Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 8 — Musterlösungen

Aufgabe 1: Eigenparität des Ξ

Weil die beiden Λ-Teilchen zwei identische Fermionen sind, müssen Sie eine Wellenfunktion haben, die antisymmetrisch unter Austausch der Teilchen ist. Da die Spins der Λ-Teilchen antiparallel sind, ist der Gesamtspin $S_{\Lambda\Lambda} = 0$ und die Spinwellenfunktion antisymmetrisch. Die Ortswellenfunktion muss also symmetrisch sein, um eine antisymmetrische Gesamtwellenfunktion zu erhalten. Da die Paritätsoperation gerade dem Austausch der Teilchen in der Ortswellenfunktion entspricht, ist die Symmetrie durch die Parität

$$P_{\Lambda\Lambda} = P_\Lambda \cdot P_\Lambda \cdot (-1)^{L_{\Lambda\Lambda}} = (-1)^{L_{\Lambda\Lambda}}$$

gegeben, wobei $L_{\Lambda\Lambda}$ der Bahndrehimpuls des $\Lambda\Lambda$-Systems ist. Eine symmetrische Ortswellenfunktion und damit eine positive Parität erfordert also einen geraden Bahndrehimpuls.

Da es sich um eine Reaktion der starken Wechselwirkung handelt, bei der die Parität erhalten bleibt, muss gelten:

$$+1 = P_{\Lambda\Lambda} = P_{\Xi^- p} = P_{\Xi^-} \cdot P_p \cdot (-1)^{L_{\Xi^- p}}$$

Mit $P_p = +1$ und $L_{\Xi^- p} = 0$ (S-Zustand) folgt:

$$P_{\Xi^-} = +1$$

Für den Gesamtdrehimpuls gilt:

$$\begin{aligned} & J_{\Lambda\Lambda} = L_{\Lambda\Lambda} \oplus S_{\Lambda\Lambda} = L_{\Lambda\Lambda} \\ = \quad & J_{\Xi^- p} = L_{\Xi^- p} \oplus S_{\Xi^- p} = S_{\Xi^- p} \end{aligned}$$

Da Ξ^- und p Spin 1/2 haben, können sie entweder zum Gesamtspin 0 oder 1 koppeln. Weil $L_{\Lambda\Lambda}$ jedoch gerade ist, bleibt nur die Möglichkeit $S_{\Xi^- p} = 0$, d.h. die Spins von Ξ^- und p sind antiparallel.

Aufgabe 2: Isospin

a) In der Schreibweise $|I, I_3\rangle$ hat das Proton den Isospin $\left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle$ und das Neutron $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$. Da I_3 eine additive Quantenzahl ist, ist $I_3 = 1$ für $p+p$. $I_3 = 1$ ist nur möglich, wenn die beiden halbzahligen Isospins zu einem Gesamtisospin von $I = 1$ koppeln. Eine analoge Überlegung gilt für $n+n$. Im Fall $p+n$ ist $I_3 = 0$. Hier gibt es zwei Möglichkeiten für den Gesamtisospin: $I = 0$ oder $I = 1$. Man erhält also folgende Isospinzustände:

$$\begin{aligned} p+p &: \ |1,1\rangle \\ p+n &: \ |1,0\rangle \ \text{ oder } \ |0,0\rangle \\ n+n &: \ |1,-1\rangle \end{aligned}$$

$p+n$ ist also entweder ein Triplett- oder ein Singulett-Zustand. Wenn das Deuteron ein Triplett-Zustand wäre, müßte es auch die beiden anderen Triplett-Zustände, also gebundene pp und nn Systeme geben. Weil dies nicht der Fall ist, muss das Deuteron ein Singulett-Zustand mit $I = I_3 = 0$ sein.

b) Da das Deuteron den Isospin $|0,0\rangle$ hat, entspricht der Isospin des Deuteron-Pion-Systems gerade dem des Pions:

$$\begin{aligned} d+\pi^+ &: \ |1,1\rangle \\ d+\pi^0 &: \ |1,0\rangle \\ d+\pi^- &: \ |1,-1\rangle \end{aligned}$$

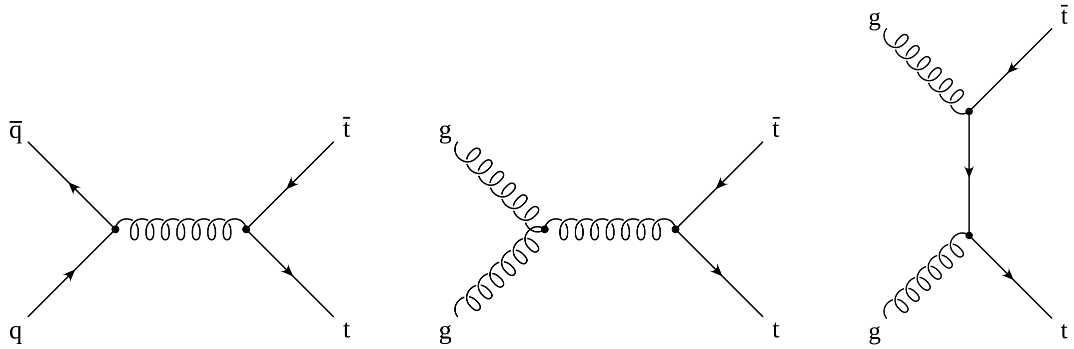
In den Reaktionen $pp \to d\pi^+$ und $nn \to d\pi^-$ sind die Isospins in Anfangs- und Endzustand gleich. Bei der Reaktion $pn \to d\pi^0$ entspricht jedoch nur einer der beiden möglichen Isospins im Anfangszustand dem im Endzustand. Da der Isospin in der starken Wechselwirkung erhalten ist, trägt nur die Komponente von pn mit $I = 1$ zum Wirkungsquerschnitt bei. Es ergibt sich also folgendes Verhältnis:

$$\sigma(pp \to d\pi^+) \, : \, \sigma(pn \to d\pi^0) \, : \, \sigma(nn \to d\pi^-) \quad = \quad 2 : 1 : 2$$

Dabei wird angenommen, dass pn sich zu gleichen Teilen aus $|1,0\rangle$ und $|0,0\rangle$ zusammensetzt. Dies kann mit den Regeln zur Addition von Drehimpulsen bzw. mit den sich daraus ergebenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten gezeigt werden.

<u>Aufgabe 3</u>: Top-Quark-Produktion am Tevatron

a) $t\bar{t}$-Paare werden durch die Annihilation von Quark-Antiquark-Paaren oder durch die Fusion von Gluonen erzeugt:



b) Da x den Impulsanteil des Partons angibt, gilt für das Quadrat der Schwerpunktsenergie in Parton-Parton-System $\hat{s}$ bei $x = x_p = x_{\bar{p}}$:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (\mathbf{p}_{p-parton} + \mathbf{p}_{\bar{p}-parton})^2 = (x_p \cdot \mathbf{p}_p + x_{\bar{p}} \cdot \mathbf{p}_{\bar{p}})^2 = x^2 \cdot (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{p}})^2 \\ &= x^2 \cdot s \\ \Rightarrow \quad \sqrt{\hat{s}} &= x \cdot \sqrt{s} \end{aligned}$$

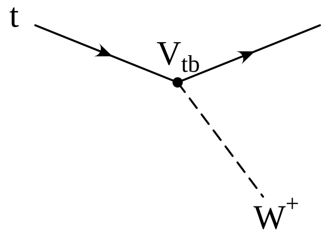
Um $t\bar{t}$-Paare erzeugen zu können, muss $\sqrt{\hat{s}}$ mindestens der doppelten Top-Quark-Masse entsprechen:

$$2m_t = \sqrt{\hat{s}_{min}} = x_{min} \cdot \sqrt{s} \quad \Rightarrow \quad x_{min} = \frac{2m_t}{\sqrt{s}} = 0.18$$

Für $x > 0.18$ ist die Impulsdichte von u-Quarks größer als die von Gluonen. Deshalb dominiert am Tevatron die $t\bar{t}$-Produktion durch die Annihilation von Quark-Antiquark-Paaren gegenüber der Fusion von Gluonen.

Durch die deutlich höhere Schwerpunktsenergie am LHC-Beschleuniger können dort $t\bar{t}$-Paare bei kleineren x-Werten produziert werden. Für kleine x ist die Gluondichte wesentlich größer als die Quarkdichte. Außerdem ist die Quark-Antiquark-Annihilation nur noch über See-Quarks möglich, da hier zwei Protonen kollidieren und nicht Proton und Antiproton wie am Tevatron.

c) Da nur die schwache Wechselwirkung die Quark-Flavour ändern kann, zerfällt das Top-Quark schwach. Dabei entsteht ein reelles W-Boson und ein leichteres Quark. Dieses Quark ist praktisch immer ein b-Quark, da $|V_{tb}| \approx 1$ ist.



Die für einen schwachen Zerfall extrem kurze Lebensdauer resultiert einerseits aus der großen Masse des Top-Quarks, durch die der Phasenraumfaktor sehr groß wird. Andererseits ist der Zerfall nicht durch ein CKM-Matrixelement unterdrückt.

Dies ist anders beim Zerfall eines b-Quarks (bzw. b-Hadrons). Die Umwandlung eines b-Quarks in ein c-Quarks ist durch das betragsmäßig kleine CKM-Matrixelement V_{cb} unterdrückt. Das Matrixelement V_{cs}, das beim Zerfall eines c-Quarks in ein s-Quarks berücksichtigt werden muss, hingegen ist wieder ein Diagonalelement der CKM-Matrix wie V_{tb} und hat damit etwa den Betrag eins. Da man beim Zerfall eines b-Quarks also einen unterdrückten Übergang zwischen zwei Quark-Generationen hat, ist die Lebensdauer von b-Quarks größer als bei c-Quarks, obwohl der Phasenraumfaktor beim c-Quark-Zerfall aufgrund der geringeren Masse viel kleiner ist.

d) Das b-Quark aus dem Top-Zerfall fragmentiert und bildet einen Jet aus Hadronen, der dann b-Jet genannt wird. b-Jets können unter anderem anhand der langen Lebensdauer von Hadronen mit b-Quarks identifiziert werden (Silizium-Vertex-Detektor). Das W-Boson kann entweder leptonisch oder hadronisch zerfallen. Im ersten Fall hat man im Endzustand ein Neutrino, das nicht direkt nachgewiesen wird, und ein Lepton, das in der Regel gut im Detektor gemessen und identifiziert werden kann (zumindest wenn das Lepton ein Elektron oder Myon ist). Beim hadronischen W-Zerfall in ein Quark-Antiquark-Paar bildet jedes der beiden Quarks einen Jet aus Hadronen. $t\bar{t}$-Ereignisse haben also folgende möglichen Signaturen:

   (a) Semileptonischer Zerfall beider Top-Quarks:
   2 b-Jets, 2 Leptonen, 2 nicht detektierte Neutrinos

   (b) Semileptonischer und hadronischer Zerfall:
   4 Jets davon 2 b-Jets, 1 Leptonen, 1 nicht detektiertes Neutrino

   (c) Hadronischer Zerfall beider Top-Quarks:
   6 Jets davon 2 b-Jets

   Generell hat man das Problem der Zuordnung von Jets zu t- oder $\bar{t}$-Quark. Dieses Problem verstärkt sich mit der Anzahl der Jets. Außerdem kann die Zuordnung von Teilchen zu Jets nicht immer eindeutig vorgenommen werden. Bei Leptonischen Zerfällen hat man hingegen das Problem, dass der Impuls des Neutrinos nicht direkt gemessen wird. Wenn das andere Top-Quark hadronisch zerfällt kann der Neutrinoimpuls jedoch aus den Impulsen der anderen Teilchen rekonstruiert werden (s. nächster Aufgabenteil). Dies ist nicht möglich, wenn beide Top-Quarks leptonisch zerfallen. Ein weiterer Nachteil des leptonischen Zerfalls ist das gegenüber dem hadronischen Zerfall kleine Verzweigungsverhältnis von etwa 10 % pro Leptonfamilie.

e) Da die Impulskomponente senkrecht zur $p\bar{p}$-Achse im Anfangszustand Null ist, müssen sich aufgrund der Impulserhaltung auch die transversalen Impulskomponenten aller Teilchen im Endzustand zu Null addieren. Daraus ergibt sich der transversale Neutrinoimpuls:

$$\vec{p}_{T,\nu} = -\sum_i \vec{p}_{T,i}$$

Dabei läuft der Index i über alle Teilchen im Endzustand (außer dem Neutrino).

Die longitudinale Impulskomponente des Neutrinos $p_{z,\nu}$ ergibt sich aus der Bedingung, dass die Summe aus Lepton- und Neutrino-Impuls gleich dem Impuls des W-Bosons sein muss:

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu = \mathbf{p}_W \\ \Rightarrow \quad & (\mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu)^2 = \mathbf{p}_l^2 + 2\mathbf{p}_l\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_\nu^2 = \mathbf{p}_W^2 \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{p}_W^2 = m_W^2$, $\mathbf{p}_l^2 = m_l^2 \approx 0$ und $\mathbf{p}_\nu^2 = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{m_w^2}{2} = \mathbf{p}_l\mathbf{p}_\nu = E_l E_\nu - \vec{p}_l\,\vec{p}_\nu = E_l\sqrt{\vec{p}_{T,\nu}^{\,2} + p_{z,\nu}^2} - \vec{p}_{T,l}\,\vec{p}_{T,\nu} - p_{z,l}\,p_{z,\nu} \\ \Rightarrow \quad & E_l\sqrt{\vec{p}_{T,\nu}^{\,2} + p_{z,\nu}^2} = \underbrace{\frac{m_w^2}{2} + \vec{p}_{T,l}\,\vec{p}_{T,\nu}}_{\mu} + p_{z,l}\,p_{z,\nu} \\ \Rightarrow \quad & E_l^2(\vec{p}_{T,\nu}^{\,2} + p_{z,\nu}^2) = \mu^2 + 2\mu\,p_{z,l}\,p_{z,\nu} + p_{z,l}^2\,p_{z,\nu}^2 \\ \Rightarrow \quad & (E_l^2 - p_{z,l}^2)p_{z,\nu}^2 - 2\mu\,p_{z,l}\,p_{z,\nu} + E_l^2\vec{p}_{T,\nu}^{\,2} - \mu^2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & p_{z,\nu} = \frac{\mu\,p_{z,l}}{E_l^2 - p_{z,l}^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\,p_{z,l}^2}{(E_l^2 - p_{z,l}^2)^2} - \frac{E_l^2\vec{p}_{T,\nu}^{\,2} - \mu^2}{E_l^2 - p_{z,l}^2}} \end{aligned}$$