$:

$$g = \frac{1}{2j(j+1)} \{g_s [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] + g_l [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)]\}$$

Proton: $g_s = 5.5852$ $g_l = 1$

Neutron: $g_s = -3.8256$ $g_l = 0$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Magnetisches Moment des Protons

Nachzuvollziehen in Mayer-Kuckuck, Atomphysik, 5.3

Die Energieverschiebung durch die Hyperfeinstruktur ist gegeben durch

$$V_{HFS} = -\vec{\mu}_p \cdot \vec{B}_0$$

dabei gilt:

$$\vec{\mu}_p = \mu_p \mu_K \frac{\vec{s}_p}{\hbar s}$$

$$\vec{B}_0 = B_0 \frac{\vec{j}}{\hbar j}$$

hier ist das Kernmagneton $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c}$ eine dem bohrschen Magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$ entsprechende Größe, die das magnetische Moment aus der klassischen Überlegung heraus angibt und μ_p die durch die Innere Struktur des Protons gegebene relative Veränderung dieser Größe. μ_p berücksichtigt noch die Orientierung des magnetischen Moments relativ zum Magnetfeld. Weiter wissen wir:

$$B_0 = \frac{8g_s\mu_B}{3a_0^3}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e c^2}$$

Damit ergibt sich

$$V_{HFS} = -\frac{m\mu_p\mu_K}{\hbar^2 j_{sp}} \vec{s}_p \vec{j} B_0 = -\frac{4\mu_p\mu_K}{\hbar^2} \vec{s}_p \vec{j} B_0$$

$$\vec{s}_p \vec{j} = \frac{\hbar^2}{2} (F(F+1) - j(j+1) - s_p(s_p+1))$$

wobei $s_p = \frac{1}{2}, j = \frac{1}{2}$ sind, und die beiden koppeln zum Gesamtspin $F = 0$ oder $F = 1$. Man erhält also

$$\vec{s}_p \vec{j} = +\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2} \quad \text{für } F = 1$$

$$\vec{s}_p \vec{j} = -\frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{2} \quad \text{für } F = 0$$

Die Aufspaltung der Energieniveaus ergibt sich aus der Differenz der beiden Werte also: $(\frac{1}{2} - (-\frac{3}{2}))\frac{\hbar^2}{2}$
 ES gilt noch die Vereinfachung $g_s \cdot s = 2\frac{1}{2} = 1$ damit erhält man

$$\Delta E = \frac{4\mu_p\mu_K}{\hbar^2} \frac{2\hbar^2}{2} \frac{8\mu_B}{3a_0^3}$$

$$\mu_p = \frac{3a_0\Delta E}{32\mu_K\mu_B}$$

Nun muss man nur noch die richtigen Werte für μ_K , μ_B einsetzen:

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c}; \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

Damit erhält man den Literaturwert $\mu_p = 2.79$. Eventuelle Abweichungen stammen z.B. von der Annahme $g_s = 2$, die nur bis auf 10^{-3} genau gültig ist, sowie anderen Ungenauigkeiten beim Einsetzen . . .

Die Wellenlänge λ der Wasserstoffhyperfeinaufspaltung ist: Damit erhält man den Literaturwert $\mu_p = 2.79$. Eventuelle Abweichungen stammen z.B. von der Annahme $g_s = 2$, die nur bis auf 10^{-3} genau gültig ist, sowie anderen Ungenauigkeiten beim Einsetzen . . . Die Wellenlänge λ der Wasserstoffhyperfeinaufspaltung ist:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi\hbar c$$

Das ist die 21-cm-Linie, über die klassischerweise die Rotverschiebung und damit die Relativgeschwindigkeit von Sternen gemessen wird.

2. Bestimmung von magnetischen Momenten mit NMR

(a) 4 m_I -Zustände $\Rightarrow I = \frac{3}{2}$

(b) Magnetische Moment des Grundzustands:

$$\Delta E = 2\pi\hbar\nu = g_I\mu_K B$$

$$g_I \cdot I = \mu = \frac{2\pi\hbar\nu I}{\mu_K B} = 0,147$$

(c) Proton oder Neutron, Orbital?

^{181}Ir ($z = 77, N = 144$), also haben wir ein ungerades Proton.

l ist entweder 1 oder 2 ($I = \frac{3}{2}$), der Zustand des Protons also entweder $p_{3/2}$ oder $d_{3/2}$

Zustand	μ_{theo}	μ_{exp}
$p_{3/2}$	$\frac{3}{2}(1 + \frac{5.586-1}{3}) = 3,793$	0,147
$d_{3/2}$	$\frac{3}{2}(1 + \frac{5.586-1}{5}) = 0,124$	0,147

Der Vergleich ergibt, dass das Proton sich aller Wahrscheinlichkeit nach in einem $d_{3/2}$ -Zustand befindet. Dies ergäbe sich übrigens auch, wenn man die Protonen- und Neutronenzahl nicht kennt und für $n_{p_{3/2}}$ und $n_{d_{3/2}}$ $\mu = -1.913$ bzw. 1.148 erhält.

- (d) Messung bei Zimmertemperatur
Es gilt der Boltzmannfaktor

$$a_m \approx e^{-\frac{W_m}{kT}} = e^{\frac{g_I \mu_K B}{kT}} \approx e^{m \cdot 1,2 \cdot 10^{-7}} \approx 1 + m \cdot 1,2 \cdot 10^{-7}$$

Dabei ist die Normierung zu berücksichtigen:

$$\sum_m a_m = 1$$

Also ist in unserem Fall

$$a_m \approx \frac{1}{4}(1 - m \cdot 1,2 \cdot 10^{-7})$$

Wir haben also eine sehr kleine Abweichung von der Gleichbesetzung.

- (e) Um eine starke Ungleichbesetzung zu erreichen, können wir zum einen die Temperatur senken und zum anderen die Aufspaltung vergrößern, indem wir das Feld erhöhen. Während makroskopische Felder im Bereich 1T schon ziemlich stark sind, lassen sich durch geschickte Kombination verschiedener Metalle die Felder am Kernort, die durch Fremdatome erzeugt werden, deutlich höher erzeugen (typisch 100T).

$$B = \frac{2\pi\hbar\nu}{g_I\mu_K} = \frac{2\pi\hbar\nu I}{\mu\mu_K} = 140,7T$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeiten sind dann deutlich asymmetrischer. In diesem Fall haben wir $m = -4, -3, \dots, 4$, und $m_a \propto e^{m \cdot 4,83}$. Wir erhalten

m	$e^{m \cdot 4,83}$	a_m
4	$2,5 \cdot 10^8$	0,992
3	$2 \cdot 10^6$	0,0079
2	$1,6 \cdot 10^4$	$6,3 \cdot 10^{-5}$
1	126	$5 \cdot 10^{-7}$
0	1	$4 \cdot 10^{-9}$
-1	$8 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-11}$
-2	$6 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-13}$
-3	$5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-15}$
-4	$4 \cdot 10^{-9}$	$1,6 \cdot 10^{-17}$

Praktisch ist also nur das Niveau $m=4$ besetzt.

3. Magnetische Momente von Schalenmodellkernen; Spins und Paritäten

Einge Vorabbemerkungen zum Schalenmodell:

Das Schalenmodell lehnt sich dem Elektronenschalen(orbital)modell der Atomhülle an. Schalenabschlüsse welche bei Atomen (best. Z-Werte) zu stabilen Verhältnissen führen (Edelgaskonfiguration) gibt es in ähnlichem Maße bei den Kernen **magische Zahlen:**

Z	2	8	20	28	50	82	
N	2	8	20	28	50	82	126

Man sieht sofort, dass ausgenommen der 2 die Abschlüsse bei anderen Konfigurationen liegen. Dies ist nicht weiter verwunderlich, die Coulombbindung unterschiedlich zur Kernkraft ist und es beim Kern kein wirkliches *Kraftzentrum* gibt.

- Was ist ein **doppeltmagischer Kern**?

z.B. $^{208}_{82}\text{Pb}$ mit $N=126$. Höhere Zerfallsreihen enden hier (Mehr über Zerfälle auf Übungsblatt 5)

- Quadrupolmomente verschwinden für $Z = Z_{mag}$, Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind Kugelsymmetrisch und haben den Kernspin $I=0$
- Der Neutroneneinfangswirkungsquerschnitt für $N = N_{mag} - 1$ ist sehr hoch, für $N = N_{mag}$ besonders klein. Bei Kernen mit $N = N_{mag} + 1$ ist ein Neutron besonders locker gebunden.
- Das Potential wird durch das Woods-Saxon-Potential beschrieben, welches zwischen einem Kasten- und einem harmonischen Potential liegt.
- Pauli Prinzip beachten.
- Die Energieverschiebung der Schalen (im Vergleich zum Atom) kann hauptsächlich auf die "starke" Spin-Bahnkopplung zurückgeführt werden, welche im Kern in der gleichen Größenordnung wie die Bindungsenergie ist, beim Atom nur als Korrekturgröße für die Feinstruktur benötigt wird.
- Es erweist sich das V_{ls} genau wie $V(r)$ negativ ist, deshalb liegen die Zustände für $j = l - \frac{1}{2}$ energetisch höher als $j = l + \frac{1}{2}$; z.B. im Schaubild $d_{3/2}$ liegt höher als $d_{5/2}$.

Eigentliche Aufgabe:

- (a) Zunächst nehmen wir an, dass sich bei geraden Zahlen von Protonen / Neutronen jeweils zwei Nukleonen mit entgegengesetzten Gesamtdrehimpulsen in der gleichen Schale zu 0 koppeln, so dass lediglich die ungeraden Nukleonen den verbleibenden Spin bestimmen. Für die angeregten Zustände wird angenommen dass entweder das Leuchtnukleon in die nächsthöhere freie Schale gehoben wird (A1), oder die energiereichste voll abgeschlossene Schale ein Nukleon abgibt, dass sich dann mit dem Leuchtnukleon in der darüberliegenden halb abgeschlossenen Schale paart. Das ungepaarte verbleibende Nukleon aus der ehemals vollen Schale bestimmt dann die Quantenzahlen des Kernes (A2). Dabei bestimmt sich die Parität über $P = (-1)^l$, während man als Gesamtspin den des Leuchtnukleons annehmen kann ($J = j$). Eingeklammert werden jeweils Zustände, die nur durch Überschreiten von Schalengrenzen erreicht werden können und daher eine besonders hohe Anregungsenergie und eine entsprechend geringe Anregungswahrscheinlichkeit haben müssten, unterstrichen werden die Modellzustände, deren Quantenzahlen mit denen des Experiments übereinstimmen. Somit lässt sich folgende Tabelle erzeugen:

Nuklid	Leucht-nukleon	Grund-zustand	A1	A2	J_0^P . mod.	J_{A1}^P mod.	J_{A2}^P mod.	J_0^P exp.	J_1^P exp.
${}^7_3\text{Li}$	p	$1p_{3/2}^1$	$1p_{1/2}^1$	$1s_{1/2}^{-1}$	$3/2^-$	$1/2^-$	$(1/2^+)$	$3/2^-$	$1/2^-$
${}^{23}_{11}\text{Li}$	p	$1d_{5/2}^3$	$2p_{1/2}^1$	$1p_{1/2}^{-1}$	$5/2^+$	$1/2^+$	$1/2^-$	$3/2^+$	$5/2^+$
${}^{33}_{16}\text{S}$	n	$1d_{3/2}^1$	$1f_{7/2}^1$	$2s_{1/2}^{-1}$	$3/2^+$	$(7/2^-)$	$1/2^+$	$3/2^+$	$1/2^+$
${}^{41}_{21}\text{Sc}$	p	$1f_{7/2}^1$	$2p_{3/2}^1$	$1d_{3/2}^{-1}$	$7/2^-$	$(3/2^+)$	$3/2^-$	$7/2^-$	$3/2^-$
${}^{83}_{36}\text{Kr}$	n	$1g_{9/2}^7$	$2d_{5/2}^1$	$2p_{1/2}^{-1}$	$9/2^+$	$(5/2^+)$	$1/2^-$	$9/2^+$	$7/2^+$
${}^{93}_{41}\text{Nb}$	p	$1g_{9/2}^1$	$1g_{7/2}^1$	$2p_{1/2}^{-1}$	$9/2^+$	$(7/2^+)$	$1/2^-$	$9/2^+$	$1/2^-$

- (b) Die Drehimpulse lassen sich normal Vektoraddieren, so dass der resultierende Gesamtdrehimpuls zwischen der Differenz der einzelnen j_i und ihrer Summe liegt: $J = |j_1 - j|2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2$. Die Parität des Zustandes ist das Produkt der Einzelparitäten. So erhält man:

Nuklid	Leuchtproton	Leuchtneutron	j_1^{P1}	j_1^{P2}	J_{min}	J_{max}	Parität
${}^6_3\text{Li}$	$1p_{3/2}^1$	$1p_{3/2}^1$	$3/2^-$	$3/2^-$	0	3	+
${}^{40}_{19}\text{Li}$	$1d_{3/2}^1$	$1f_{7/2}^1$	$3/2^+$	$7/2^-$	2	5	-

- (c) In ${}^{42}_{21}\text{Sc}$ befindet sich sowohl das ungepaarte Neutron, als auch das ungepaarte Proton in einem $1f_{7/2}$ -Zustand. In der Nähe befinden sich keine Schalen mit gleich hohem oder gar höherem Nukleonengesamtspin, also lässt sich der Spin des Kerns (7) nur als Summe dieser beiden Zustände mit maximal paralleler Ausrichtung erklären. Dann gilt für die einzelnen Nukleonen:

$$g \cdot j = \left(g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l + 1} \right) \cdot j$$

$$g_p \cdot j_p = \left(1 + \frac{5,86 - 1}{7} \right) \cdot \frac{7}{2}$$

$$g_n \cdot j_n = \left(0 + \frac{-3,83 - 0}{7} \right) \cdot \frac{7}{2}$$

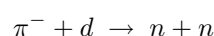
$$g_K = \frac{g_p j_p + g_n j_n}{J} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5,86 - 1}{7} + \frac{-3,83}{7} \right) = 0,57$$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
 Tel.: 07247 82 6330; Labor
 Tel.: 07247 82 4173; Büro
 Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

Anmerkung: Um die allgemeine Langeweile nicht zu schüren und ihre Schönwetter-Park-Zeiten nicht unnötig zu kürzen, stelle ich Ihnen explizit keine Zerfallsaufgaben à la Radioaktive Zerfallskette, Halbwertszeit, Aktivität, sollte jedoch doch noch jemand mit Exponentialaufgaben Probleme haben, üben üben üben.

1. Spin und Paritäten

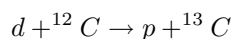
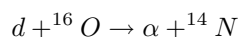
Pionen werden vom Deuteron gemäß folgender Reaktion eingefangen.



Der Pioneinfang findet aus einem atomaren S-Zustand heraus statt, d.h. der relative Bahndrehimpuls zwischen Pion und Deuteron ist $L = 0$. Leiten Sie aus dieser Reaktion die Parität des Pions ab. Betrachten Sie dazu alle möglichen Drehimpulskopplungen im Endzustand und wenden Sie das Pauliprinzip an.

2. Isospin

- (a) Begründen Sie mit Hilfe des Pauli Prinzips, dass es keine gebundenen pp oder nn Zustände gibt. Beziehen Sie die Quantenzahlen des Deuterons in Ihre Argumentation mit ein.
- (b) Welche Isospin-Zustände können in ^{14}N bzw. ^{13}C in den Reaktionen:



erreicht werden, wenn man Isospin Erhaltung annimmt?
(^{16}O , ^{12}C , α und d sind im Grundzustand.)

3. Nuklidkarte

- (a) Von welchen Elementen existieren stabile Isotope?
- (b) Wieviele Arten radioaktiven Zerfalls finden sich in der Nuklidkarte? In welchen Gegenden der Nuklidkarte kommen sie vor?
- (c) In einer Reaktion verschmelzen die Kerne ^{32}S und ^{40}Ca zu einem sogenannten Compoundkern, welches Isotop entsteht?
- (d) Das produzierte Isotop ist hoch angeregt und emittiert ein Alphateilchen und zwei Protonen, welches ist das neue Endprodukt?
- (e) Auch dieses Isotop ist radioaktiv und zerfällt (wie?) weiter bis welches stabile Isotop erreicht wird?
- (f) Eine beliebte γ -Eichquelle ist ^{137}Cs . Sie emittiert γ -Quanten welcher Energie?

4. Alpha-Zerfall:

Nach Gamow gilt für die Zerfallskonstante eines α -Strahlers $\lambda = \lambda_0 \exp(-G)$ mit dem Gamow-Faktor:

$$G = \frac{2}{\hbar} \int \sqrt{2m(V(r) - E_\alpha)} dr$$

Die Integration läuft dabei über die Breite des Potentialwalls in der gilt $E_\alpha < V(r)$. λ_0 ist die Stoßrate des α -Teilchens mit dem Wall und läßt sich näherungsweise aus der kinetischen Energie und der Ausdehnung des Kerns bestimmen.

- (a) Wie groß ist die Zerfallskonstante λ und die Halbwertszeit $t_{1/2}$ eines radioaktiven α -Strahlers, wenn die Energie des α -Teilchens im Kern $+E_1$ ist, der Coulombwall durch ein Rechteckpotential der Höhe E_0 und der Breite a und das Kernpotential durch ein Kastenpotential der Tiefe $-E_2$ und der Breite b angenähert werden kann?

Zahlenwerte: $E_1 = 6$ MeV, $E_2 = +15$ MeV, $E_0 = +11$ MeV, $a = 40$ fm, $b = 6$ fm.

- (b) Welche Zerfallskonstante λ ergibt sich, wenn für $r < b$ das anziehende Kastenpotential, für $r \geq b$ ein abstoßendes Coulombpotential mit $Z_1 = 90$, $Z_2 = 2$ eingesetzt wird? Hinweis: das auftretende Integral $I = \int \sqrt{\frac{R}{r} - 1} dr$ läßt sich durch Substitution $x = 1/r$ analytisch lösen. Ergebnis:

$$I = r \sqrt{\frac{R}{r} - 1} - R \cdot \arctan \cdot \sqrt{\frac{R}{r} - 1}.$$

Dabei ist R der Abstand vom Zentrum des Kerns, bei dem die kinetische Energie des α -Teilchens gerade wieder gleich der Höhe des Coulomb-Walls wird.

Matrix der "virtuellen" Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:
(1/2/3/4a/4b)

Lexikon:

Typ des Zerfalls	ΔZ Kernladung	ΔN Neutronenzahl	ΔA Massenzahl
α -Zerfall (Emission eines He-Kerns)	-2	-2	-4
β -Zerfall (e^- oder e^+ -Emission)	± 1	∓ 1	0
γ -Zerfall (Emission eines Photons)	0	0	0
Elektroneneinfang	-1	+1	0
Protonenemission	-1	0	-1
Neutronenemission	0	-1	-1
Clusterradioaktivität	$-Z_{Cluster}$	$-N_{Cluster}$	$-(Z_{Cluster} + N_{Cluster})$
spontane Spaltung	$\approx \frac{1}{2}Z$	$\approx \frac{1}{2}N$	$\approx \frac{1}{2}A$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Spin und Parität

Parität des Pions

Reaktionsgleichung: $\pi^- + d \rightarrow n + n$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{J}_{\text{total}} = \underbrace{\vec{S}_{\pi^-}}_{=0} + \underbrace{\vec{L}_d}_{=1} + \underbrace{\vec{L}_{\text{rel}}}_{=0} = 1\hbar \quad \text{Eingangskanal}$$

andererseits:

$$\vec{J}_{\text{total}} = \vec{S}_{n_1} + \vec{S}_{n_2} + \vec{L}_{\text{relativ}} = 1\hbar \quad \text{Ausgangskanal}$$

Es gibt 4 Kopplungsmöglichkeiten zu einem Gesamtdrehimpuls von $J = 1\hbar$:

- | | | | |
|-----|-------------------------|---------|--------------------------|
| 1) | $\uparrow + \downarrow$ | $S = 0$ | $L_{\text{relativ}} = 1$ |
| 2a) | $\uparrow + \uparrow$ | $S = 1$ | $L_{\text{relativ}} = 0$ |
| 2b) | $\uparrow + \uparrow$ | $S = 1$ | $L_{\text{relativ}} = 1$ |
| 2c) | $\uparrow + \uparrow$ | $S = 1$ | $L_{\text{relativ}} = 2$ |

- Zusammensetzung der **Gesamtwellenfunktion**

$$\psi_{\text{gesamt}} = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot S(s_1, s_2) \quad (1)$$

Dabei ist $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ die Ortswellenfunktion und $S(s_1, s_2)$ die Spinwellenfunktion.

- **Symmetrieeigenschaften der Ortswellenfunktion**

Die Ortswellenfunktion $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ kann mit Hilfe der Kugelfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ dargestellt werden. Die Vertauschung der beiden Teilchen ist äquivalent zu der Ersetzung $\theta \rightarrow \pi - \theta$ und $\phi \rightarrow \phi + \pi$ und führt zur einer Multiplikation der Ortsfunktion mit dem Faktor $(-1)^L$.

2. Pauliprinzip

- (a) Das Pauliprinzip verlangt für die Wellenfunktion eines Systems von Fermionen,

$$\Psi(1, 2) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot S(s_1, s_2) \cdot T(t_1, t_2)$$

daß sie gegen Vertauschung zweier Teilchen antisymmetrisch ist:

$$\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1)$$

dabei ist :

$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$: der Ortsanteil der Wellenfunktion

$S(s_1, s_2)$: der Spinanteil der Wellenfunktion

$T(t_1, t_2)$: der Isospinanteil der Wellenfunktion

Ortsanteil:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \Psi(\vec{r}_{rel.})$$

mit $\vec{r}_{rel.} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\Rightarrow (\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{r}_2, \vec{r}_1) \Rightarrow \vec{r}_{rel.} \rightarrow -\vec{r}_{rel.}$$

D.h. im Spezialfalle von 2 Teilchen entspricht der Teilchenaustausch gerade der Paritätsoperation. Für das Deuteron gilt $I^\pi = 1^+$, daraus folgt

$$\pi \Psi(\vec{r}_{rel.}) = +\Psi(\vec{r}_{rel.}); \Psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$\Rightarrow$ Der Ortsanteil der Wellenfunktion ist symmetrisch!

Spinanteil: Das Deuteron hat $S=1$, die Spins sind also parallel.

$$S(s_1, s_2) = S(s_2, s_1)$$

$\Rightarrow$ Der Spinanteil der Wellenfunktion ist symmetrisch! Das bedeutet, um die Antisymmetrie der Wellenfunktion zu erreichen, muß der Isospinanteil antisymmetrisch sein:

$$T(t_2, t_1) = -T(t_1, t_2)$$

Die zugehörige Wellenfunktion ist das Isospin-Singulett:

$$T(t_2, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [|p, n\rangle - |n, p\rangle] = |T, T_3\rangle = |0, 0\rangle$$

Die Multiplizität $(2T+1)$ ist 1, es existiert also nur eine Einstellung. Die gebundenen Zustände (pp) und (nn) gehören zum Isospintriplett: $|pp\rangle; \frac{1}{\sqrt{2}} [|p, n\rangle + |n, p\rangle]; |nn\rangle$ mit $T = 1, T_3 = +1, T_3 = 0, T_3 = -1$ Da diese Wellenfunktionen symmetrisch sind, müßte der Spinanteil antisymmetrisch sein ($S=0$). Allerdings wird kein gebundener np -Zustand mit $S=0$ beobachtet.

- (b) In der ersten Reaktion ist der Isospin des Anfangszustandes 0, Da der Isospin des α - Teilchens 0 ist folgt für den Isospin des $^{14}\text{N} = 0$. Auch beim zweiten Prozess ist der Isospin des Anfangszustandes 0 mit $I_p = \frac{1}{2}$ folgt $T(^{13}\text{C}) = -\frac{1}{2}$.

3. Nuklidtafel

Hier bitte die Nuklidkarte besprechen: Tal der Stabilität, in welchen Bereichen passieren welche Zerfälle!

(a) $Z = 1$ bis $Z = 82$, außer $Z = 43$ und $Z = 61$ haben stabile Isotope. In der Karte findet sich noch stabiles $Z = 83$ (^{209}Bi), das sich aber neuerdings als radioaktiv erwiesen hat.

(b) Zerfälle:

- β^- -Zerfall “rechts unterhalb“ der Stabilität
- β^+ -Zerfall/EC “links oberhalb“ der Stabilität α -Zerfall für $A > 150$
- p -Emission bei sehr protonenreichen Kernen
- Spontane Spaltung für $A > 235$
- γ -Emission / Konversionselektronen überall

(c) ^{72}Kr

(d) ^{66}Ge

(e) $^{66}\text{Ge} \rightarrow ^{66}\text{Ga} \rightarrow ^{66}\text{Zn}$

(f) $^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$

(g) 662 keV aus ^{137}Ba , da der β -Zerfall in einen angeregten Zustand stattfindet.

4. Alpha-Zerfall

(a) Der Coulombwall soll die Form eines Rechteckpotentials der Höhe $E_0 = 11$ MeV und der Breite $a = 40$ fm haben, das Kernpotential wird durch ein Kastenpotential der Tiefe $-E_2 = -15$ MeV und der Breite $b = 6$ fm angenähert. Berechnung des Gamow-Faktors ($E_1 = 6$ MeV):

$$\begin{aligned} G &= \frac{2}{\hbar} \int_b^{a+b} \sqrt{2m(V(r) - E_\alpha)} dr \\ &= \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E_0 - E_1)} = \frac{2 \cdot 40 \text{ fm}}{\hbar c} \sqrt{2 \cdot 3727 \cdot 5 \text{ MeV}^2} \\ &= 78.27 \end{aligned}$$

Wenn das α -Teilchen im Kern-Kastenpotential mit Tiefe $-E_2 = -15$ MeV eine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = (15 + 6) \text{ MeV} = 21 \text{ MeV}$ hat, ist seine mittlere Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2E_{\text{kin}}/m}$$

und es stößt bei einer Potentialkastenbreite b pro Sekunde

$$W_1 = \frac{v}{2b} = \frac{1}{2b} \sqrt{2E_{\text{kin}}/m}$$

mal gegen die äußere Kastenwand. Einsetzen der Zahlenwerte ($E_{\text{kin}} = 21 \text{ MeV} = 3.36 \times 10^{-12} \text{ J}$) ergibt $W_1 = 2.64 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$. Die Zerfallskonstante λ ist dann

$$\lambda = W_1 \cdot e^{-G} = 2.69 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$$

und die Halbwertszeit

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 2.58 \times 10^{12} \text{ s} \approx 8.21 \times 10^4 \text{ a.}$$

(b) Das Coulombpotential entspricht der potentiellen Energie

$$E_{\text{pot}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{r} \quad \text{für } r \geq b.$$

Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist jetzt $T = \exp(-G)$ mit

$$\begin{aligned} G &= \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - E_1} dr \\ &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE_1} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} dr. \end{aligned}$$

Das Integral ist durch Substitution $x = 1/r$ analytisch (Bronstein) lösbar und ergibt:

$$G = \frac{2}{\hbar c} \sqrt{2mc^2 E_1} \left[-r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1} + r_2 \cdot \arctan \sqrt{\frac{r_2}{r_1} - 1} \right].$$

Einsetzen der Zahlenwerte $r_1 = b = 6 \text{ fm}$, $mc^2 = 3727 \text{ MeV}$, $E_1 = 6 \text{ MeV}$, $r_2 = 2Ze^2/(4\pi\epsilon_0 E_1) = 43 \text{ fm}$ ergibt den Gamow-Faktor:

$$\begin{aligned} G &= 2.144 \cdot [-14.9 + 43 \arctan 2.48] = 77.52 \\ \Rightarrow T &= e^{-77.52} = 2.15 \times 10^{-34}. \end{aligned}$$

Die Zerfallskonstante ist dann

$$\lambda = W_1 \cdot T = 2.64 \times 10^{21} \cdot 2.15 \times 10^{-34} = 5.67 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}.$$

Die Höhe des Potentialwalls beträgt im Fall des Coulomb-Potentials $E_{\text{pot}}(r_1) = 39.7 \text{ MeV}$ und ist damit deutlich höher als die Höhe des Kastenpotentials in Aufgabenteil a). Dennoch ist die Zerfallskonstante größer, da die Tunnelwahrscheinlichkeit nicht von der Höhe des Potentialwalls sondern von seiner Fläche

$$\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{E_{\text{kin}}} dr$$

abhängt, die in beiden Fällen fast gleich ist.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor
Tel.: 07247 82 4173; Büro
Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Phasenraum beim β -Zerfall

Beim β -Zerfall ist die Zählrate der β -Teilchen mit dem Impuls p im Intervall $[p, p + dp]$ durch Fermi's goldene Regel gegeben:

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{h} \cdot |M_{fi}|^2 \cdot \frac{dn}{dE}.$$

M_{fi} ist die Übergangswahrscheinlichkeit für den Zerfall, dn/dE die Dichte der Endzustände im Phasenraum im Intervall dE .

- (a) Berechnen Sie den Phasenraumfaktor dn/dE unter der Annahme, daß die Rückstoßenergie des Tochterkerns vernachlässigt werden kann, für Neutrinos mit und ohne Ruhemasse. Hinweis: Gehen Sie davon aus, daß ein Lepton wegen der Unschärferelation den Phasenraum

$$\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$$

beansprucht.

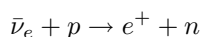
- (b) Welchen Einfluß hat die Neutrinomasse auf den Endpunkt des Spektrums?

2. Maximale Neutrinoenergie beim β -Zerfall und Elektroneneinfang

Der Kern ${}^{62}_{30}\text{Zn}$ kann sowohl durch e^+ -Emission (β^+ Zerfall) als auch durch Elektroneneinfang (EC) zerfallen. Man berechne die maximale Neutrinoenergie für beide Zerfälle, wenn die maximale Energie der Positronen $E_{kin} = 0.66$ MeV ist. Wie unterscheidet sich das Ergebnis, wenn man Rückstoß- und K-Elektronen Bindungsenergie vernachlässigt bzw. berücksichtigt?

3. Neutrinos aus Kernreaktionen und Supernovae

- (a) Warum entstehen in einem Kernreaktor überwiegend Elektron-Antineutrinos?
(b) Die entstehenden $\bar{\nu}_e$ sollen mit Hilfe eines Detektors, der als Neutrinotarget Wasser verwendet (${}^{16}\text{O}$ und ${}^1\text{H}$), über den inversen β -Zerfall



nachgewiesen werden. Die Neutrinos haben eine mittlere Energie von 2.3 MeV. Warum findet der inverse β -Zerfall nur an den H-Atomen und nicht an den Protonen im ${}^{16}\text{O}$ statt?

- (c) Der Wirkungsquerschnitt für den inversen β -Zerfall beträgt bei dieser Neutrinoenergie $\sigma = 6 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$. Berechnen Sie die freie Weglänge $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$ der $\bar{\nu}_e$ in Wasser. Dabei ist n die Dichte der Targetkerne H.
(d) Bei einer Supernovae bildet sich ein Neutronenstern dadurch, daß die Protonen der Sternmaterie über den Prozeß $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ in Neutronen verwandelt werden. Die Materie des Neutronensterns hat etwa die Dichte von Kernmaterie. Berechnen sie die freie Weglänge λ für ν_e in einem Neutronenstern, wenn der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $\nu_e + n \rightarrow p + e^-$ dabei $\sigma = 1 \cdot 10^{-43} \text{ cm}^2$ beträgt.

Matrix der "virtuellen" Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:

(1a/1b/2/3a+b/3c+d)

Blatt 4 fällt aus der Wertung raus.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,

Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Phasenraum beim β -Zerfall

Fermi's goldene Regel gibt die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit an, daß ein Elektron im Impulsintervall $[p, p + dp]$ emittiert wird:

$$N(p)dp = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \cdot \frac{dn}{dE_0}$$

Das Übergangsmatrixelement M_{fi} ist nicht oder nur sehr schwach energieabhängig und wird deshalb als konstant angenommen. Die Form des β -Spektrums wird damit nur durch den Phasenraumfaktor dn/dE_0 bestimmt, der die Dichte der Endzustände im Energieintervall dE_0 angibt. Die Herleitung der Phasenraumdichte ist z.B. in *Mayer-Kuckuck, Kernphysik* beschrieben und wird im folgenden kurz skizziert.

1. Die Größe E_0 ist die Gesamtenergie, die bei dem Zerfall frei wird und sich auf das Elektron (E_e) und das Neutrino (E_ν) verteilt. Es ist $E_0 = E_e + E_\nu$ und für eine feste Elektronenergie gilt $dE_0 = dE_\nu$. Die Phasenraumdichte ist das Produkt der Phasenraumdichten der beiden emittierten Teilchen (e, ν):

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE_0}$$

Die Anzahl der Zustände dn_i bei einem festen Impuls p_i erhält man, wenn man das Phasenraumvolumen durch das kleinste mögliche Phasenraumelement h^3 teilt. Das Phasenraumvolumen ist das Produkt eines beliebigen, aber konstanten Volumens V (kürzt sich bei der Normierung des Übergangsmatrixelementes auf das gleiche Volumen wieder heraus) und einer Kugelschale im Impulsraum mit Radius p_i und der Dicke dp_i :

$$dn_i = \frac{V \cdot 4\pi p_i dp_i}{h^3}$$

$$\begin{aligned} dn_e &= \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot p_e^2 dp_e \\ dn_\nu &= \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \cdot p_\nu^2 dp_\nu \end{aligned}$$

für masselose Neutrinos gilt bei festgehaltener Elektronenenergie:

$$\begin{aligned} p_\nu &= \frac{E_\nu}{c} = \frac{E_0 - E_e}{c} \\ dp_\nu &= \frac{dE_0}{c} \\ p_\nu^2 dp_\nu &= \frac{(E_0 - E_e)^2}{c^3} dE_0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Phasenraumfaktor bei **masselosen Neutrinos**:

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \cdot p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

Zieht man das Volumen V^2 in das Matricelement, so erhält man für die Form des β -Spektrums:

$$N(p_e) dp_e = \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} |M_{fi}|^2 \cdot p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

2. Für **massive Neutrinos** mit der Masse m_ν folgt aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung $E_\nu^2 = p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4$ und der Beziehung $E_0 = E_e + E_\nu$:

$$\begin{aligned} p_\nu^2 &= \frac{E_\nu^2}{c^2} - m_\nu^2 c^2 = \frac{1}{c^2} ((E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4) \\ dp_\nu &= \frac{E_\nu dE_\nu}{c \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4}} = \frac{(E_0 - E_e) dE_0}{c \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}} \\ p_\nu^2 dp_\nu &= \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot \frac{(E_0 - E_e)}{c^3} dE_0 \end{aligned}$$

Damit erhält man den Phasenraumfaktor für massive Neutrinos:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dE_0} &= \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \cdot p_e^2 (E_0 - E_e)^2 \cdot \frac{\sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4}}{E_0 - E_e} dp_e \\ &= \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} \cdot p_e^2 (E_0 - E_e)^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E_e} \right)^2} dp_e \\ &= \frac{dn(m_\nu = 0)}{dE_0} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E_e} \right)^2} \end{aligned}$$

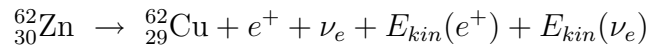
Die Form des β -Spektrums bei **massiven Neutrinos** ändert sich gegenüber der Form bei masselosen Neutrinos:

$$N(p_e)(m_\nu > 0) dp_e = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E_e} \right)^2} \cdot N(p_e)(m_\nu = 0) dp_e$$

Das Spektrum bricht bereits bei $E_e = E_0 - m_\nu c^2$ ab. Dies macht man sich bei der Suche nach der Neutrinomasse zunutze, indem man das erwartete Spektrum für masselose Neutrinos mit dem gemessenen β -Spektrum vergleicht.

3. Maximale Neutrinoenergie beim β -Zerfall

Bilanz des β^+ -Zerfalls:



Für die maximale e^+ -Energie wird $E_{kin}(\nu_e) = 0$. War der ${}^{62}_{30}\text{Zn}$ Kern in Ruhe, so nimmt der Cu Kern den Rückstoß des Positrons auf. Für die Impulse gilt somit: $p({}^{62}_{29}\text{Cu}) = -p(e^+)$

Der Impuls des Positrons lässt sich aus der kinetischen Energie berechnen:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \sqrt{(cp)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 \\ p &= \sqrt{E_{kin}^2 + 2m_e c^2 E_{kin}} \end{aligned}$$

Bei maximaler e^+ -Energie erhält man für den Impuls des Positrons:

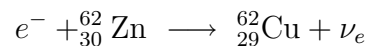
$$p(\beta^+) = \sqrt{0.66^2 + 2 \cdot 0.66 \cdot 0.51} \text{ MeV}/c = 1.053 \text{ MeV}/c$$

Daraus folgt für die kinetische Energie des ${}^{62}_{29}\text{Cu}$ Kernes:

$$E_{kin}({}^{62}_{29}\text{Cu}) = \frac{p^2({}^{62}_{29}\text{Cu})}{2m({}^{62}_{29}\text{Cu})} = \frac{1.1088 \text{ MeV}/c^2}{2m({}^{62}_{29}\text{Cu})} = \frac{1.1088 \text{ MeV}^2/c^2}{2 \cdot 62 \cdot 931.5 \text{ MeV}/c^2} = 9.6 \text{ eV}$$

d.h. Die Rückstoßenergie des Kernes kann vernachlässigt werden. In dem Falle ist die maximale Energie des Neutrinos $E_{kin}(\nu_e)$ gleich der maximalen β -Energie.

Die Bilanz beim Elektroneneinfang (EC) sieht folgendermaßen aus:



Aus dem β^+ -Zerfall wissen wir, dass für die Massendifferenz zwischen Zn und Cu gilt:

$$(m(\text{Zn}) - m(\text{Cu}) - m_e) c^2 = 0.66 \text{ MeV}$$

$$\begin{aligned} E_{kin}(\nu_e) &= (m(\text{Zn}) - m(\text{Cu})) c^2 + m_e c^2 = E_{kin}(\beta^+) + 2 \cdot m_e c^2 \\ &= 0.66 \text{ MeV} + 2 \cdot 0.51 \text{ MeV} = 1.68 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Beim K-Einfang haben die Neutrinos eine feste Energie.

4. Neutrinos aus Kernreaktoren und Supernovae

- (a) Die Spaltprodukte liegen auf der neutronenreichen Seite des Tals der stabilen Kerne und zerfallen daher überwiegend durch β^- -Zerfall: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.
 $\Rightarrow$ **Reaktor: Antineutrinos**

- (b) Energiebilanz: $(m_n - m_p)c^2 = (939.6 - 938.3) \text{ MeV} = 1.3 \text{ MeV}$, d.h. Neutrinos von 2.3 MeV können Protonen in Neutronen umwandeln. Die Protonen im ^{16}O -Kern sind durch die stabile Konfiguration (magische Zahl 8) geschützt. ^{16}N ist ein uu -Kern mit deutlich höherer Grundzustandsenergie. Mit der Weizsäckerschen Massenformel errechnet man (siehe auch Lösung zur Aufgabe 13):

$$\begin{aligned}\Delta mc^2 &= (m(Z_0, A) + \Delta Z m_e - m(Z_1, A)) c^2 \\ &= \Delta Z(m_p + m_e - m_n) + a_C A^{-1/3} (Z_0^2 - Z_1^2) \\ &\quad + \frac{a_A}{A} ((Z_0 - A/2)^2 - (Z_1 - A/2)^2)\end{aligned}$$

Mit $\Delta Z = -1$, $Z_1 = 8$ und $Z_0 = 7$ folgt:

$$\begin{aligned}\Delta mc^2 &= m_n - m_p - m_e + 5.95 \cdot a_C + a_A/16 \\ &= 0.789 \text{ MeV} + 5.95 \cdot 0.7 \text{ MeV} + 90 \text{ MeV}/16 \\ &= 10.5 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Es sind $\approx 10.5 \text{ MeV}$ notwendig, um einen ^{16}O -Kern in einen ^{16}N Kern zu verwandeln.

- (c) Anzahl der Moleküle/Volumen:

$$n_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{N_A \cdot \rho}{A} = \frac{N_A \cdot 1 \text{ g/cm}^3}{18 \text{ g}}.$$

Für die mittlere freie Weglänge gilt damit, da es zwei H-Atome (Targetkerne) pro Wassermolekül gibt

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{n_{\text{H}} \cdot \sigma} = \frac{1}{2n_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \sigma} = \frac{A}{2 \cdot N_A \cdot \rho \cdot \sigma} = \frac{18 \text{ g}}{2 \cdot 6.023 \times 10^{23} \cdot 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 6 \times 10^{-44} \text{ cm}^2} \\ &= 2.49 \times 10^{20} \text{ cm} = 263 \text{ Lichtjahre}.\end{aligned}$$

- (d) Nukleonendichte in Kernmaterie:

$$\rho_n = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi(1.2 \text{ fm} \cdot A^{1/3})^3} = 0.138 \text{ fm}^{-3}$$

Daraus folgt für die freie Weglänge der ν_e in einem Neutronenstern:

$$\lambda = \frac{1}{\rho_n \cdot \sigma} = \frac{1}{0.138 \times 10^{39} \text{ cm}^{-3} \cdot 1 \times 10^{-43} \text{ cm}^2} = 725 \text{ m}.$$

Neutrinos kommen nicht so leicht aus dem Inneren eines Neutronensterns heraus, der einen typischen Radius von 30 km hat. Sie werden an der sog. Neutrinosphäre abgestrahlt, nachdem sie aus dem Inneren dorthin diffundiert sind. Damit verlängert sich die Neutrinoemission nach einer Supernova auf etwa 10 s, obwohl sich der Neutronenstern innerhalb weniger ms bildet.

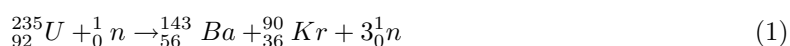
Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor
Tel.: 07247 82 4173; Büro
Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Kernspaltung I

- (a) Was ist ein Moderator? Nennen Sie einige!
- (b) Warum funktioniert die Kernspaltung nicht mit natürlichem Uran und leichtem Wasser, jedoch mit natürlichem Uran und schwerem Wasser?
- (c) Was ist ein Siedewasserreaktor, ein Hochtemperaturreaktor, ein schneller Brüter?
- (d) Was ist ein RBMK-Reaktor? Wieso kam es in Tschernobyl bei einem Reaktor dieses Typs durch den Verlust von Wasser zur Katastrophe?
- (e) Was sagt Ihnen "Three-Mile-Island"?

2. Kernspaltung II

Die bei der Kernspaltungsreaktion



erzeugten Spaltprodukte Barium-143 und Krypton-90 gehen durch nacheinander ablaufende β -Zerfälle in die stabilen Isobare ${}_{60}^{143}\text{Nd}$ bzw. ${}_{40}^{90}\text{Zr}$ über.

- (a) Geben Sie die Zerfallsreihen an!
- (b) Berechnen Sie die insgesamt freiwerdende Reaktionsenergie (Energietönung)!
- (c) Wie groß ist die bei der Spaltung von 1kg Uran-235 nach dieser Reaktion freiwerdende Energie?

Was man bei dieser Aufgabe bedenken sollte, ist, dass die alten Berechnungen und empirisch gewonnenen Parameter hier immer noch genau genug sind und alle neuen Erkenntnisse von Quarks hierbei keine Rolle spielen. Die Kerntechnik ist eine "alte" Technologie. Erstes weltweit kommerzielles Kernkraftwerk 1957! Das erste deutsche Kernkraftwerk in Gundremmingen ging 1962 in Betrieb!

3. Kernfusion

Eine für die Gewinnung von Energie aus der Kernfusion wichtige thermonukleare Reaktion ist die Synthese von Helium aus Deuterium und Tritium nach der Reaktion



wobei das in der Natur nicht vorkommende instabile Tritium unter Ausnutzung des freiwerdenden Neutrons nach der Brutreaktion



(mittels eines Lithiummantels um das Reaktionsgefäß) gewonnen wird.

- (a) Berechnen Sie die insgesamt freiwerdende Reaktionsenergie $Q = Q_1 + Q_2$!
- (b) Wieviel Kilogramm Deuterium und Lithium werden in einer Sekunde verbraucht, um eine Leistung von 1MW zu erzeugen? Welcher Jahresverbrauch ergibt sich daraus für Deutschland mit einer jährlichen Energieerzeugung von $1,6 \cdot 10^6 \text{ T J}$?

- (c) Fusion in der Sonne:
Was ist ..
(i) der pp-Zyklus?
(ii) der CNO Zyklus?
(iii) 3α -Prozess?
(iv) Kohlenstoffbrennen?

4. Bethe-Bloch-Formel

Der Energieverlust, den ein Teilchen mit der Kernladung Z und der Geschwindigkeit v ($\beta = v/c$) beim Durchgang durch Materie (Dichte ρ , Kernladung Z und Massenzahl A aufgrund von Ionisation erfährt, wird über einen großen Energiebereich durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben:

$$-\frac{dE}{dx} \approx 0.1535 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} 2 \left(\ln \frac{2m_e v^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) [\text{MeV cm}^2/\text{g}] \quad (4)$$

Dabei ist I die Energie, die im Mittel für eine Ionisation aufgewendet werden muss. Die Abschätzung für den maximalen Impulsübertrag im Stoß mit einem Elektron $W_{max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$ wurde bereits eingesetzt ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$).

- (a) Welche Energieabhängigkeit besitzt der Energieverlust für nichtrelativistische Teilchen?
(b) Zeigen Sie, dass der Energieverlust ein Minimum besitzt. Drücken Sie die Energie E_{min} , bei der dieses Minimum ungefähr auftritt, als Funktion der Ruhemasse m_0 des ionisierenden Teilchens aus. Teilchen bei dieser Energie bezeichnet man dementsprechend als "minimalionisierend" (MIP: Minimal Ionising Particle).

Matrix der "virtuellen" Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:
(1a+b/1c/1d+e/2a/2b+c/3a+b/3c/4a/4b)

Lexikon:

Relative Atommassen: $A_r(^{235}_{92}\text{U}) = 235,043915$; $A_r(^{143}_{60}\text{Nd}) = 142,909779$; $A_r(^{90}_{40}\text{Zr}) = 89,904700$; $A_r(^2_1\text{H}) = 2,014102$; $A_r(^4_2\text{He}) = 4,002603$; $A_r(^6_3\text{Li}) = 6,015125$.

To many people the awesome destruction of the atomic bombs over Japan suggested more than just a new modern-age weapon of mass destruction. Nuclear physicist Alvin Weinberg told the Senate's Special Committee on Atomic Energy in December 1945: "Atomic power can cure as well as kill. It can fertilize and enrich a region as well as devastate it. It can widen man's horizons as well as force him back into the cave."

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Kernspaltung I

(a) Was ist ein Moderator?

A: Er moderiert (verlangsamt/mässigt) schnelle (aus der Spaltungsreaktion) zu langsamen Neutronen, welche wieder zur Spaltung gebraucht werden.

Dieses Abbremsen geschieht am wirksamsten durch verhältnismäßig kleine Kerne, die beim elastischen Stoss viel Bewegungsenergie aufnehmen können. Geeignet dafür sind leichter Wasserstoff, schwerer Wasserstoff (Deuterium), Lithium, Beryllium oder Kohlenstoff (in Form von Graphit).

(b) Warum funktioniert die Kernspaltung nicht mit natürlichem Uran und leichtem Wasser, jedoch mit natürlichem Uran und schwerem Wasser?

A: Alle Neutronen, die von anderen Kernen eingefangen werden, können keine Kernspaltung mehr auslösen. Wie Uran-238 neigt auch "leichter" Wasserstoff sehr stark zur Absorption von Neutronen. In natürlichem Uran gibt es nun zu viel absorbierendes Uran-238 und zu wenig spaltbares Uran-235. Daher kann es in natürlichem Uran nicht zu einer Kettenreaktion kommen. Wenn Wasser als Moderator verwendet wird, gibt es also zwei technische Möglichkeiten: Entweder dient das teure schwere Wasser als Moderator. Ein solcher Reaktor kann mit natürlichem Uran betrieben werden, weil schweres Wasser kaum Neutronen absorbiert. Oder als Moderator wird gewöhnliches ("leichtes") Wasser eingesetzt. In diesem Fall muss der Anteil von Uran-238 verringert und der Anteil an Uran-235 erhöht werden. In der Praxis genügt für einen Leichtwasser-Reaktor wie z.B. das Gemeinschaftskraftwerk Neckar "GKN" die Anreicherung des Uran-235 auf einen Anteil von 2 bis 5%.

(c) Was ist ein Siedewasserreaktor, ein Hochtemperaturreaktor, ein schneller Brüter?

A: Siehe PDF File

(d) Was ist ein RBMK-Reaktor? Wieso kam es in Tschernobyl bei einem Reaktor dieses Typs durch den Verlust von Wasser zu Katastrophe?

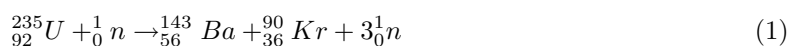
A: Der so genannte RBMK-Reaktor von Tschernobyl war ein Siedewasserreaktor mit zusätzlichem Graphitmoderator (siehe Infokasten "Reaktortypen"). Der Verlust von Kühlmittel (Siedewasser) erhöhte die Spaltleistung enorm, da die absorbierende Wirkung des Siedewassers entfiel und gleichzeitig die moderierende Wirkung des Graphits zwischen den Brennelementen erhalten blieb und so vermehrt Neutronen produziert wurden. Die Folge: Der Reaktorkern schmolz, große Mengen an Wasserstoff wurden gebildet und der Graphit geriet in Brand. Ein großer Teil des Brennstoffs und der Spaltprodukte wurde in die Umwelt abgegeben und aufgrund des Graphitbrandes und besonderer Wetterverhältnisse über weite Teile der Ukraine und Russlands bis hin nach West- und Nordeuropa verteilt.
genauer im PDF File.

(e) Was sagt Ihnen "Three-Mile-Island?"

A: On the morning of March 28, 1979, a reactor at the Three Mile Island nuclear power facility near Harrisburg, Pennsylvania, suddenly overheated. During the tension-packed week that followed, scientists scrambled to prevent the nightmare of a nuclear meltdown, officials tried to calm public fears and more than one hundred thousand residents fled the area. Equipment failure, human error, and bad luck would conspire to create an event that stunned the nation.

2. Kernspaltung II

Die bei der Kernspaltungsreaktion



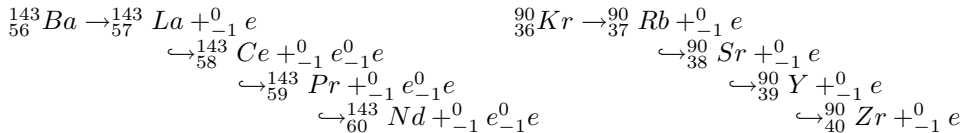
erzeugten Spaltprodukte Barium-143 und Krypton-90 gehen durch nacheinander ablaufende β -Zerfälle in die stabilen Isobare ${}^{143}_{60}\text{Nd}$ bzw. ${}^{90}_{40}\text{Zr}$ über.

- (a) Geben Sie die Zerfallsreihen an!

A: Die Bilanzgleichung der Kernreaktion ist

$${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{143}_{60}\text{Nd} + {}^{90}_{40}\text{Zr} + 3{}_0^1\text{n} + 8{}_{-1}^0\text{e} \quad (2)$$

wobei der Term $8{}_{-1}^0\text{e}$ von den β -Zerfällen mit ${}^{143}_{56}\text{Ba}$ und ${}^{90}_{36}\text{Kr}$ als Ausgangskerne herrühren. Die isobaren Zerfallsreihen lassen sich durch sukzessive Erhöhung der Ordnungszahl um den Betrag 1 rekonstruieren:



- (b) Berechnen Sie die insgesamt freiwerdende Reaktionsenergie (Energietönung)!

A: Da die relativen Atommasen A_r der neutralen Atome verwendet werden, ist die Ruhemasse der 8 Elektronen schon in $A_r(\text{Nd})$ und $A_r(\text{Zr})$ berücksichtigt, so dass sich die gesamtfreigesetzte Energie ergibt zu

$$Q = [A_r(\text{U}) - A_r(\text{Nd}) - A_r(\text{Zr}) - 2A_{rn}]uc^2 = 0,212106uc^2 = 197,6\text{MeV}$$

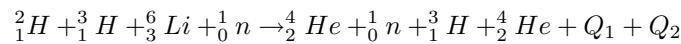
- (c) Wie groß ist die bei der Spaltung von 1kg Uran-235 nach dieser Reaktion freiwerdende Energie?

A: Damit erhält man für $M = 1\text{kg}$ Uran-235 mit $N = M/[A_r(\text{U})u] = 2,56 \cdot 10^{24}$ Atomen eine freigesetzte Energie von $E = NQ = 5,06 \cdot 10^{26}\text{MeV} = 8,11 \cdot 10^{13}\text{J} = 2,25 \cdot 10^7\text{kWh}$

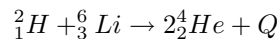
3. Kernfusion

- (a) Berechnen Sie die insgesamt freiwerdende Reaktionsenergie $Q = Q_1 + Q_2$!

A: Beide Reaktionsgleichungen lassen sich zusammenfassen zu



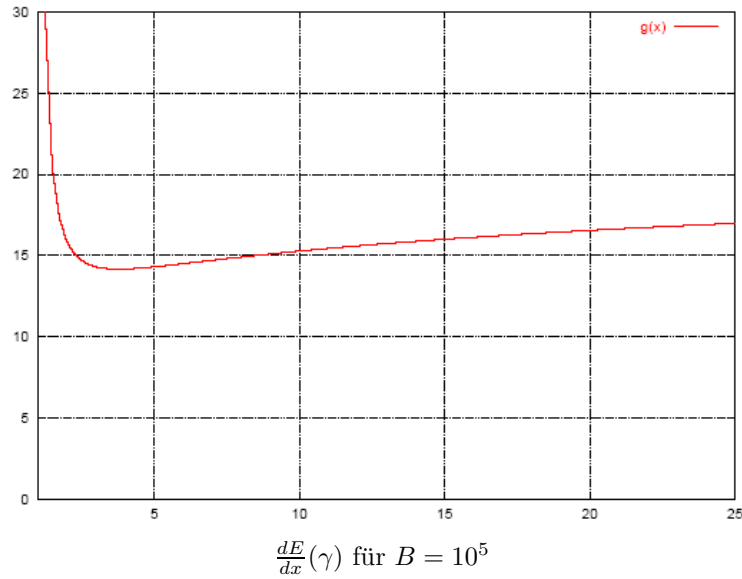
woraus die Bilanzgleichung



resultiert; somit

$$Q = Q_1 + Q_2 = [A_r({}^6_3\text{Li}) + A_r({}^2_1\text{H}) - 2A_r({}^4_2\text{He})]uc^2 = 3,58 \cdot 10^{-12}\text{J} = 22,4\text{MeV}$$

- (b) Mit der bei N Reaktionsabläufen freiwerdenden Energie $E = NQ$ und der Leistung $P = E/t = 1\text{MW}$ ergibt sich für die folgende Reaktionsrate $R = N/t = P/Q = 2,79 \cdot 10^{-9}\text{kg/s}$. Dies ergibt bei der Energieerzeugung von $E = 1,6 \cdot 10^6\text{TJ}$ einen jährlichen Verbrauch von $m({}^2_1\text{H}) = E[m({}^2_1\text{H})/t]/P = A_r({}^2_1\text{H})uE/Q = 1495\text{kg} \approx 1,5\text{t}$ Deuterium und $m({}^6_3\text{Li}) = 4464\text{kg} \approx 4,5\text{t}$ Lithium.



4. Bethe-Bloch-Formel

- (a) Das Plotten des Energieverlustes in Abhängigkeit von γ zeigt ein Minimum dessen Position von dem Verhältnis $\frac{2m_e v^2}{I} = \frac{2m_e c^2 \beta^2}{I}$ abhängt. Typische Werte für $B = \frac{m_e c^2}{I}$ sind $10^4 - 10^6$, damit ergibt sich eine Kurve wie folgt: die beiden β -abhängigen Bestandteile $\frac{1}{\beta^2}$ und $\ln(\beta^2 \gamma^2) - \beta^2$ sind streng monoton fallend bzw. streng monoton steigend, also kann man sagen, dass das Verhalten von $\frac{dE}{dx}$ bei kleinen β vom Term $\frac{1}{\beta^2}$ -Term dominiert wird, bei großem β hingegen von $\ln(\cdot)$.
- (b) Um das Minimum zu finden, muss man

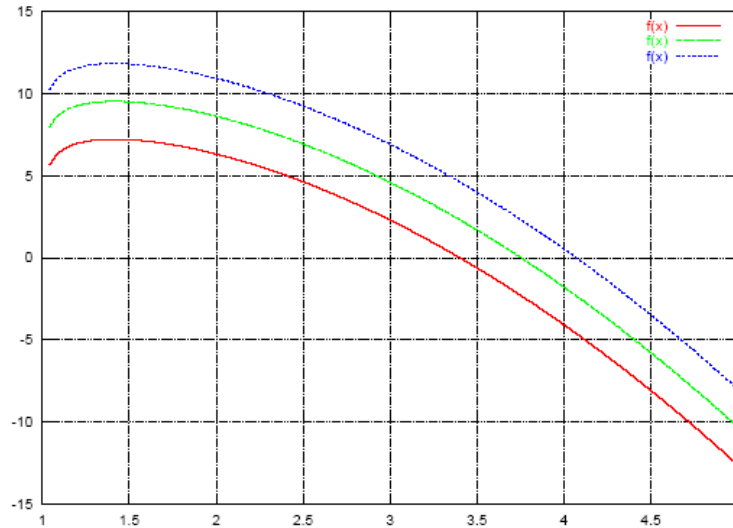
$$\frac{\partial(\frac{dE}{dx})}{\partial\beta} = 0 \quad (3)$$

lösen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\beta} \cdot \frac{1}{\beta^2} (\ln(B\beta^2\gamma^2) - \beta^2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\beta} \frac{1}{\beta^2} \ln(B\beta^2\gamma^2) &= 0 \\ \frac{2 \ln(B\beta^2\gamma^2)}{\beta^3} + \frac{B(\beta^2 \frac{\partial\gamma^2}{\partial\beta} + 2\beta\gamma^2)}{\beta^2(B\beta^2\gamma^2)} &= 0 \\ \frac{2 \ln(B\beta^2\gamma^2)}{\beta^3} + \frac{B(2\beta^3\gamma^4 + 2\beta\gamma^2)}{\beta^2(B\beta^2\gamma^2)} &= 0 \\ \ln B + \ln \beta^2 \gamma^2 &= \beta^2 \gamma^2 + 1 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{1 - \beta^2} \\ 1 - \beta^2 &= \frac{1}{\gamma^2} \\ \beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} \\ &= \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \\ \beta^2 \gamma^2 &= \gamma^2 - 1 \end{aligned}$$



Rot: $B = 10^4$; Grün: $B = 10^5$; Blau: $B = 10^6$

erhält man schliesslich

$$\ln B + \ln \gamma^2 - 1 = \gamma^2$$

Diese Gleichung ist nur schwer mathematisch in den Griff zu bekommen, aber eine grafische Lösung für 3 verschiedene Werte von $B(10^4, 10^5 \text{ und } 10^6)$ zeigt, dass Teilchen mit $\gamma \approx 3 - 4$ minimal ionisierend wirken:

Matrix der “virtuellen“ Berechnung: Für ../../.. gibt es jeweils ein Kreuz:
(1a/1b/2/3a+b/3c+d)

Lexikon:

Relative Atommassen: $A_r(^{235}_{92}\text{U}) = 235,043915$; $A_r(^{143}_{60}\text{Nd}) = 142,909779$; $A_r(^{90}_{40}\text{Zr}) = 89,904700$; $A_r(^2_1\text{H}) = 2,014102$; $A_r(^4_2\text{He}) = 4,002603$; $A_r(^6_3\text{Li}) = 6.015125$.

To many people the awesome destruction of the atomic bombs over Japan suggested more than just a new modern-age weapon of mass destruction. Nuclear physicist Alvin Weinberg told the Senate’s Special Committee on Atomic Energy in December 1945: “Atomic power can cure as well as kill. It can fertilize and enrich a region as well as devastate it. It can widen man’s horizons as well as force him back into the cave.”

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: 07247 82 6330; Labor; Tel.: 07247 82 4173; Büro; Email: Frank.Hartmann@cern.ch
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/kern.html

1. Elektromagnetische Schauer

- (a) zu diskutieren: γ -Quant startet mit Paarbildung, Elektron beginnt mit Bremsstrahlung. Im übrigen entwickeln sich die Prozesse gleich.
- (b) pro Generation verdoppelt sich die Teilchenzahl, d.h. nach n Generationen gibt es im Mittel 2^n Teilchen. Jedes davon hat im Mittel die Energie

$$E_n = \frac{E_0}{2^n}.$$

- (c) Maximum der Schauerentwicklung falls $E_n \leq E_c$

$$\frac{E_0}{2^{n_{\max}}} = E_c \quad \Rightarrow \quad n_{\max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2}$$

Die Tiefe beträgt demnach

$$h = n_{\max} \cdot X_0 = X_0 \cdot \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2}$$

- (d) Diese Gleichungen beschreiben Mittelwerte. Die Fluktuationen sind allerdings enorm groß ($\approx$ Faktor 2). Um in jedem Fall eine gute Energiemessung zu haben, muss das Kalorimeter dementsprechend tiefer sein.
- (e) Teilchenzahl im Maximum und longitudinale Tiefe

$$\begin{aligned} E_\gamma = 10 \text{ GeV} \Rightarrow n_{\max} &= \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{10^4}{93} = 6.75 \Rightarrow 2^{n_{\max}} = 108 \text{ Teilchen} \\ h &= 3 \cdot n \cdot X_0 = 737.1 \text{ cm} \\ E_\gamma = 50 \text{ GeV} \Rightarrow n_{\max} &= 9.07 \Rightarrow 2^{n_{\max}} = 538 \text{ Teilchen} \\ h &= 3 \cdot n \cdot X_0 = 990.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Čerenkov

- (a) Damit überhaupt Čerenkov-Licht ausgesendet wird, muß das Teilchen sich schneller bewegen als das Licht in dem Medium. Diese Bedingung steckt implizit in der Formel für den Öffnungswinkel

$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \frac{1}{\beta n} \\ |\cos \Theta| &\leq 1 \\ \frac{1}{n} &\leq \beta \end{aligned}$$

Im Folgenden wird der Grenzwert $\frac{1}{n} = \beta$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \\ |\vec{p}_\pi| &= \beta \gamma m_\pi c \end{aligned}$$

wobei $m_{\pi^{pm}} = 139,6 \text{ MeV}/c^2$.

Damit ergeben sich minimale β_{thr} und γ_{thr} zu

Medium	n	β_{thr}	γ_{thr}	$ \vec{p}_\pi [\text{MeV}/c]$
N_2	1.00298	0.9997	40.83	5700
C_4F_{10}	1.00153	0.9985	18.08	2520
Aerogel	1.05	0.9523	3.28	436
Quarz	1.458	0.6859	1.37	131.2

- (b) Die Schwelle des Čerenkov-Detektors erhält man aus dem Impuls

$$\begin{aligned}
 |\vec{p}| &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta m_0 c \\
 \frac{|\vec{p}|^2}{m_0^2 c^2} &= \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \\
 \frac{m_0^2 c^2}{|\vec{p}|^2} + 1 &= \frac{1}{\beta^2} \\
 \frac{1}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{|\vec{p}|^2} + 1}} &= \beta
 \end{aligned}$$

Das ergibt für $\pi^\pm, K^\pm$ und p folgende Brechungsindizes:

Teilchen	β	n
$\pi^\pm$	0.9999	1.0001
$K^\pm$	0.9990	1.0010
p	0.9956	1.0044

Zur guten Separation der Teilchen sind die Brechungsindizes zwischen den Schwellindizes zu wählen, also z.B.

1. $\pi^\pm/K^\pm$; $n \approx 1.0005$
2. $K^\pm/p$; $n \approx 1.0025$

- (c) Das Radiatormaterial im HADES RICH ist C_4F_{10} (siehe Aufgabe a). Diese Schwelle erlaubt es einerseits, bei den typischen Energien, die am SIS in Darmstadt erzeugt werden, keine Hadronen zu sehen. Ein weiteres Kriterium ist dann, einen möglichst hohen Brechungsindex zu haben, um möglichst viel Licht für jedes Elektron zu erzeugen die Lichterzeugung skaliert mit $|\cos \Theta|$.

3. Feld- und Potentialverlauf in Siliziumzählern

Die einfache Integration der Poissongleichung liefert das elektrische Feld $E_y = -dU/dy$ und die zweite Integration das Potential $U(y)$. Die Integrationskonstanten werden durch die Randbedingungen

$$E_y(y_s) = 0, \quad E_y(y_p) = 0, \quad U(y_s) = U_B \quad \text{und} \quad U(y_p) = 0$$

bestimmt. Dabei ist U_B die Betriebsspannung des Siliziumdetektors. Die Endpunkte y_s und y_p werden durch die Forderung nach der Stetigkeit von E_y und U im Punkt y_g festgelegt. Es ergibt sich somit:

$$E_y(y) = \begin{cases} eN_d/(\epsilon_0\epsilon) \left(y - y_g + \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_d(1+N_d/N_a)}} \right) & y_s \leq y \leq y_g \\ eN_a/(\epsilon_0\epsilon) \left(y_g - y + N_d/N_a \cdot \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_d(1+N_d/N_a)}} \right) & y_g < y \leq y_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

$$U(y) = \begin{cases} U_B - eN_d/(2\epsilon_0\epsilon) \left(y - y_g + \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_d(1+N_d/N_a)}} \right)^2 & y_s \leq y \leq y_g \\ eN_a/(2\epsilon_0\epsilon) \left(y - y_g - N_d/N_a \cdot \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_d(1+N_d/N_a)}} \right)^2 & y_g < y \leq y_p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

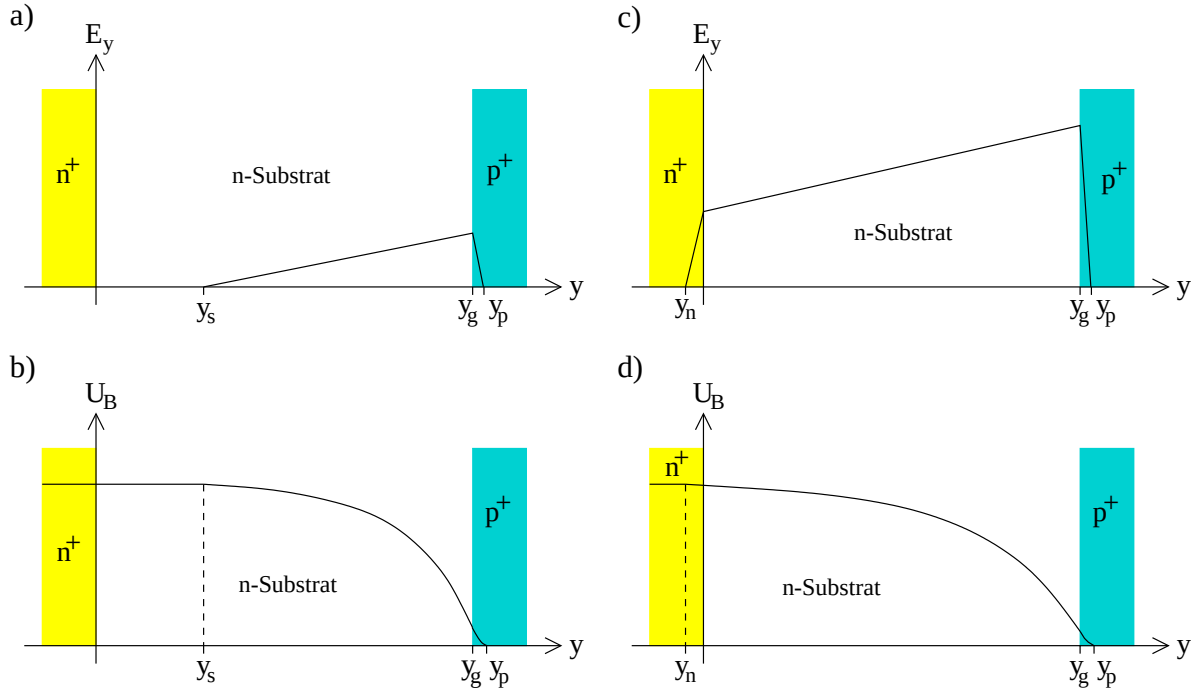


Abbildung 1: a) Feldverlauf und b) Potentialverlauf in einem nicht vollständig verarmten Siliziumstreifen-zähler. c) Feldverlauf und d) Potentialverlauf in einem vollständig, bzw. "überverarmten" verarmten Siliziumstreifen-zähler, dessen Betriebsspannung U_B über der Verarmungsspannung U_{vvs} gewählt ist. Vom Verarmungs- oder Depletionsfall spricht man, wenn die Verarmungszone gerade den gesamten Raum ausfüllt und das E-Feld ist dann an der n^+ -Grenze gerade 0.

In den Abb. 1a und 1b ist der Feld- und Potentialverlauf in einem nicht vollständig verarmten Detektor schematisch dargestellt. Die Breite der Verarmungszonen im Substrat Δ_s und im p^+ -Implantat Δ_p ergeben sich zu:

$$\Delta_s \equiv y_g - y_s = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_d(1 + N_d/N_a)}} \quad (3)$$

$$\Delta_p \equiv y_p - y_g = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon U_B}{eN_a(1 + N_a/N_d)}} \quad (4)$$

Für den Fall $N_a \gg N_d$ ¹ gilt: $\Delta_s \gg \Delta_p$ und die Tiefe der Verarmungszone ist in sehr guter Näherung durch Δ_s gegeben. Die volle Verarmungsspannung lässt sich berechnen, indem man verlangt, dass die Verarmungszone sich über die ganze Dicke b des Detektors erstreckt. Aus $y_s = b$ ergibt sich gemäß (3) für die volle Verarmungsspannung:

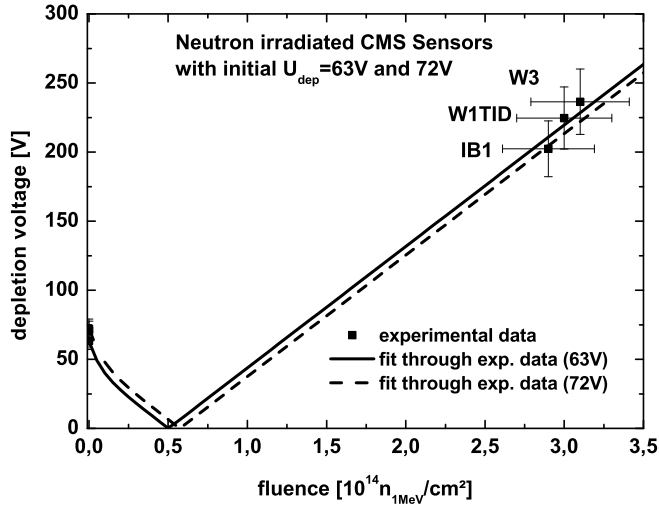
$$U_{vvs} = \frac{eN_d}{2\epsilon_0\epsilon} \cdot b^2 \quad (5)$$

In Abb. 1c und 1d sind der Feld- und der Potentialverlauf schematisch für den Fall gezeichnet, dass die Betriebsspannung über der vollen Verarmungsspannung liegt.

Wie oben gezeigt, hängt die Verarmungsspannung (5) von der (dotierten) Ladungsmenge ab, im -dotiertem Halbleiter dominiert die Donatoren $N_{eff} = N_d$, da während der Bestrahlung zusätzliche

¹Design eines Siliziumdetektors.

N_A -ähnliche Niveaus erzeugt werden muss nun die Differenz genommen werden $|N_{eff}| = |N_d - N_a|$ bis hin zum intrinsischen Siliziummaterial mit $|N_d = N_a|$ $U_{vvs} = 0$ und nimmt danach wieder zu, allerdings hat man dann einen p-dotierten anstatt einen n-dotierten Siliziumdetektor.
z.B.:



Der Hauptunterschied zwischen einem Siliumzähler und einem Diamanten ist der Bandabstand. Diamant ist keine Halbleiter sondern ein Isolator. Die Signale im Diamant sind also geringer, da weniger e-h Paare pro Energie erzeugt werden, weshalb das Rauschen gering gehalten werden muss (Elektronikanforderung), dafür ist das Material äußerst “schnell“ und extrem strahlungshart. Die aktuellen Probleme eines Diamantdetektors sind die Korngrenzen und die Kosten, um eine akzeptables Signal zu bekommen muss der Sensor “dick“ ($200\mu m$) sein, leider werden die Kosten in μm Dicke gerechnet, da das Aufdampfen einiger μ Diamant Stunden dauert.

1. Energieverlust durch Synchrotronstrahlung

Der Energieverlust pro Umlauf einer sich auf einer Kreisbahn vom Radius r_0 bewegendes Ladung e ist

$$\Delta E = \frac{e^2 \gamma^4}{3 \epsilon_0 \gamma_0}$$

Wie groß ist der Energieverlust durch Strahlung (Elektronen) pro Umlauf im LEP-Speicherring bei einem Radius $r_0 = 4$ km und einer Energie von 50 GeV?

- (a) Wieviel Leistung wird insgesamt bei einem Strom von 0.1 A abgestrahlt?
- (b) Wodurch ist die natürliche Schwerpunktsenergiegrenze eines Lepton- bzw. eines Hadron- Kreisbeschleunigers gegeben?

2. Energiedeposition in Siliziumdetektoren

Siliziumdetektoren arbeiten als Festkörperionisationskammern. Durch Strukturierung eines Siliziumsubstrats wird ein pn -Übergang erzeugt, dessen Verarmungszone durch Anlegen einer Betriebsspannung auf den ganzen Kristall ausgedehnt wird. Durchdringen geladene Teilchen den Detektor, erzeugen sie durch Ionisation Elektron-Lochpaare, die im elektrischen Feld getrennt werden und zu den Oberflächenstrukturen des Zählers driften.

- (a) Schreiben Sie die Bethe-Bloch Formel

$$\frac{dE}{dx} = - \frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4 \pi \epsilon_0^2 \cdot v^2 m_e} \cdot \left[\ln \frac{2 m_e v^2}{\langle E_B \rangle} - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right] \quad (1)$$

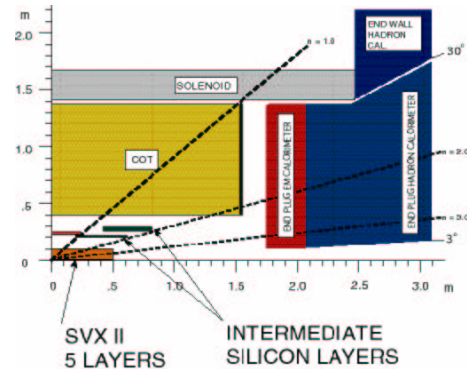
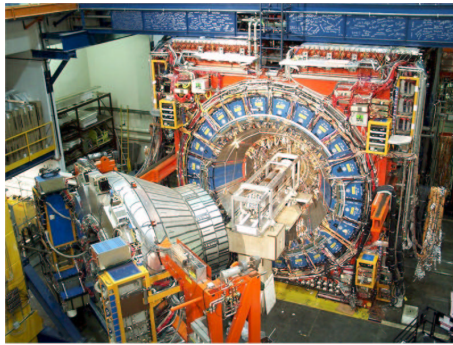
so um, dass $\beta\gamma$ als alleinige Geschwindigkeitsvariable auftritt.

- (b) Berechnen Sie den Energieverlust dE/dx von einfach geladenen ($Z_1 = 1$) minimal-ionisierenden Teilchen mit $\beta\gamma = 3.0$ in Silizium (${}^{28}_{14}\text{Si}$, $\rho_{\text{Si}} = 2.33 \text{ g/cm}^3$). Für das mittlere Ionisationspotential der Elektronen im Bremsmedium gilt $\langle E_B \rangle \approx 10 \cdot Z_2 \text{ eV}$.
- (c) Typischerweise ist ein Siliziumdetektor $300 \mu\text{m}$ dick. Wieviel Energie deponiert ein minimal-ionisierendes Teilchen in einem Zähler, wenn es ihn senkrecht durchquert?
- (d) Im Mittel werden 3.62 eV benötigt, um ein Elektron-Loch-Paar zu erzeugen. Wie viele Elektron-Loch-Paare werden in einem Siliziumzähler im Mittel erzeugt?
- (e) In den meisten Teilchenphysikexperimenten werden Siliziumdetektoren zur Spurrekonstruktion in der Nähe des Wechselwirkungspunktes eingesetzt. Die erzeugten Teilchen durchqueren die Siliziumscheiben unter verschiedenen Winkeln. Der Vertexdetektor des CDF-Experiments am Fermilab hat zum Beispiel eine geometrische Akzeptanz von $|\eta| \leq 2.0$. Dabei ist η die Pseudorapidität

$$\eta \equiv - \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) \quad (2)$$

welche ein Maß für den Polarwinkel θ ist. θ wird von der Strahlachse (z-Achse) des Experiments aus gemessen.

Um welchen Faktor unterscheidet sich die Energiedeposition im Vergleich zum Durchgang unter $\theta = 90^\circ$, d.h. $\eta = 0$, wenn minimal-ionisierende Teilchen unter $\eta = 1$ bzw. $\eta = 2$ den Detektor durchqueren.



Hier ist der CDF-Detektor beim Zusammenbau gezeigt und ein Schema mit der Variable η , man beachte, dass die Kalorimeterzellen in η -Segmenten nicht in Θ -Segmenten gebaut sind.

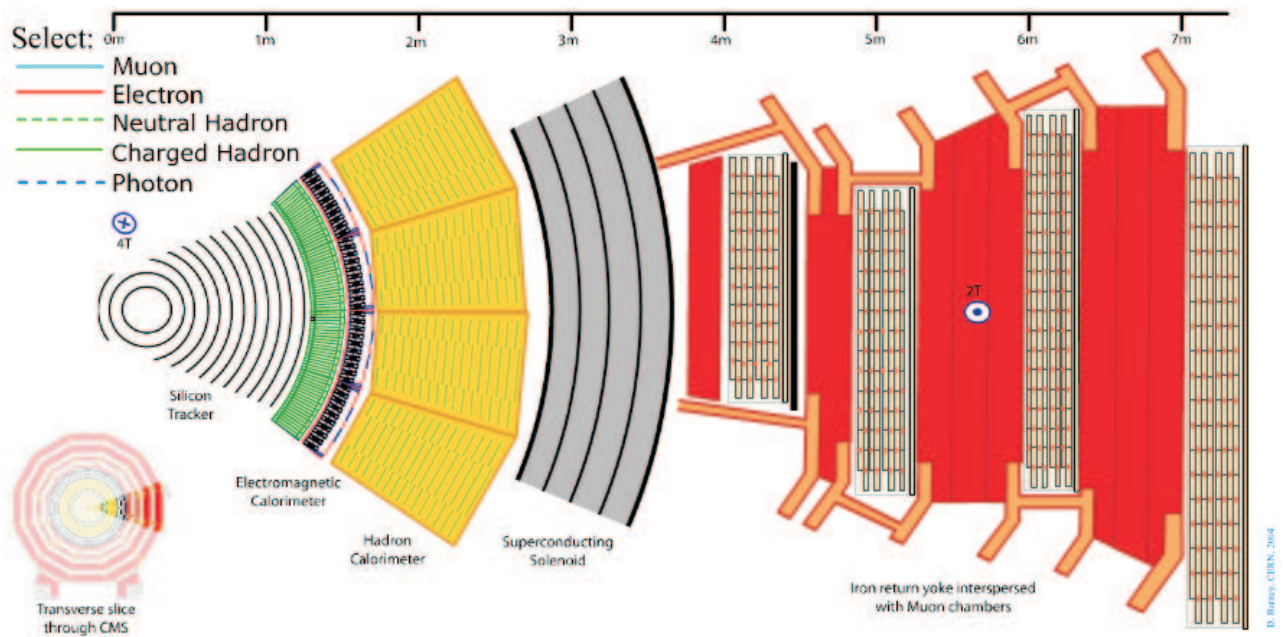
- (f) Welchen Impuls haben minimal-ionisierende Pionen ($\pi^\pm$, $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$), Kaonen ($K^\pm$, $m_K = 493.68 \text{ MeV}/c^2$), Myonen ($m_\mu = 105.66 \text{ MeV}/c^2$) und Protonen ($m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$)?

3. Teilchendetektierung

Das Bild zeigt einen Ausschnitt aus dem CMS-Detektor, welcher aktuell gebaut wird, um im Jahre 2007 am LHC am CERN in Betrieb genommen werden zu können. CMS ist der “kompaktere“ der beiden multipurpose Detektoren am LHC¹. Weitere Informationen finden Sie auf cmsdoc.cern.ch.

Wie werden die Teilchen:

- a) Photon b) Elektron c) Muon d) geladenes Hadron e) ungeladenes Hadron f) Neutrino nachgewiesen? Zeichnen Sie den Weg der Teilchen und beachten Sie dabei auch das Solenoid-Feld incl. des Rückfeldes ausserhalb des supraleitenden Magneten.

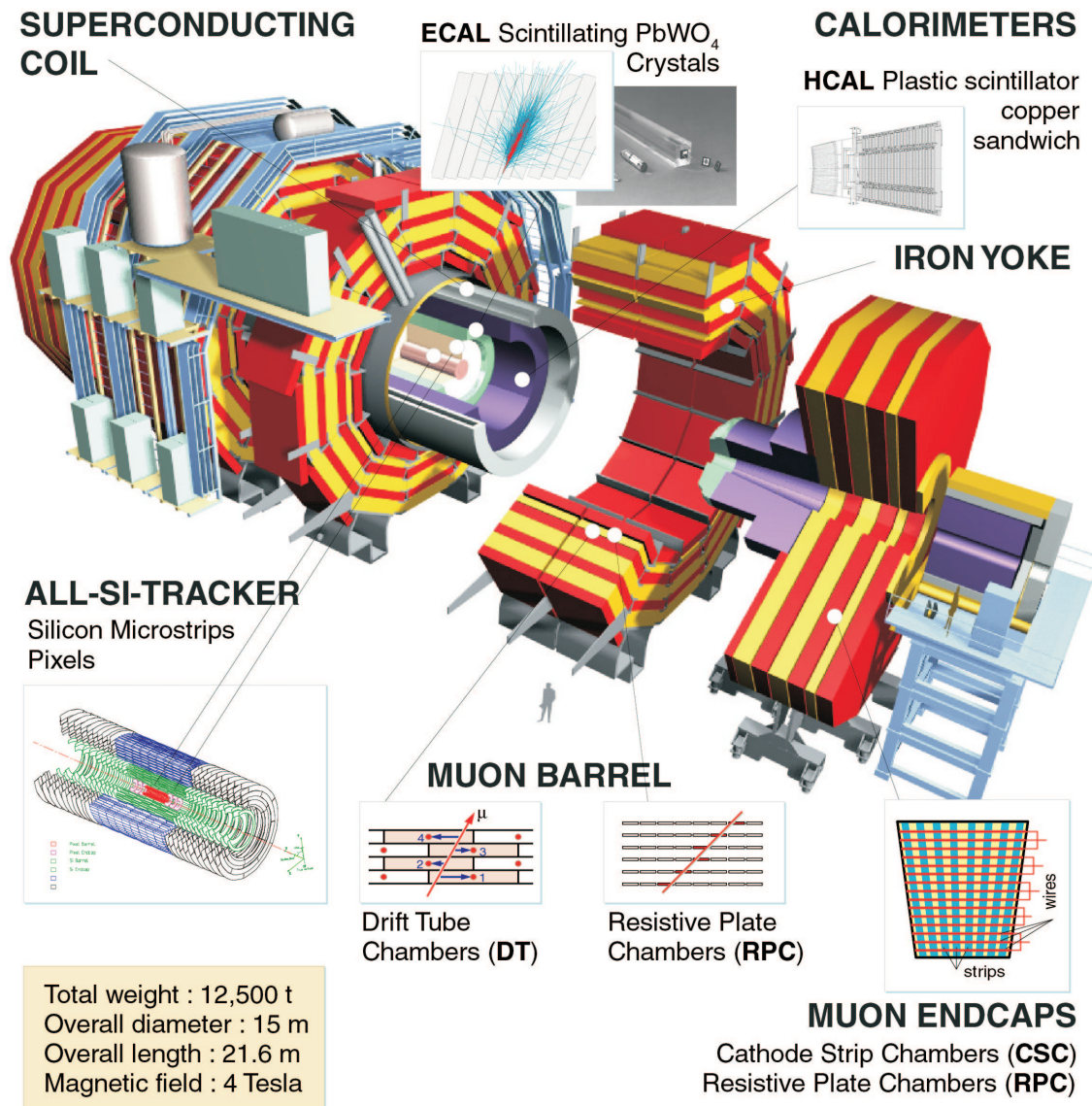


Finden Sie den Menschen auf Seite 3!

Matrix der “virtuellen“ Berechnung: $(1/2a+b/2c-f/3a-c/3d-f)$

¹ATLAS besitzt das ca. 4fache Volumen, aber nur das ca. halbe Gewicht

CMS layout and detectors



1. Energieverlust durch Synchrotronstrahlung

Der Energieverlust pro Umlauf einer sich auf einer Kreisbahn vom Radius r_0 bewegendes Ladung e ist

$$\Delta E = \frac{e^2 \gamma^4}{3\epsilon_0 \gamma_0}$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{5 \cdot 10^4 \text{ MeV}}{0.5 \text{ MeV}} = 10^5 \\ \Rightarrow \frac{1.6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{20}}{3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^3} \text{ J} &= 2.4 \cdot 10^{-11} \text{ J}. \end{aligned}$$

Ein Elektron mit einer Geschwindigkeit c stellt einen Kreisstrom dar:

$$I = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{c}{2\pi r_0} = 1.9 \cdot 10^{-15} \text{ A}$$

Bei einem Strom von 0.1 A kreisen deshalb

$$N = \frac{0.1}{1.9 \cdot 10^{-15}} = 5.3 \cdot 10^{13}$$

Elektronen im Ring. Der Energieverlust pro Umlauf ist:

$$\Delta E = 1.26 \cdot 10^3 \text{ J/Umlauf}$$

Ein Umlauf dauert: $T = \frac{2\pi r_0}{c} = 84 \mu\text{s}$

$$\Rightarrow dE/dt = P = 1.5 \cdot 10^7 \text{ W} = 15 \text{ MW}$$

Wie man sieht sind die Verluste durch Synchrotronstrahlung enorm und Ringbeschleuniger (Speicherringe) für Elektronen/Positronen mit mehr als den 100 GeV Strahlenergie, welche man heutzutage an LEP erreicht, werden unökonomisch. Darum wird die nächste Generation von e^+e^- -Collidern wohl mit Linearbeschleunigern realisiert werden. Bei Linearbeschleunigern spielt der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung nur eine untergeordnete Rolle.

Der Energieverlust durch Synchrotronstrahlung geht mit γ^4 also direkt mit Masse^{-4} .

$$\Delta E_{\text{synch}} = \frac{4\pi e^2 \beta^2 \gamma^4}{3R} \propto \frac{E^4}{m^4 \cdot R} \quad (1)$$

Der Energieverlust von Protonen (Masse M) steht zu dem der Elektronen (Masse m) im Verhältnis $(m/M)^4$, d.h. er ist für Protonen 10^{13} mal kleiner als für Elektronen. Die natürliche Grenze für einen Leptonen-Kreis-Beschleuniger ist also die Synchrotronstrahlung. (Energienmenge, welche pro Umlauf aufgefüllt werden muss plus Acceleration.)

Die natürliche Grenze für Protonen sind die Dipolmagneten, welche das schwere Proton auf der Bahn halten.

2. Energiedeposition in Siliziumdetektoren

(a) Bethe-Block mit $\beta\gamma$

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e n_e c^2} \cdot \frac{1}{\beta} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2}{\langle E_B \rangle (1 - \beta^2)} \right) - \beta^2 \right] \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (\beta\gamma)^2 = \frac{1}{\beta^2} - 1 \Rightarrow \beta^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta\gamma^2}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{Z_1^2 e^4 n_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e n_e c^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta\gamma^2}\right) \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2}{\langle E_B \rangle} \cdot (\beta\gamma)^2 \right) - \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta\gamma^2}} \right] \quad (4)$$

(b) Energieverlust

$$n_e = \frac{N_A Z_2}{V_{mol}} = \frac{N_A Z_2}{M_{mol}} = \frac{N_A Z_2 \rho}{A} \cdot g^{-1} \quad (5)$$

Berechnung des Vorfaktors:

$$\frac{Z_1^2 e^4 N_A Z_2 \rho g^{-1}}{4\pi\epsilon_0^2 m_e c^2 A} = \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2 4\pi N_A 14 \cdot 2,33 \text{ cm}^{-3}}{0,5 \text{ aa MeV} \cdot 28} = \frac{197,3^2 \text{ MeV} 10^{-26} \text{ cm}^2 2\pi 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 2,33 \text{ cm}^{-3}}{137,036^2 \cdot 0,511} \quad (6)$$

$$= 0,3578 \text{ MeV/cm}$$

$$\langle E_B \rangle = 10 \cdot Z_2 eV = 140 eV \Rightarrow \frac{2m_e c^2}{140 eV} = 7300 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0,3576 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \left(1 + \frac{1}{(\beta\gamma)^2}\right) \cdot \left[\ln (7300 (\beta\gamma)^2) - \frac{1}{1 + \frac{1}{(\beta\gamma)^2}} \right] \quad (8)$$

$$\beta\gamma = 3,0$$

$$\frac{dE}{dx} = 0,3576 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \cdot \frac{10}{9} [\ln (65700) - 0,9] = 0,3576 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \cdot 11,33 = 4,05 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \quad (9)$$

(c) Deponierte Energie in $300 \mu\text{m}$ Silizium

$$\frac{dE}{dx} = 4,05 \frac{\text{MeV}}{\text{cm}} = 0,405 \frac{\text{keV}}{\mu\text{m}} \rightarrow \Delta E = \frac{dE}{dx} \cdot 300 \mu\text{m} = 121,5 \text{ keV} \quad (10)$$

(d) Anzahl Elektron-Loch Paare (e-h Paare) $121,5 \text{ keV} / 3,62 \text{ eV} = 33560$
Als Faustregel merkt man sich $108 \text{ e-h Paare} / \mu\text{m}$

(e) Winkel (Hier bei CDF)

$$\eta = -\ln \tan \frac{\Theta}{2} \rightarrow e^{-\eta} = \tan \frac{\Theta}{2} \rightarrow \Theta = 2 \arctan e^{-\eta} \rightarrow \Theta_1 = 40,4^\circ \rightarrow \eta = 1; \Theta_1 = 15,4^\circ \rightarrow \eta = 2; \quad (11)$$

Pfadlänge im Siliziumzähler $\Delta l = \Delta d / \sin \Theta$

$$\frac{\Delta l_1}{d} = \frac{1}{\sin \Theta_1} = 1,54$$

$$\frac{\Delta l_2}{d} = \frac{1}{\sin \Theta_2} = 3,77$$

(f) Impuls

$$p = \gamma m v = \gamma m c \beta = \beta \gamma m c \quad (12)$$

Pionen : $418,71 \text{ MeV}/c$

Kaonen : $1481,04 \text{ MeV}/c \approx 1500 \text{ MeV}/c = 1,5 \text{ GeV}/c$

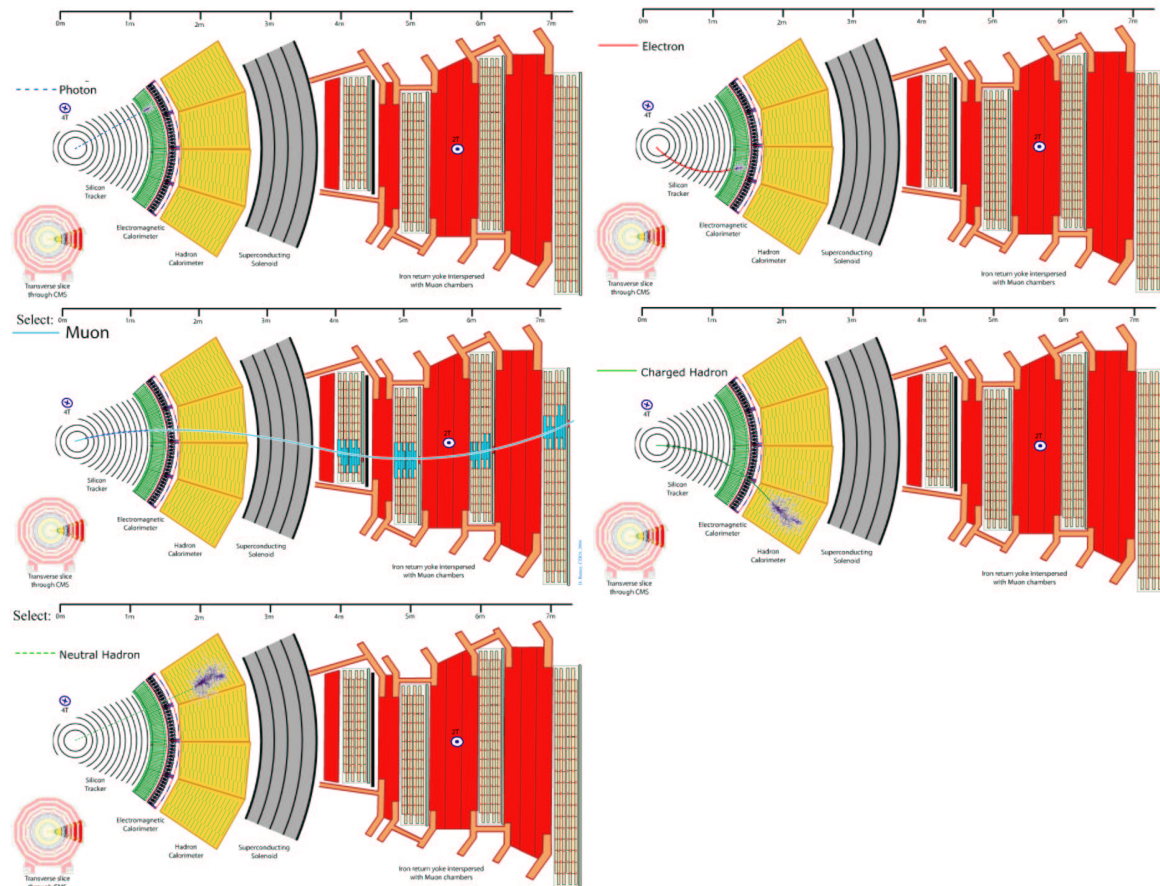
Muonen : $316,98 \text{ MeV}/c \approx 320 \text{ MeV}/c$

Protonen : $2814,81 \text{ MeV}/c \approx 2,8 \text{ GeV}/c$

3. Teilchendetektierung

Die Tutoren bitte ich eine Folie mit dem Schnitt des Detektors mitzubringen incl. Folienstifte, damit die Studenten die Teilchenereignisse frei einzeichnen können.

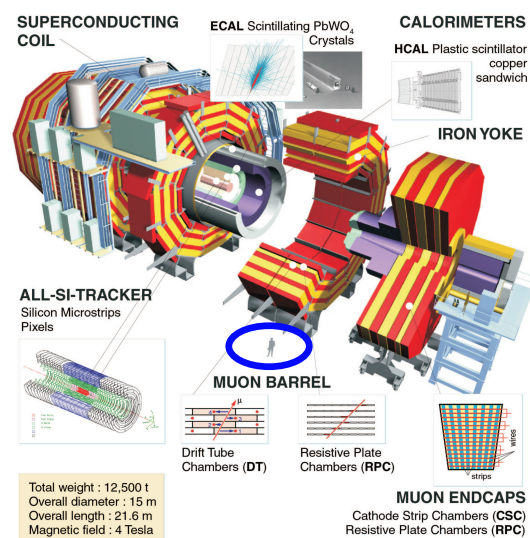
Bilderreihenfolge: Photon, Elektron, Muon, Charged Hadron, Neutral Hadron:



Ein Neutrino wird nicht nachgewiesen, man spricht hier von sogenannter “missing energy“. Aufaddieren aller Energien und Impulse zeigt für ein Neutrino ein fehlendes Ereignis.

Finden Sie den Menschen auf Seite 3!

CMS layout and detectors



Matrix der “virtuellen“ Berechnung: ()

1. Gasverstärkung / Townsend-Koeffizient

In Gasdetektoren kann bei Verwendung hoher elektrischer Felder eine Verstärkung der durch das nachgewiesene Teilchen erzeugten Primärionisationsladung erreicht werden. Dazu müssen die Elektronen auf dem Weg zur Elektrode zwischen zwei Stößen genügend Energie gewinnen, um weitere freie Elektronen erzeugen zu können. Die Anzahl dieser Sekundärelektronen pro cm ist durch den (ersten) Townsend-Koeffizienten α gegeben.

- (a) Berechnen Sie die Gasverstärkung $f = q/q_0$ in der Lawine, die von einer Primärionisationsladung q_0 ausgelöst wird, für einen Detektor der Dicke d und dem Townsend-Koeffizienten α .
- (b) Zeigen Sie, dass für ein gegebenes Zählgas bei einem Druck p und einem angelegtem elektrischen Feld E näherungsweise gilt $\alpha = Ape^{(\frac{-Bp}{E})}$ mit den Konstanten A und B
- (c) Schätzen sie die mittlere freie Weglänge ' eines Elektrons zwischen zwei Stößen in Argon als Zählgas ab. Hinweis: Argon kann als ideales Gas angenommen werden (molares Volumen bei Normaldruck $V_{mol} = 22,56 \text{ cm}^3$, atomarer Radius $r_{Atom} = 0,7^\circ \text{ A}$).

2. Nochmal Teilchendetektoren

- Erklären Sie frei eine Vieldraht-Proportionalkammer!
(Immerhin hat Charpak dafür einen Nobelpreis bekommen)
- Ein Halbleiterzähler darf hier natürlich nicht fehlen! Na Gut J.Kaminski hat mich deutlich darauf hingewiesen, dass Siliziumzähler hier fehlen sollten. (← Dies ist keine Aufgabe, kann aber angekreuzt werden)
- Was hat Čerenkov mit Mach gemein?
- Wie funktioniert ein "Micro-Strip-Gas-Counter" (MSGC)? Was ist ein GEM?
- Was ist ein "Transition Radiation Tracker" (TRT)?
- Was ist eine Nebelkammer, Steamerkammer, Bubble chamber¹?

3. Die Wechselwirkungen oder auch kurz WW für die Schreibfaulen

- Nennen Sie die 4 (**Ahem: ich meine natürlich 3**) Wechselwirkungen und ihre Träger der Kräfte!
- Welche Masse und Zerfallsbreite hat ein Graviton?
- Gilt eigentlich bei den Quarks innerhalb des Confinements auch das Pauliprinzip?
- Was ist Confinement eigentlich?
- Erklären Sie den Begriff "Flavor"!
- Woher weiss man eigentlich, dass Quarks rot grün blau sind und nicht Magenta, Yellow und Blaugrün? Wie misst man das?
- Würde man bei einer Ionisation (Spurdetektor) erkennen, wenn ein drittel-ladungszahliges Quark frei durch den Detektor fliegt?

¹Warum hat die Ausleseart und Datenverarbeitung viele männliche Physiker ans Cern gezogen? (nicht ganz ernst gemeinte Frage)

4. Teilchenzoo!

Warum sind die Quarks nur einfarbig und warum kleben die, gibt's die auch mit Vanillegeschmack?

(a) Erklären sie frei in der Übungsgruppe folgende Begriffe:

- Fermionen
- Baryonen
- Leptonen
- Gluonen
- Bosonen
- Mesonen
- Plasma
- Quark-Gluon-Plasma
- Schäferhund
- Quasiteilchen
- Photon
- Hadron²
- See-Quarks

Der Autor erhebt keinerlei Ansprüche auf Vollständigkeit

(b) Ordnen Sie folgende Teilchen den obigen Begriffen zu:

- Neutron n
- Muon μ
- positives Pion π^+
- W^+
- Ω
- Tau-Neutrino ν_{τ}
- τ
- Quarkonium
- Hyperon

5. Neulich im Park

Was passiert, wenn sich .. und .. treffen?

- Elektron und Elektron? Elektron und Positron?
- Neutrino und Gluon?
- Gluon und Gluon? Gluon und Elektron?
- Graviton und ein Schäferhund?
- Z und Elektron? W^+ und Elektron?

Neulich am LHC!

Trifft ein Proton bei sehr hoher Energie auf ein Proton! Was annihiliert dann?

Matrix der “virtuellen“ Berechnung: (1a+b/1c/2a/2b/3a/3b/4/5

²griech. für stark

1. Gasverstärkung / Townsend-Koeffizient

- (a) Von n Elektronen werden nach einer Strecke dx

$$dn = \alpha \cdot n \cdot dx$$

neue (sekundäre) Elektronen ausgelöst.

$$n(x) = n_0 e^{\alpha x}$$

mit

$$f = \frac{q}{q_0} = \frac{n}{n_0} = e^{\alpha x}$$

- (b) Zur Ionisation gibt es zunächst zwei Voraussetzungen: Einmal muss das Elektron im Feld so weit ungestört beschleunigt werden können, dass es genügend Energie hat, um Sekundärionisationen auslösen zu können, danach ist die Ionisationswahrscheinlichkeit umgekehrt proportional zur freien Weglänge, da es natürlich auf ein Atom des Gases treffen muss, welches es dann ionisieren kann.

$$\alpha \propto \frac{\text{Anzahl der Sekundärionen}}{\text{Mittlere freie Weglänge}} \frac{\text{Ionisationswahrscheinlichkeit}}{\text{Mittlere freie Weglänge}}$$

Die Strecke x_{ion} , die Elektronen beschleunigt werden müssen, um Ionisationen auslösen zu können, ist gegeben durch:

$$e \cdot E \cdot x \leq e \cdot U_{ion}; \quad x_{ion} = \frac{U_{ion}}{E}$$

Zur Berechnung der Ionisationswahrscheinlichkeit werden folgende Größen eingeführt:
 $P(x)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen bis zur Tiefe x keine Wechselwirkung hatten,
 $w dx$ = Wahrscheinlichkeit, dass WW zwischen x und $x + dx$ stattfindet.

$$\begin{aligned} P(x + dx) &= P(x)(1 - w dx) \\ P(x) + \frac{dP}{dx} dx &= P - P w dx \\ dP &= -w P dx \\ P(x) &= C \cdot e^{-wx} \\ P(0) &= 1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

nun muss man noch herausfinden, wie w mit bekannten Größen verknüpft ist. Dazu berechnet man die freie Weglänge λ :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\int_0^\infty x P(x) dx}{\int_0^\infty P(x) dx} \\ &= \frac{x(-\frac{1}{w})P(x)|_0^\infty - (-\frac{1}{w} \int_0^\infty P(x) dx)}{(-\frac{1}{w} P(x))} \\ &= \frac{(0 - 0) - \frac{1}{w^2} P(x)}{(-\frac{1}{w} P(x))} \\ &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$

Dies nun alles eingesetzt ergibt:

$$\alpha = C \cdot \frac{1}{\lambda} P(x_{ion}) = A \cdot e^{-\frac{U_{ion}}{E\lambda}}$$

und da in Gasen gilt: $\lambda \propto \frac{1}{p}$ (p:Druck), gibt das gesamt:

$$\alpha = A \cdot p \cdot e^{-\frac{Bp}{E}}$$

(c) Argon: Ideales Gas, Normaldruck

$$N = \frac{N_a}{V_{mol}}$$

$V_{mol} = 22,56l$ (nicht cm^3) geometrischer Wirkungsquerschnitt: $\sigma = \pi \cdot r_{Atom}^2$

$$\lambda = \frac{1}{N \cdot \sigma} = 2.5 \mu m$$

2. Nochmal Teilchendetektoren

siehe Literatur!

3. Die Wechselwirkungen oder auch kurz WW für die Schreibfaulen

- Nennen Sie die 4 (**Ahem: ich meine natürlich 3**) Wechselwirkungen und ihre Träger der Kräfte!

Antwort:

Kraft	Träger der Kraft – Austauschteilchen
Gravitationskraft	Gravitonen
Starke Kraft	Gluonen (Farbladungen)
Elektroschwache Kraft	γ ; Z ; W^+ ; W^-

Die elektroschwache Kraft wurde zuvor getrennt als Elektromagnetisch und schwache Kraft betrachtet.

“ <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/forces/funfor.html#c4> “

- Welche Masse und Zerfallsbreite hat ein Graviton? Nunja, das Graviton ist noch nicht nachgewiesen.
Da die Fernwirkung aber unendlich ist, muss die Masse quasi NULL betragen.
- Gilt eigentlich bei den Quarks innerhalb des Confinements auch das Pauliprinzip? Ja, natür,ich, deshalb benötigt man ja die Farbladungen, weitere Quantenzahlen/freie Parameter!
- Was ist Confinement eigentlich? Die Träger der starken Kraft wechselwirken mit sich selbst, da sie selbst Farbladung tragen. Dies führt zu einem Kraftterm, welcher linear mit dem Abstand größer wird $F \propto r$ zu einem bestimmtem Abstand ist die Energie dieser Kraft so groß, dass $q\bar{q}$ gebildet werden. Dies führt dazu, dass ein keine “freien“ Quarks geben kann.
- Erklären Sie den Begriff “Flavor“! Den einzelnen Quarkfamilien wird der Begriff “Flavor“ zugeordnet (eine Quantenzahl), z.b. up, down, beauty, charm, top, bottom!
- Woher weiss man eigentlich, dass Quarks rot grün blau sind und nicht Magenta, Yellow und Blaugrün? Wie misst man das?
Die Farbwahl ist einzig und allein eine Definition, die Quarks haben natürlich keine Farbe im umgangssprachlichen Sinne, rgb wird deshalb genutzt, da sich alle drei Farben zu WEISS ergänzen, damit kann man einfach sagen, es gibt nur “weisse“ Quarkzustände nämlich r+g+b oder Farbe+Antifarbe, aber es ist NUR eine Definition. Man benötigt einfach nur 3 Quantenzahlen!
- Würde man bei einer Ionisation (Spurdetektor) erkennen, wenn ein drittel-ladungszahliges Quark frei durch den Detektor fliegt?

Antwort: Die Ladung geht quadratisch in die Bethe-Bloch-Formel ein $\rightarrow$ ein Teilchen, welches nur 1/9 (bzw. 4/9) der Standardionisation macht würde sofort auffallen. (Anmerkugn, natürlich muss mandie Statistik beachten, da die Ionistaion ja eine Verteilung darstellt.)

4. Teilchenzoo!

Warum sind die Quarks nur einfarbig und warum kleben die, gibt's die auch mit Vanillegeschmack?

(a) Erklären sie frei in der Übungsgruppe folgende Begriffe:

- Fermionen: Teilchen mit halbzahligem Spin, welche der Fermi-Dirac-Statistic folgen und damit dem Pauliprinzip.
- Baryonen: Alle Kombination von 3 Quarks (Farbneutral mit rgb) Untermenge der Hadronen
- Leptonen: Elektron e , Muon μ , Tau τ , Elektron-Neutrino ν_e , Muon-Neutrino ν_μ , Tau-Neutrino ν_τ und deren Antiteilchen. NICHT-Hadronen, Nicht Austauschbosonen, WW elektroschwach + gravitativ!
- Gluonen: Träger der starken Kraft; Austauschteilchen
- Bosonen: Teilchen mit ganzzahligem Spin, welche der Bose-Einstein-Statistik folgen und damit nicht dem Pauli-Prinzip
- Mesonen Quarkkombinationen aus einem Quark und einem Antiquark (Farbneutral Farbe-Antifarbe) Untergruppierung der Hadronen; Baryonen + Mesonen = Hadronen
- Plasma: Suppe aus Atomrümpfen und Elektronen: (Phase)
- Quark-Gluon-Plasma: Suppe aus Quarks und Gluonen!
- Schäferhund: großer Hund wird oft zur Bewachung von Schafherden/Privateigentum eingesetzt.
- Quasiteilchen: Jede Art von Quantenzuständen, welche entweder der Bose-Einstein- oder der Fermi-Dirac-Statistik folgen; z.B. Excitonen, Magnetonen; Polaronen usw. (Besonders beliebt bei Festkörperphysikern)
- Photon Lichtquant, einer der Träger der elektroschwachen Kraft (auch der elektromagnetischen)
- Hadron: Teilchen bestehend aus einer Kombination aus Quarks; Obermenge von Baryonen und Mesonen
- See-Quarks: zusätzliche $q\bar{q}$ innerhalb eines Hadrons; z.B. im Proton gibt es See-Quarks, erforscht am Forschungslabor DESY in Hamburg ($e^- - p$ -Streuung; bzw. $e^+ - p$ -Streuung)

Der Autor erhebt keinerlei Ansprüche auf Vollständigkeit, wie auch, sonst wäre das Blatt beliebig lang

(b) Ordnen Sie folgende Teilchen den obigen Begriffen zu:

- Neutron: Hadron; Baryon; Fermion (Spin $\frac{1}{2}$)
 n
- Muon: Lepton; Fermion (2. Generation)
 μ
- positives Pion π^+ : Ein bestimmtes Meson: $u\bar{d}$ Quark-Antiquark mit Farbe und Antifarbe
- W^+ : Eichboson, Träger der schwachen Kraft; Boson
- Ω : Wurde zur Zeit seines Nachweises als letztes Teilchen postuliert, ein Hadron, Baryon mit 3 s (strange) Quarks
- Tau-Neutrino ν_{τ} Lepton; Fermion (3. Generation); Neutrino zum τ -Lepton
- τ Lepton; Fermion (3. Generation)
- Quarkonium: Zustand von Quark und Antiquark, gleichen Flavors, z.B. $s\bar{s}$ oder $c\bar{c}$
- Hyperon: Ein Hyperon ist ein Drei-Quark-Teilchen, das ein strange oder seltsames Quark enthält, also ein Baryon, Hadron, Fermion.

5. Neulich im Park

Was passiert, wenn sich .. und .. treffen?

- Elektron und Elektron?: Stossen sich elektromagnetisch ab (auch elektroschwach)
Elektron und Positron?: Ziehen sich elektromagnetisch/elektroschwach an: Annihilieren oder bilden ein Positronium (siehe Atomphysik)

- Neutrino und Gluon?: Reine gravitative Anziehung (wenn man die Masse des beschleunigten Körpers mit betrachtet)keine starke oder elektroschwache WW, da Neutrino nur schwach und Gluon nur stark ww.
- Gluon und Gluon?: Starke WW und natürlich wie immer gravitativ.
Gluon und Elektron? Nur gravitativ; keine starke bzw. elektroschwache WW.
- Graviton und ein Schäferhund?: Das Graviton hilft dem Schäferhund auf dem Boden zu bleiben, bzw. nach einem Sprung wieder dorthinzugelangen-
- Z und Elektron?: ww schwach bz. elektroschwach nicht rein elektromagnetisch; ach ja, natürlich auch gravitativ.
 W^+ und Elektron?: ww schwach, bzw. elektromagnetisch; ach ja, natürlich auch gravitativ.

Neulich am LHC!

Trifft ein Proton bei sehr hoher Energie auf ein Proton! Was annihiliert dann?

Antwort: Die Antiquarkanteile der See-Quarks (Bestandteile des Protons)

Matrix der “virtuellen“ Berechnung: (1a+b/1c/2a/2b/3a/3b/4/5