

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 2

Musterlösungen

Aufgabe 1: Lorentztransformation und Comptonstreuung

Im Folgenden werden Größen im Elektron-Ruhesystem mit einem Stern und Größen des gestreuten Photons mit einem Strich gekennzeichnet. Impulse werden in eine Komponente senkrecht ($p_{\perp} = |\vec{p}_{\perp}|$) und eine Komponente parallel (p_{\parallel}) zur Boostichtung zerlegt. Die positive Richtung ist durch das Photon definiert. Es gilt die Lorentztransformation:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_{\parallel}^* \\ p_{\perp}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \\ p_{\perp} \end{pmatrix}$$

a) Aus

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e} = 5.38 \cdot 10^4 \quad \beta \approx -1 \quad (\text{negative Flugrichtung des Elektrons})$$

folgt für die Lorentztransformation in das Ruhesystem des Elektrons:

$$E_{\gamma}^* = \gamma E_{\gamma} - \beta\gamma p_{\gamma\parallel} = \gamma E_{\gamma} - \beta\gamma E_{\gamma} = 2\gamma E_{\gamma} = 259 \text{ keV}$$

b) Für die Energie des gestreuten Photons gilt:

$$\begin{aligned} E_{\gamma}^{*'}(\theta^*) &= \frac{E_{\gamma}^*}{1 + \frac{E_{\gamma}^*}{m_e c^2}(1 - \cos \theta^*)} \\ \Rightarrow E_{\gamma}^{*'}(90^\circ) &= 172 \text{ keV} \\ \Rightarrow E_{\gamma}^{*'}(180^\circ) &= 129 \text{ keV} \end{aligned}$$

c) Für die Rücktransformation in das Laborsystem wird in der Transformationsmatrix $-\beta$ durch β ersetzt. Die Energie im Laborsystem ist also:

$$\begin{aligned} E_{\gamma}' &= \gamma E_{\gamma}^{*'} + \beta\gamma p_{\gamma\parallel}^{*'} = \gamma E_{\gamma}^{*'} + \beta\gamma p_{\gamma}^{*'} \cos \theta^* = \gamma E_{\gamma}^{*'}(1 - \cos \theta^*) \\ \Rightarrow E_{\gamma}'(\theta^* = 90^\circ) &= 9.26 \text{ GeV} \\ \Rightarrow E_{\gamma}'(\theta^* = 180^\circ) &= 13.85 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Aus den Impulskomponenten

$$\begin{aligned} p'_{\gamma\perp} &= p_{\gamma\perp}^* = E_{\gamma}^* \sin \theta^* \\ p'_{\gamma\parallel} &= \beta\gamma E_{\gamma}^* + \gamma p_{\gamma\parallel}^* = -\gamma E_{\gamma}^* (1 - \cos \theta^*) \end{aligned}$$

ergibt sich mit

$$\tan \theta = \frac{p'_{\gamma\perp}}{p'_{\gamma\parallel}}$$

für $\theta^* = 90^\circ$:

$$\tan \theta = \frac{E_{\gamma}^*}{-\gamma E_{\gamma}^*} = -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow \theta = 180^\circ - 0.001^\circ \approx 180^\circ$$

und für $\theta^* = 180^\circ$:

$$\tan \theta = \frac{0}{p'_{\gamma\parallel}} = 0 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

Aufgabe 2: Energieverlust und Vielfachstreuung

a) Für die mittlere Winkelabweichung erhält man:

$$\theta_{rms} = \frac{21 \text{ MeV}/c}{p} \cdot \sqrt{\frac{L}{X_0}} = 4.7 \text{ mrad} = 0.27^\circ$$

Der Energieverlust durch Bremsstrahlung ΔE_{rad} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -\frac{E}{X_0} \\ \Rightarrow E(x) &= E_0 \cdot e^{-\frac{x}{X_0}} \\ \Rightarrow \Delta E_{rad} &= E_0 - E(x) = E_0(1 - e^{-\frac{x}{X_0}}) = 48.8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Wenn man für $\Delta E \ll E_0$ die Näherung eines konstanten Energieverlusts $dE/dx = -E_0/X_0$ macht, erhält man als Energieverlust $\Delta E_{rad} = -E_0/X_0 \cdot x = 50 \text{ MeV}$.

b) Der Energieverlust durch Ionisation ist gegeben durch die Bethe-Bloch-Formel:

$$-\frac{dE}{dx} = D_e \left(\frac{Z_1}{\beta} \right)^2 Z_2 \frac{N_A \rho}{A} \left[\ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

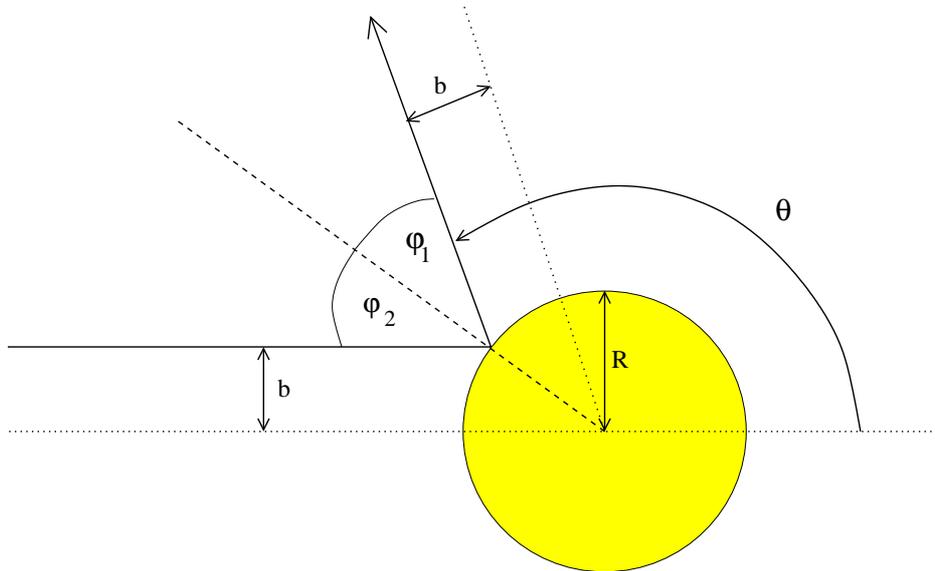
Mit $D_e = 5.1 \cdot 10^{-25} \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = 82$, $\beta\gamma = p/m_e$, $\beta \approx 1$, $I \approx Z_2 \cdot 10 \text{ eV}$, $\delta = 0$ sowie ρ und A aus dem Aufgabentext erhält man:

$$-\frac{dE}{dx} = 29.4 \text{ MeV/cm}$$

Daraus ergibt sich als Energieverlust durch Ionisation ΔE_{ion} :

$$\Delta E_{ion} = \left| \frac{dE}{dx} \right| \cdot 0.05 \cdot X_0 = 0.82 \text{ MeV} \ll \Delta E_{rad}$$

Aufgabe 3: Wirkungsquerschnitt



Der Drehimpuls $L_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1|$ vor dem Stoß muß gleich dem Drehimpuls L_2 nach dem (elastischen) Stoß sein:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Rightarrow p R \sin \phi_1 &= p R \sin \phi_2 \\ \Rightarrow \phi_1 &= \phi_2 := \phi \end{aligned}$$

Aus der Skizze ist zu sehen, dass $\phi = (\pi - \theta)/2$ ist. Damit ergibt sich für den Stoßparameter b :

$$b = R \sin \phi = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Die Ableitung nach θ ist:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Mit $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (1)$$

Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \frac{R^2}{4} \cdot 4\pi = \pi R^2 \quad (2)$$

Dies entspricht der Querschnittsfläche der Kugel.

Aufgabe 4: Luminosität

Die Luminosität eines Speicherrings ist gegeben durch die Anzahlen der Teilchen pro Paket N_1 und N_2 , die Fläche A der Wechselwirkungszone sowie die Frequenz ν , mit der die Pakete kollidieren:

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{A} \cdot \nu$$

Hier ist $N_1 = N_2 = 1.1 \cdot 10^{11}$ und $A = \pi r^2$ mit $r = 33 \mu\text{m}$. Die Frequenz ergibt sich aus dem Umfang $U = 26.7 \text{ km}$, der Anzahl der Pakete $n = 2808$ und der Geschwindigkeit der Protonen $v \approx c$:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{U} = \frac{nc}{U}$$

Damit erhält man eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = 1.1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Bei dieser Luminosität erwartet man innerhalb einer Zeit von $\Delta t = 1 \text{ d}$ bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 30 \text{ pb}$ die folgende Anzahl N von Ereignissen:

$$N = \frac{dN}{dt} \cdot \Delta t = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta t = 2.9 \cdot 10^4$$