Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

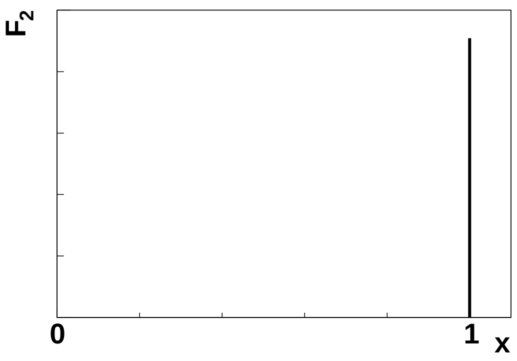
Übungsblatt Nr. 6

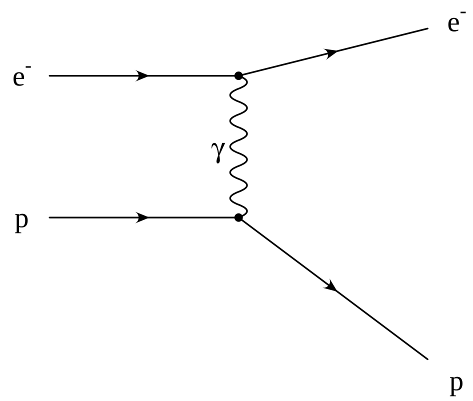
Musterlösungen

Aufgabe 1: Strukturfunktion

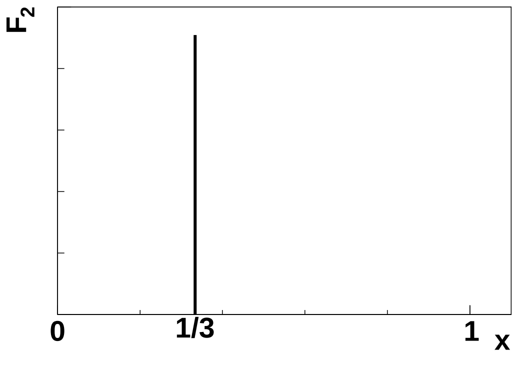
Die Strukturfunktion $F_2(x)$ ist durch die Impulsdichteverteilung der Partonen, an denen gestreut wird, bestimmt.

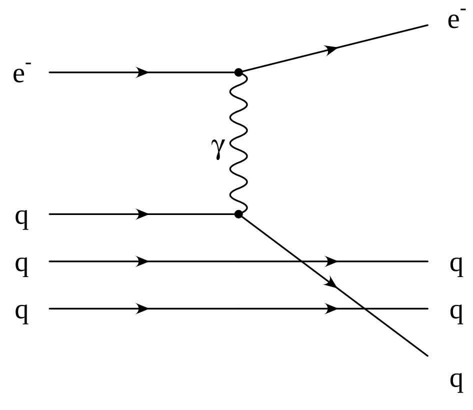
a) Wenn das Proton ein elementares Teilchen ist, hat es keine Struktur und das an der Reaktion teilnehmende "Parton" trägt den gesamten Impuls des Protons, d.h. F_2 ist eine Deltafunktion bei $x = 1$.



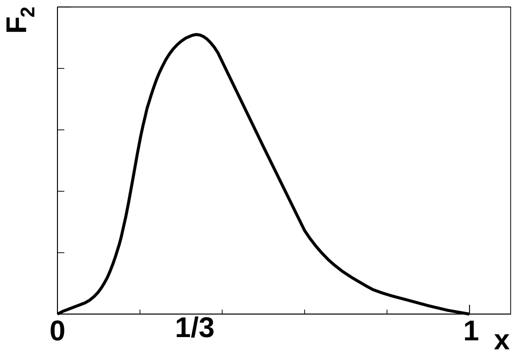


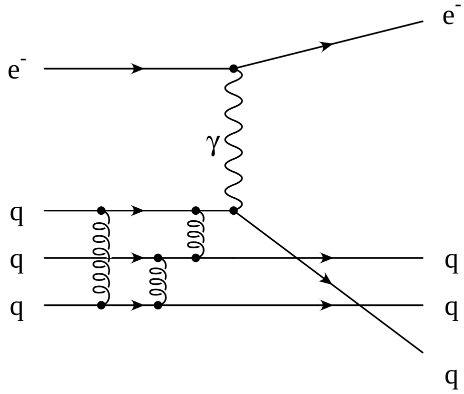
b) Bei drei nicht wechselwirkenden Partonen trägt jedes davon jeweils ein Drittel des Protonimpulses.



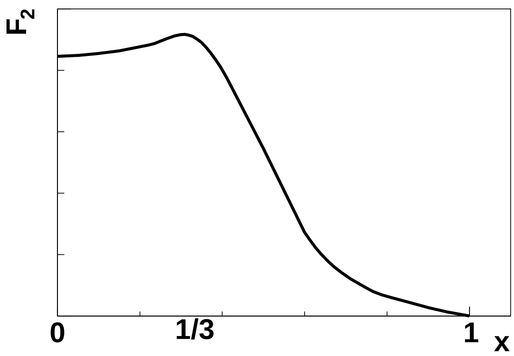


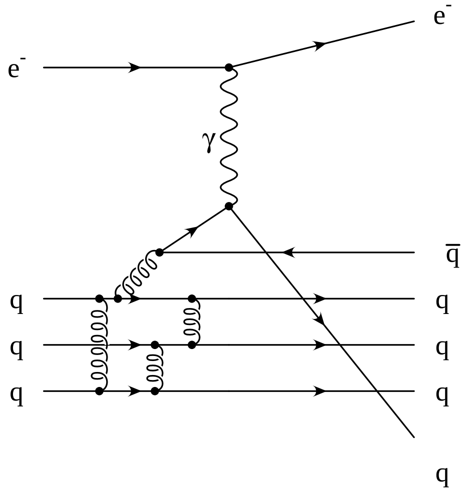
c) Durch die Wechselwirkung unter den Partonen wird die Impulsverteilung um $x = 1/3$ herum verschmiert.





d) Dadurch, dass die Seequarks hinzukommen, die in der Regel einen kleinen Impulsanteil haben, gibt es einen zusätzlichen Beitrag zu F_2 bei kleinen x.





Aufgabe 2: Breit-Wigner-Resonanz

In der Nähe der Resonanz ($W \approx m$) ist $W + m \approx 2m$ und $W^2 \approx m^2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(e^+e^- \to VM \to f) &= \frac{\pi(2J+1)}{W^2} \cdot \frac{4m^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(W^2-m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{W^2[(W+m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
&\approx \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(2m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(W-m)^2 + \Gamma^2/4]}
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel ergibt sich für Σ_f:

$$\begin{aligned}
\Sigma_f &= \int \sigma(e^+e^- \to VM \to f)\, dW \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \int \frac{1}{(W-m)^2 + \Gamma^2/4}\, dW \qquad \text{Subst: } x = (W-m)\cdot 2/\Gamma \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \frac{2}{\Gamma} \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\
&= \frac{2\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2\Gamma} \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_f}{\Gamma}
\end{aligned}$$

Für Σ_{tot} folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{tot} &= \Sigma_{had} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{\mu\mu} \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot \left[\Gamma_{had} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu}\right] \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \Gamma_{ee}
\end{aligned}$$

Da das J/ψ-Teilchen den Spin $J = 1$ hat ergibt sich daraus für die partielle Zerfallsbreite in Elektronen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{tot} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \Gamma_{ee} \\
\Rightarrow \quad \Gamma_{ee} &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \Sigma_{tot}
\end{aligned}$$

Die totale Breite ergibt sich aus:

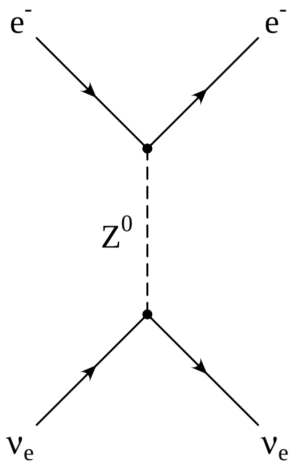
$$\begin{aligned}
\Sigma_{ee} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Gamma} \\
\Rightarrow \quad \Gamma &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Sigma_{ee}} = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}^2}{\Sigma_{ee}}
\end{aligned}$$

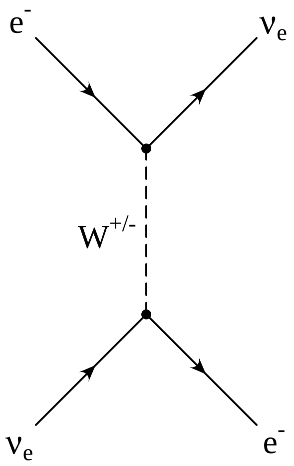
Für die partielle Zerfallsbreite Γ_f erhält man:

$$\begin{aligned}
\Sigma_f &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot \Gamma_f \\
\Rightarrow \quad \Gamma_f &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma_{ee}} \cdot \Sigma_f = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}}{\Sigma_{ee}} \cdot \Sigma_f
\end{aligned}$$

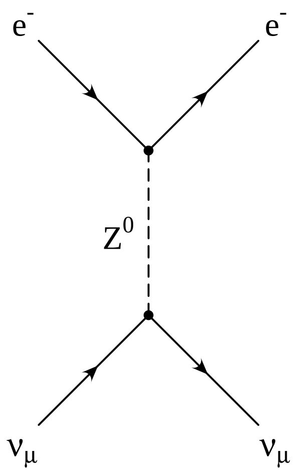
Aufgabe 3: Neutrino-Streuprozesse

a) $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$





b) $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$



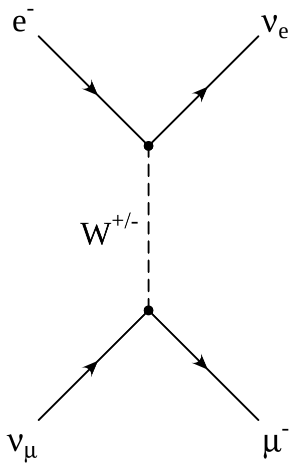
c) $\bar{\nu}_e + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 1$ und $L_\mu = -1$.

d) $\nu_e + e^- \to \nu_\mu + \mu^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = 2$ und $L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 0$ und $L_\mu = 2$.

e) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$



Aufgabe 4: Kaon-Zerfall und Goldene Regel

Im Ruhesystem des Kaons ist aufgrund der Impulserhaltung $|p_l| = |p_\nu| =: p$. Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\begin{aligned} & E_0 := m_K = E_\nu + E_l = p + \sqrt{p^2 + m_l^2} \\ \Rightarrow \quad & (m_K - p)^2 = m_K^2 - 2m_K p + p^2 = p^2 + m_l^2 \\ \Rightarrow \quad & p = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich für die Energie des Leptons:

$$\begin{aligned} E_l &= \sqrt{p^2 + m_l^2} \\ &= \frac{1}{2m_K}\sqrt{m_K^4 - 2m_K^2 m_l^2 + m_l^4 + 4m_K^2 m_l^2} \\ &= \frac{1}{2m_K}\sqrt{(m_K^2 + m_l^2)^2} \\ &= \frac{m_K^2 + m_l^2}{2m_K} \end{aligned}$$

Aus Imupls und Energie lässt sich die Geschwindigkeit berechnen:

$$\beta_l = \frac{v_l}{c} = \frac{p}{E_l} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \cdot \frac{2m_K}{m_K^2 + m_l^2} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{m_K^2 + m_l^2}$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Matrixelementsquadrate:

$$\frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} = \frac{1-\beta_e}{1-\beta_\mu} = \frac{(m_K^2 + m_e^2 - m_K^2 + m_e^2)/(m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 + m_\mu^2 - m_K^2 + m_\mu^2)/(m_K^2 + m_\mu^2)} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\frac{m_K^2 + m_\mu^2}{m_K^2 + m_e^2} = 2.45 \cdot 10^{-5}$$

Die Zustandsdichte ist proportional zu $p^2\, dp/dE_0$ mit $E_0 = E_\nu + E_l = m_K$. Aus Gleichung 1 ergibt sich:

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{d}{dE_0}\frac{E_0^2 - m_l^2}{2E_0} = \frac{d}{dE_0}\frac{1}{2}\left(E_0 - \frac{m_l^2}{E_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_l^2}{E_0^2}\right)$$

Mit $E_0 = m_K$ folgt:

$$p^2\,\frac{dp}{dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2}{4m_K^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_l^2}{m_K^2}\right) = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_l^2)}{8m_K^4}$$

Das Verhältnis der Zustandsdichten ist also:

$$\frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = \frac{p_e^2\, dp_e/dE_0}{p_\mu^2\, dp_\mu/dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 - m_\mu^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_\mu^2)} = 1.05$$

Damit erhält man für das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten:

$$\frac{\Gamma(K^+ \to e^+\nu_e)}{\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)} = \frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} \cdot \frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = 2.57 \cdot 10^{-5}$$

Da das Verzweigungsverhältnis proportional zur partiellen Zerfallsbreite ist, ist dieser Wert zu vergleichen mit

$$\frac{\mathcal{B}(K^+ \to e^+\nu_e)}{\mathcal{B}(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)} = \frac{1.55 \cdot 10^{-5}}{0.6343} = 2.44 \cdot 10^{-5}.$$

Die Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert ist also recht gut.