Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2008

Übungsblatt Nr. 10

Musterlösungen

Aufgabe 1: $SU(2)$**-Symmetrie**

a) Die Transformationsmatrizen für die Rotation um die drei Achsen sind:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_1 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
U_2 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_2 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
U_3 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_3 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Angewendet auf einen Isospinor erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,u + i\sin\frac{\theta}{2}\,d \\ i\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,u + \sin\frac{\theta}{2}\,d \\ -\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\,u \\ e^{-i\frac{\theta}{2}}\,d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Durch Ladungskonjugation C erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \\ -i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}}\,\bar{u} \\ e^{i\frac{\theta}{2}}\,\bar{d} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

U angewendet auf den Antiquark-Isospinor ergibt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} + i\sin\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \\ i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \\ -[\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_2 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} + \sin\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \\ -\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d} \\ -[\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_3 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\,\bar{d} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\,\bar{d} \\ -[e^{-i\frac{\theta}{2}}\,\bar{u}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass sich dieselben Gleichungen für $\bar{u}'$ und $\bar{d}'$ wie für die ladungskonjugierten gedrehten Quarkzustände ergeben.

c) Mit den gedrehten Isospionoren aus den beiden vorigen Aufgabenteilen erhält man für das im Isospinraum gedrehte ω-Meson:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot U_1\omega &= U_1[u\bar{u}+d\bar{d}] = U_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bar{U}_1\overline{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + U_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{U}_1\overline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\overline{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} - i\sin\frac{\theta}{2}\overline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right) +\\
&\quad \left(i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\left(-i\sin\frac{\theta}{2}\overline{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + \cos\frac{\theta}{2}\overline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\,u + i\sin\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right) +\\
&\quad \left(i\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(-i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} - i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d} +\\
&\quad \sin^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} - i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d}\\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)u\bar{u} + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega\\
\sqrt{2}\cdot U_2\omega &= U_2[u\bar{u}+d\bar{d}]\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\,u - \sin\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - \sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right) +\\
&\quad \left(\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d} +\\
&\quad \sin^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d}\\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)u\bar{u} + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega\\
\sqrt{2}\cdot U_3\omega &= U_3[u\bar{u}+d\bar{d}]\\
&= e^{i\frac{\theta}{2}}\,u\,e^{-i\frac{\theta}{2}}\,\bar{u} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\,d\,e^{i\frac{\theta}{2}}\,\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega
\end{aligned}
$$

Das ω-Meson ist also invariant unter $SU(2)$-Transformationen im Isospinraum und somit ein Isospin-Singulett.

Bei den η-Mesonen hat man wie beim ω-Meson die Komponente $u\bar{u} + d\bar{d}$, allerdings gibt es hier einen zusätzlichen Anteil $s\bar{s}$. Da das s-Quark (und das $\bar{s}$-Quark) keinen Isospin hat, ist es invariant unter Isospintransformationen ($Us = s$, $U\bar{s} = \bar{s}$). Das Transformationsverhalten der η-Mesonen entspricht also dem des ω-Mesons. D.h. auch die η-Mesonen sind Isospin-Singuletts.

Das ϕ-Meson besteht nur aus $s\bar{s}$ und ist somit nicht von Isospin-Transformationen betroffen. Es ist also auch ein Isospin-Singulett.

d) Für die Transformation um 90° um die erste Achse gilt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + id \\ iu + d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} - i\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_1(90°)\pi^+ &= U_1(90°)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + id)\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(-iu\bar{u} + u\bar{d} + d\bar{u} + id\bar{d}) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ + \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die erste Achse ergibt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id \\ iu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\bar{u} \\ -[-i\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$U_1(180°)\pi^+ = U_1(180°)u\bar{d} = id(-i\bar{u}) = d\bar{u} = \pi^-$$

Für die Drehung um 90° um die zweite Achse erhält man:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + d \\ -u + d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} + \bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_2(90°)\pi^+ &= U_2(90°)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - d)\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(u\bar{u} + u\bar{d} - d\bar{u} - d\bar{d}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ - \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die zweite Achse ergibt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \\ -[\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$U_2(180°)\pi^+ = U_2(180°)u\bar{d} = (-d)\bar{u} = -d\bar{u} = -\pi^-$$

Das um 180° gedrehte π^+ ergibt ein π^- (mit Phasenfaktor). Bei der Drehung des π^+ um 90° erhält man eine Überlagerung von π^0, π^+ und π^-.

e) Die Auf- und Absteigeoperatoren lauten:

$$\begin{aligned} I_+ &= \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ I_- &= \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Anwendung auf die Quarks ergibt:

$$\begin{aligned}
I_+u &= I_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\\
I_-u &= I_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = d\\
I_+d &= I_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = u\\
I_-d &= I_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\\
I_+\bar{u} &= I_+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -\bar{d}\\
I_-\bar{u} &= I_-\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\\
I_+\bar{d} &= I_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\\
I_-\bar{d} &= I_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\bar{u}
\end{aligned}$$

Wendet man die Auf- und Absteigeoperatoren auf das ω-Meson an, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}I_+\omega &= I_+[u\bar{u}+d\bar{d}] = (I_+u)\bar{u} + u(I_+\bar{u}) + (I_+d)\bar{d} + d(I_+\bar{d})\\
&= 0 - u\bar{d} + u\bar{d} + 0 = 0\\
\sqrt{2}I_-\omega &= I_-[u\bar{u}+d\bar{d}] = (I_-u)\bar{u} + u(I_-\bar{u}) + (I_-d)\bar{d} + d(I_-\bar{d})\\
&= d\bar{u} + 0 + 0 - d\bar{u} = 0
\end{aligned}$$

Das ω-Meson ist also ein Isospin-Singulett.

Für die Pionen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_+\pi^+ &= I_+u\bar{d} = (I_+u)\bar{d} + u(I_+\bar{d}) = 0 + 0 = 0\\
I_-\pi^+ &= I_-u\bar{d} = (I_-u)\bar{d} + u(I_-\bar{d}) = d\bar{d} - u\bar{u} = \sqrt{2}\pi^0\\
\sqrt{2}I_-\pi^0 &= I_-[u\bar{u} - d\bar{d}] = (I_-u)\bar{u} + u(I_-\bar{u}) - (I_-d)\bar{d} - d(I_-\bar{d})\\
&= d\bar{u} + 0 - 0 + d\bar{u} = 2d\bar{u} = 2\pi^-\\
I_-\pi^- &= I_-d\bar{u} = (I_-d)\bar{u} + d(I_-\bar{u}) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Durch Auf- und Absteigeoperator können drei verschiedene Pion-Zustände erreicht werden. Die Pionen bilden also ein Triplett.

Wie man analog anhand von Auf- und Absteigeoperator zeigen kann, bilden Quark-Paare folgende Isospin-Singulett- und Triplett-Zustände:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)$$

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &= uu \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ud+du) \\
|1,-1\rangle &= dd
\end{aligned}
$$

Man sieht, dass genau anders herum als bei den Quark-Antiquark-Paaren beim Singulett-Zustand ein Minuszeichen und beim Triplett-Zustand $|1,0\rangle$ ein Pluszeichen auftritt. Dies hängt mit dem unterschiedlichen Transformationsverhalten von Quarks (2-Gruppe) und Antiquarks ($\bar{2}$-Gruppe) zusammen.

Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion

Die Masse m ist die reduzierte Masse also die halbe Nukleonmasse:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_p/2$$

Für $r < r_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u = 0 \qquad (E + V_0 > 0,\ u(r=0) = 0) \\
\Rightarrow\quad & u_1(r) = A_1 \sin kr \quad \text{ mit } k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar
\end{aligned}$$

Für $r > r_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}Eu = 0 \qquad (E < 0 \text{ da gebundener Zustand, } u(r \to \infty) = 0) \\
\Rightarrow\quad & u_2(r) = A_2 e^{-\kappa r} \quad \text{ mit } \kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar
\end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ und $\frac{d}{dr}u_1(r_0) = \frac{d}{dr}u_2(r_0)$ folgt

$$\begin{aligned}
A_1 \sin kr_0 &= A_2 e^{-\kappa r_0} \\
A_1 k \cos kr_0 &= -A_2 \kappa e^{-\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Durch Division der zweiten durch die erste Gleichubg erhält man:

$$k \cot kr_0 = -\kappa$$

Da die Wellenfunktion im Grundzustand keine Knoten hat, muss $kr_0 < \pi$ sein. Wenn die Bindungsenergie $B = -E$ viel kleiner als V_0 ist, so ist auch $\kappa \ll k$. Daraus folgt

$$\cot kr_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad kr_0 \approx \frac{\pi}{2}$$

Einsetzen von k ergibt

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \cdot r_0 = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow\quad & 2m(-B + V_0) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{4r_0^2} \\
\Rightarrow\quad & V_0 = B + \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \\
\Rightarrow\quad & V_0 = 54.5 \text{ MeV} \quad \text{bzw.} \quad V_0 \approx 52.2 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $B \ll V_0$ gerechtfertigt.

Die Wahrscheinlichkeit P, dass sich die Nukleonen in einem Volumen V, das durch die Radien r_a und r_b begrenzt ist, aufhalten, ist gegeben durch:

$$P = \int_V \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\, d^3r = 4\pi \int_{r_a}^{r_b} \psi^*(r)\psi(r)\, r^2 dr = \int_{r_a}^{r_b} u^2(r)\, dr$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sind also:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^{r_0} u_1^2(r)\, dr = A_1^2 \int_0^{r_0} \sin^2 kr\, dr \quad \text{Subst: } r = \frac{x}{k}, \quad kr_0 = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{A_1^2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{A_1^2}{k}\frac{\pi}{4} \\
P_2 &= \int_{r_0}^{\infty} u_2^2(r)\, dr = A_2^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\kappa r}\, dr = A_2^2 \left[-\frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa r}\right]_{r_0}^{\infty} = \frac{A_2^2}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ kann mit der Näherung $kr_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Beziehung zwischen den Normierungen A_1 und A_2 hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
& u_1(r_0) = A_1 \sin kr_0 = A_1 \\
= \;& u_2(r_0) = A_2 e^{-\kappa r_0} \\
\Rightarrow \;& A_2 = A_1 e^{\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für P_2:

$$P_2 = \frac{A_1^2 e^{2\kappa r_0}}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} = \frac{A_1^2}{2\kappa}$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, gilt:

$$1 = P_1 + P_2 = A_1^2 \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right) \quad \Rightarrow \quad A_1^2 = \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right)^{-1}$$

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit P_1, dass sich die Nukleonen innerhalb des Radius des Kastenpotentials aufhalten:

$$P_1 = \frac{\pi}{4k\left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi\kappa}} = 0.25$$

Obwohl Proton und Neutron ein gebundenes System bilden, halten sie sich also überwiegend ausserhalb des bindenden Potentialtopfes auf.