

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 3

Musterlösungen

Aufgabe 1: Rutherford-Streuung

a) Folgende Werte sind gegeben:

kinetische Energie: $E_{kin} = 27 \text{ MeV}$

Stromstärke: $I_0 = 2 \text{ nA}$

Ladung der α -Teilchen: $q = 2e$

Massenbelegung: $dM/dA = 2 \text{ mg/cm}^2$

Masse eines Goldkerns: $m_{Au} = 197 \text{ u}$ ($A = 197, u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

Streuwinkel: $\theta = 60^\circ$

Abstand des Zählers: $r = 20 \text{ cm}$

Aktive Fläche: $A = 4 \text{ cm}^2$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α -Teilchen an Goldatomen ist durch die Rutherford-Streuformel gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E^2 \sin^4 \theta/2}$$

Die Anzahl der Goldatome pro Fläche ist gegeben durch:

$$\frac{dN_{Au}}{dA} = \frac{1}{m_{Au}} \frac{dM}{dA}$$

Der vom Zähler abgedeckte Raumwinkel $\Delta\Omega$ ist:

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Aus dem im Zähler registrierten Strom I

$$I = I_0 \cdot \frac{dN_{Au}}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

ergibt sich folgende Rate:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} = \frac{I_0}{2em_{Au}} \cdot \frac{dM}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{A}{r^2} = 271 \text{ Hz}$$

b) Es gilt:

$$r_{min}(\theta) = \frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right] = R(\alpha) + R(\text{Au}) = r_0 \cdot (A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3})$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{\frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right]}{A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3}} = 1.7 \text{ fm}$$

$$\Rightarrow R(\text{Au}) = r_0 \cdot A_{\text{Au}}^{1/3} = 9.9 \text{ fm}$$

Aufgabe 2: Weizsäcker-Massenformel

a) Die Weizsäcker-Massenformel lautet (unter Vernachlässigung der Paarungsenergie):

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{4A}$$

Das Minimum von $M(A, Z)$ bestimmt die Ladungszahl des stabilsten Isobars. Im Minimum gilt:

$$0 = \frac{\partial M}{\partial Z} = -m_n + m_p + m_e + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - a_a \frac{A - 2Z}{A}$$

$$= -m_n + m_p + m_e - a_a + (2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1})Z$$

$$\Rightarrow Z = \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1}}$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{a_a + a_c A^{2/3}}$$

Mit $a_a = 93.15 \text{ MeV}$ und $a_c = 0.714 \text{ MeV}$ [Povh] ergibt sich daraus:

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{93.94 \text{ MeV}}{93.15 \text{ MeV} + 0.714 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}}$$

$$= \frac{A}{1.98 + 0.0152 \cdot A^{2/3}} \quad (1)$$

b) Bei der symmetrischen Spaltung von ${}_{92}^{238}\text{U}$ entstehen zwei Tochterkerne mit $A = 119$ und $Z = 46$ (${}_{46}^{119}\text{Pd}$). Die frei werdende kinetische Energie ist also:

$$E_{kin} = M(A = 238, Z = 92) - 2 \cdot M(A = 119, Z = 46)$$

Da die Massen-, Volumen- und Asymmetrieterme für Mutter- und Tochterkerne gleich sind, ergibt sich E_{kin} aus der Differenz von Oberflächen-, Coulomb- und Paarungsenergie ($E_p = \delta/\sqrt{A}$, $\delta = -11.2 \text{ MeV}$ für ${}_{92}^{238}\text{U}$ (gg-Kern), $\delta = 0$ für ${}_{46}^{119}\text{Pd}$ (ug-Kern)):

$$E_{kin} = a_s(238^{2/3} - 2 \cdot 119^{2/3}) + a_c(92^2 \cdot 238^{-1/3} - 2 \cdot 46^2 \cdot 119^{-1/3})$$

$$+ (-11.2 \text{ MeV} \cdot 238^{-1/2} - 2 \cdot 0 \cdot 119^{-1/2})$$

$$= -172.0 \text{ MeV} + 360.9 \text{ MeV} - 0.7 \text{ MeV}$$

$$= 188.1 \text{ MeV}$$

(Bei Vernachlässigung der Paarungsenergie ist $E_{kin} = 188.8 \text{ MeV}$.)

- c) Aus Gleichung 1 erhält man $Z = 50.69$ als Position des Minimums. Demnach erfolgen insgesamt 5 β^- -Zerfälle von ${}_{46}^{119}\text{Pd}$ bis ${}_{51}^{119}\text{Sb}$ ($\Delta Z = 5$). Da die Masse der beim β^- -Zerfall erzeugten Elektronen bereits in der Weizsäcker-Massenformel berücksichtigt ist, ergibt sich für die insgesamt freigesetzte kinetische Energie:

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= M(A = 119, Z = 46) - M(A = 119, Z = 51) \\
 &= \Delta Z \cdot (m_n - m_p - m_e) + a_c A^{-1/3} (46^2 - 51^2) \\
 &\quad + a_a A^{-1} [(46 - A/2)^2 - (51 - A/2)^2] \\
 &= 3.9 \text{ MeV} - 70.4 \text{ MeV} + 86.1 \text{ MeV} \\
 &= 19.6 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0, und da die Volumen- und die Oberflächenenergie sich beim β -Zerfall nicht ändern, tragen nur die Massenterme, der Coulombterm und der Asymmetrieterm zur kinetischen Energie bei.

Bemerkung: In Wirklichkeit endet die β -Zerfallskette nicht bei ${}_{51}^{119}\text{Sb}$, sondern schon beim stabilen Isotop ${}_{50}^{119}\text{Sn}$. Für diese Kette ergibt sich eine kinetische Energie von $E_{kin} = 19.4 \text{ MeV}$.

Aufgabe 3: Spiegelkerne

Volumen-, Oberflächen- und Asymmetrieterm sind für ${}_{14}^{27}\text{Si}$ und ${}_{13}^{27}\text{Al}$ gleich. Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0. Es tragen also nur die Massenterme der Nukleonen und des erzeugten Positrons sowie die Differenz der Coulombenergien $\Delta E_c = E_c(\text{Si}) - E_c(\text{Al})$ zur Zerfallsenergie $E_{kin} = 3.80 \text{ MeV}$ bei:

$$E_{kin} = m_p - m_n - m_e + E_c(\text{Si}) - E_c(\text{Al})$$

(Da hier Kerne und nicht Atome betrachtet werden, tritt der Massenterm für die Hüllenelektronen aus der Weizsäcker-Massenformel nicht auf.) Mit der in der Aufgabe angegebenen Formel für E_c folgt:

$$\begin{aligned}
 E_{kin} &= m_p - m_n - m_e + \frac{3}{5} \cdot \frac{(Z_{Si}^2 - Z_{Al}^2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \\
 \Rightarrow R &= \frac{\frac{3}{5} \cdot (Z_{Si}^2 - Z_{Al}^2)\alpha\hbar c}{E_{kin} - m_p + m_n + m_e} = 4.2 \text{ fm}
 \end{aligned}$$

Damit erhält man als Radiusparameter:

$$r_0 = \frac{R}{A^{1/3}} = 1.4 \text{ fm}$$

Aufgabe 4: ^{14}C -Methode

- a) Die Aktivität A zum Zeitpunkt t ist bei einer Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ gegeben durch:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

Dabei ist N die Anzahl der ^{14}C -Atome und $N_0 = N(t=0)$, $A_0 = A(t=0)$. Auflösen nach t ergibt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)} \\ &= \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{2 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g}}{0.404 \text{ Bq}} = 1926 \text{ a} \end{aligned} \quad (2)$$

- b) Die Anzahl der ^{14}C -Atome zum Zeitpunkt t ist:

$$\begin{aligned} N(t) &= A(t)/\lambda = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot A(t) \\ \Rightarrow N_0 &= \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot 2 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g} = \frac{5730 \cdot 3.156 \cdot 10^7 \text{ s}}{\ln 2} \cdot 0.510 \text{ s}^{-1} = 1.33 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die Anzahl zum Zeitpunkt der Messung $N = 1.05 \cdot 10^{11}$.

- c) Während der Messdauer Δt werden $\Delta N = A\Delta t$ Ereignisse registriert (Näherung: $\Delta t \ll T_{1/2} \Rightarrow A$ konstant). Der statistische Fehler der gemessenen Aktivität σ_A ist demnach:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta N}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta N}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{A}{\Delta t}}$$

Für den relativen statistische Fehler des gemessenen Alters σ_t/t folgt unter Verwendung von Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{t} &= \left| \frac{\partial t}{\partial A} \right| \frac{\sigma_A}{t} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\sigma_A}{t} = \frac{\sigma_A}{A \ln \frac{A_0}{A}} = \frac{1}{\sqrt{A \Delta t} \ln \frac{A_0}{A}} \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 A \left(\ln \frac{A_0}{A}\right)^2} = 4.56 \cdot 10^5 \text{ s} = 5.28 \text{ d} \end{aligned}$$