

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 9

Musterlösungen

Aufgabe 1: K^0 -Erzeugung

- a) Im Anfangszustand ist die Baryonenzahl $B = 1$ und die Strangeness $S = 0$. Da beide Größen in der starken Wechselwirkung erhalten bleiben und das K^0 -Meson $B = 0$ und $S = +1$ hat, muss mindestens noch ein weiteres Teilchen mit $B = 1$ und $S = -1$ erzeugt werden. Dies ist durch folgende Reaktion erfüllt:



Wie in Aufgabe 7.3 ergibt sich aus dem Ansatz

$$s = (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2$$

mit $\sqrt{s} = m_\Lambda + m_{K^0}$ der minimale Pion-Impuls:

$$p_\pi = \sqrt{\frac{(s - m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4m_p^2} - m_\pi^2} = 899 \text{ MeV}$$

- b) Das \bar{K}^0 -Meson hat $B = 0$ und $S = -1$. Da Baryonen keine Antiquarks und somit auch keine \bar{s} -Quarks mit $S = +1$ enthalten, gibt es kein Teilchen mit $B = 1$ und $S = +1$. Um \bar{K}^0 -Mesonen zu erzeugen, müssen also neben dem \bar{K}^0 mindestens zwei weitere Teilchen erzeugt werden, damit Baryonenzahl und Strangeness erhalten sind. Folgende Reaktion erfüllt die Erhaltungssätze:



Analog zu Teil a) ergibt sich mit $\sqrt{s} = m_n + 2m_{K^0}$ als minimaler Impuls des Pions:

$$p_\pi = 1509 \text{ MeV}$$

Aufgabe 2: K^0 -Oszillation

- a) Für die Wellenfunktion von K^0 - und \bar{K}^0 -Mesonen folgt mit dem Ansatz aus der Aufgabenstellung und den Beziehungen $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$ und $|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} + A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2})$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0\rangle - |K_L^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} - A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2})$$

Daraus ergibt sich als Anzahl von K^0 - bzw. \bar{K}^0 -Mesonen:

$$\begin{aligned}
N_{K^0}(t) &= \langle K^0 | K^0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
&\quad \left. + A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
&\quad \left. + [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
N_{\bar{K}^0}(t) &= \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
&\quad \left. - [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right)
\end{aligned}$$

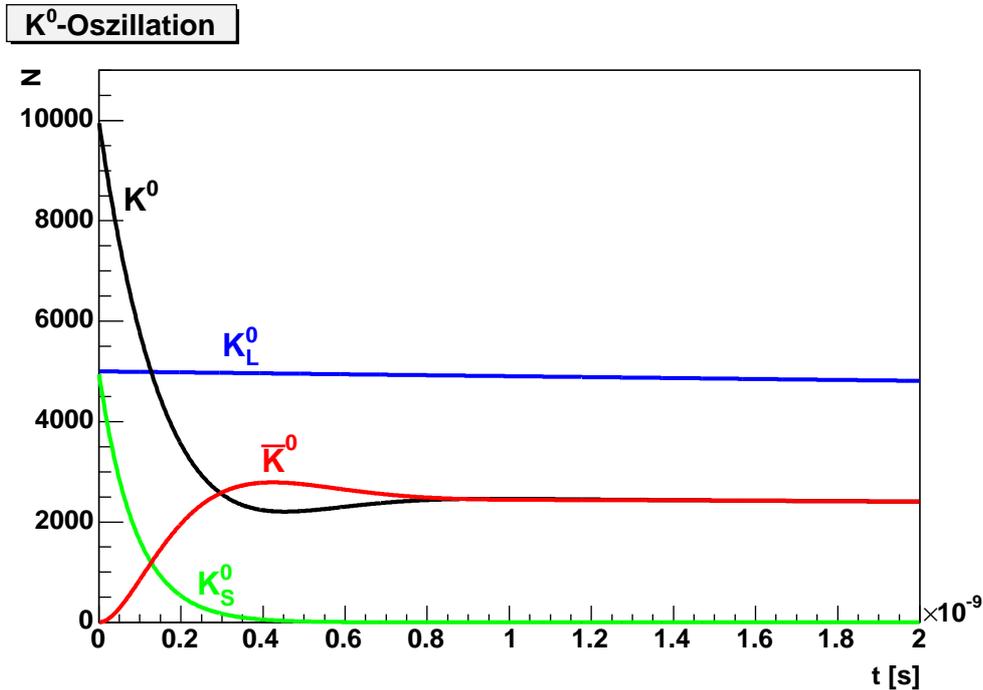
Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $N_{K^0} = N_0$ und $N_{\bar{K}^0} = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= N_{\bar{K}^0}(t=0) = \frac{1}{2} (A_S^* A_S + A_L^* A_L - [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\
&= \frac{1}{2} (A_S - A_L)^* \cdot (A_S - A_L) = \frac{1}{2} |A_S - A_L|^2 \\
&\Rightarrow A_L = A_S \\
N_0 &= N_{K^0}(t=0) = \frac{1}{2} (A_S^* A_S + A_L^* A_L + [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\
&= \frac{1}{2} (A_S + A_L)^* \cdot (A_S + A_L) = \frac{1}{2} |A_S + A_L|^2 = \frac{1}{2} |2A_S|^2 \\
&\Rightarrow A_S = A_L = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \cdot e^{i\phi}
\end{aligned}$$

Die Phase ϕ kann willkürlich gewählt werden. Als Anzahl der verschiedenen neutralen Kaonen erhält man:

$$\begin{aligned}
N_{K_S^0}(t) &= \langle K_S^0 | K_S^0 \rangle = A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} \\
&= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\
N_{K_L^0}(t) &= \langle K_L^0 | K_L^0 \rangle = A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
&= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\
N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
&= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right) \\
N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
&= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right)
\end{aligned}$$

b)



Für die Strecke x , die in einer Zeit von $t = 2 \cdot 10^{-9}$ s zurückgelegt wird, gilt:

$$x = v\gamma t = \beta\gamma ct = \frac{p}{mc} ct = 120.5 \text{ cm}$$

Aufgabe 3: K^0 -Regeneration

Die Strecke $x = 100$ cm entspricht folgender Zeit t :

$$t = \frac{mcx}{pc} = 1.66 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Mit den Formeln aus Aufgabe 2 erhält man:

$$\begin{aligned} N_{K_S^0} &= 4 \cdot 10^{-5} \\ N_{K_L^0} &= 4842.9 \\ N_{K^0} &= 2421.1 \\ N_{\bar{K}^0} &= 2421.8 \end{aligned}$$

D.h. praktisch alle K_S^0 sind zerfallen und man kann folgende Näherung machen:

$$N_{K_S^0} = 0 \quad , \quad N_{K^0} = N_{\bar{K}^0} = N_{K_L^0}/2$$

Daraus folgt für die Wellenfunktionen:

$$0 = |K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \Rightarrow \quad |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

Durch die Absorption im Target wird die Intensität des Kaon-Strahls exponentiell abgeschwächt. Bei einer Flächendichte n und einem Wirkungsquerschnitt σ reduziert sich die Intensität um den Faktor $e^{-\sigma n}$. Die Amplitude der Wellenfunktion reduziert sich also um den Faktor $e^{-\sigma n/2}$. Dieser Faktor ist unterschiedlich für K^0 - und \bar{K}^0 -Mesonen:

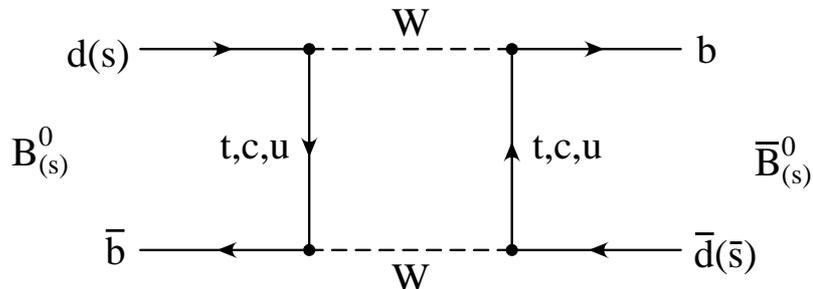
$$\begin{aligned} |K^0\rangle' &= f |K^0\rangle & f &= e^{-\sigma(K^0 N)n/2} = 0.368 \\ |\bar{K}^0\rangle' &= \bar{f} |\bar{K}^0\rangle & \bar{f} &= e^{-\sigma(\bar{K}^0 N)n/2} = 0.082 \end{aligned}$$

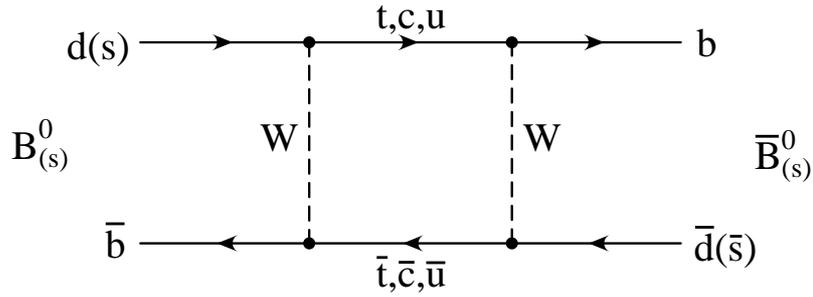
Damit erhält man folgende Anzahlen von Kaonen direkt hinter dem Absorber:

$$\begin{aligned} N'_{K^0} &= \langle K^0 | K^0 \rangle' = f^2 \langle K^0 | K^0 \rangle = f^2 N_{K^0} = f^2 \frac{N_{K_L^0}}{2} = 327.7 \\ N'_{\bar{K}^0} &= \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle' = \bar{f}^2 \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle = \bar{f}^2 N_{\bar{K}^0} = \bar{f}^2 \frac{N_{K_L^0}}{2} = 16.3 \\ N'_{K_S^0} &= \langle K_S^0 | K_S^0 \rangle' \\ &= \frac{1}{2} (f^2 \langle K^0 | K^0 \rangle + \bar{f}^2 \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle - f\bar{f} \langle K^0 | \bar{K}^0 \rangle - f\bar{f} \langle \bar{K}^0 | K^0 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (f^2 + \bar{f}^2 - 2f\bar{f}) \frac{N_{K_L^0}}{2} = (f - \bar{f})^2 \frac{N_{K_L^0}}{4} = 98.9 \\ N'_{K_L^0} &= \langle K_L^0 | K_L^0 \rangle' \\ &= \frac{1}{2} (f^2 \langle K^0 | K^0 \rangle + \bar{f}^2 \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle + f\bar{f} \langle K^0 | \bar{K}^0 \rangle + f\bar{f} \langle \bar{K}^0 | K^0 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (f^2 + \bar{f}^2 + 2f\bar{f}) \frac{N_{K_L^0}}{2} = (f + \bar{f})^2 \frac{N_{K_L^0}}{4} = 245.1 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: B^0 -Oszillation

- a) Analog zur K^0 -Mischung wird die B^0 - und die B_s^0 -Oszillation durch Boxdiagramme beschrieben:





b) Mit $\Gamma = \Gamma_S = \Gamma_L = 1/\tau$ vereinfachen sich die Formeln aus Aufgabe 2 zu:

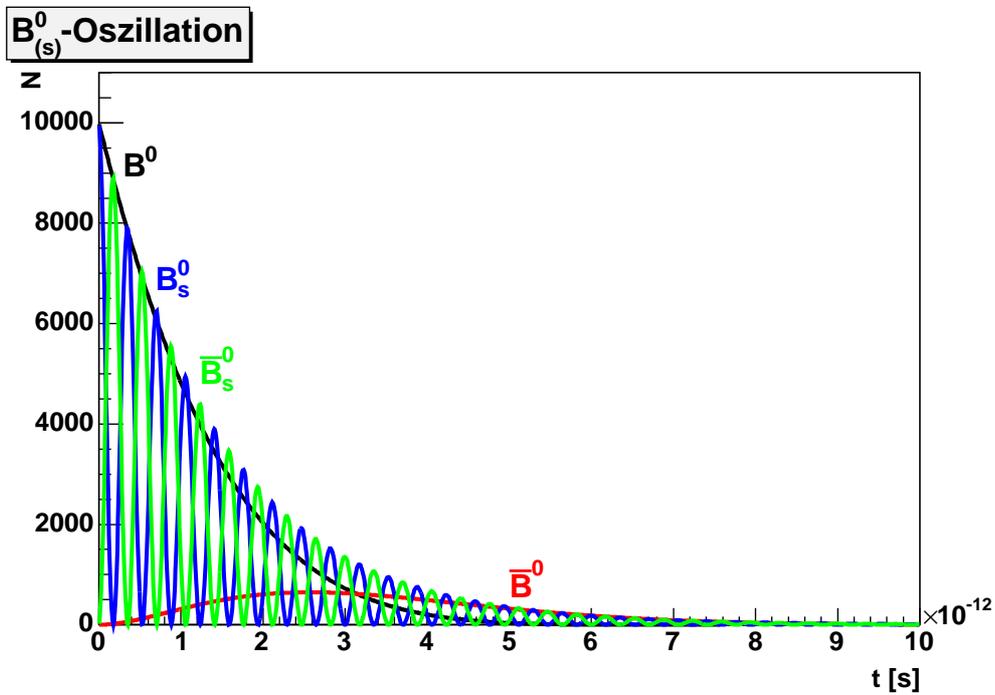
$$N_{B(s)^0}(t) = \frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m(s) t)] e^{-\Gamma t}$$

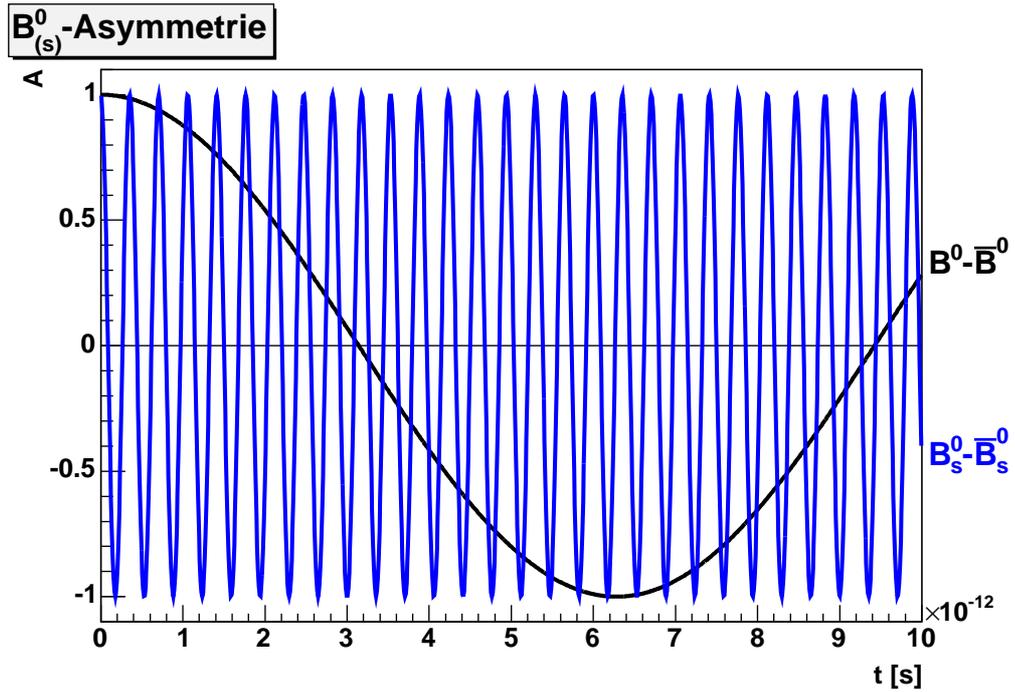
$$N_{\bar{B}(s)^0}(t) = \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m(s) t)] e^{-\Gamma t}$$

Daraus folgt für die Asymmetrie:

$$A(t) = \frac{\frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m(s) t)] - \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m(s) t)]}{\frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m(s) t)] + \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m(s) t)]} e^{-\Gamma t} = \cos(\Delta m(s) t)$$

c) Die B_s^0 -Oszillation hat eine wesentlich höhere Frequenz als die B^0 -Oszillation. Die ist der hauptsächliche Grund, weshalb die Messung der B_s^0 -Oszillation so schwierig ist.





Die Strecke $x_{(s)}$, die bei einem Impuls p einer Periodendauer $T_{(s)}$ entspricht, ist gegeben durch:

$$x_{(s)} = \beta \gamma c T_{(s)} = \frac{p}{m_{(s)} c} c \frac{2\pi}{\omega_{(s)}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt mit $\omega_{(s)} = \Delta m_{(s)}$ eine Strecke von $x = 3.6$ mm für die B^0 -Oszillation und $x_s = 100$ μm für die B_s^0 -Oszillation.