# Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2009

## Übungsblatt Nr. 10

Bearbeitung bis 16.07.2008

---

**Aufgabe 1: $SU(2)$-Symmetrie** (5 Punkte)

Die Darstellung von Spins in einem Spin-1/2-System durch zweidimensionale Spinoren kann analog auf das Isospindublett aus $u$- und $d$-Quark übertragen werden:

$$\begin{aligned} u\text{-Quark} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Isospin up)} \\ d\text{-Quark} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Isospin down)} \end{aligned}$$

Durch eine $SU(2)$-Transformation kann z.B. ein $u$-Quark in ein $d$-Quark umgewandelt werden oder umgekehrt. Da der Isospin in der starken Wechselwirkung erhalten ist, hat eine solche Transformation keine Auswirkungen auf diese Wechselwirkung. Dies gilt für alle möglichen $SU(2)$-Transformationen im dreidimensionalen Isospinraum. Diese Transformationen $U$, die $U^+U = UU^+ = 1$ und $\det U = 1$ erfüllen müssen, sind durch folgende Formel gegeben:

$$U = \exp\left(\frac{1}{2} i\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \tau\right) = \mathbf{1} \cos\frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{n}} \cdot \tau \sin\frac{\theta}{2}$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix, $\theta$ der Drehwinkel, $\hat{\mathbf{n}}$ ein dreidimensionaler Einheitsvektor, der die Drehachse im Isospinraum angibt, und $\tau$ ein Vektor von drei $2 \times 2$-Matrizen:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch eine solche $SU(2)$-Transformation wird ein beliebiger Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ mit der Isospin-up-Komponente $u$ und der Isospin-down-Komponente $d$ überführt in einen im Isospinraum gedrehten Isospinor $\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrizen $U_1$, $U_2$ und $U_3$ für die Rotation um die drei Achsen im Isospinraum ($n_1 = (1,0,0)$, $n_2 = (0,1,0)$, $n_3 = (0,0,1)$) und wenden Sie diese auf den Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ an.

b) Zeigen Sie, dass für Antiquarks dieselben Transformationsmatrizen $U$ verwendet werden können, wenn man das Isospindublett als $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ definiert[1]:

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

Wenden Sie dazu die Ladungskonjugation ($u \to \bar{u}$, $d \to \bar{d}$ und komplex konjugieren) auf den um $U_1$, $U_2$ bzw. $U_3$ gedrehten Spinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ aus dem vorigen Aufgabenteil an, und vergleichen Sie diese Spinoren mit den um $U_1$, $U_2$ bzw. $U_3$ gedrehten Spinoren $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$.

c) Zeigen Sie, dass das $\omega$-Meson ($\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$) ein Isospin-Singulett ist, indem Sie die Invarianz unter Rotation um jede der drei Achsen zeigen. Was ändert sich an der Argumentation, wenn man statt des $\omega$-Mesons die $\eta$-Mesonen betrachtet? Wie wirken sich Isospin-Transformationen auf das $\phi$-Meson aus?

d) Drehen Sie das $\pi^+$-Meson ($u\bar{d}$) im Isospinraum um 90° bzw. 180° einmal um die erste und einmal um die zweite Achse ($U_1(90°)\pi^+$, $U_1(180°)\pi^+$, $U_2(90°)\pi^+$, $U_2(180°)\pi^+$). Welche Zustände erhalten Sie?

e) Die Auf- und Absteigeoperatoren, die die $I_3$-Komponente eines Zustandes um eins erhöhen bzw. erniedrigen, sind gegeben durch:

$$I_\pm = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2)$$

Schreiben Sie die beiden Operatoren als Matrix, und ermitteln Sie wie sie auf $u$-, $d$-, $\bar{u}$- und $\bar{d}$-Quarks wirken. Zeigen Sie mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren, dass das $\omega$-Meson ein Isospin-Singulett und die Pionen ein Isospin-Triplett bilden. (Beachten Sie, dass nach der Produktregel $I_\pm q\bar{q} = (I_\pm q)\bar{q} + q(I_\pm\bar{q})$ ist.) Wie sehen Isospin-Singulett und -Triplett aus, wenn man statt eines Systems aus Quark und Antiquark ($2 \times \bar{2}$-Gruppe) ein System aus zwei Quarks hat ($2 \times 2$-Gruppe)?

[1]Bei der Ladungskonjugation ändern die additiven Quatenzahlen ihr Vorzeichen, d.h. $I_3(\bar{u}) = -1/2$ (Isospin down) und $I_3(\bar{d}) = +1/2$ (Isospin up)

**Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion** (3 Punkte)

Näherungsweise kann das Potential von Proton und Neutron im Deuteron durch ein zentralsymmetrisches Kastenpotential der Tiefe $-V_0$ und Radius $r_0 \approx 1.4$ fm beschrieben werden:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \text{ für } r < r_0 \\ 0 \text{ für } r > r_0 \end{cases}$$

Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung für den Grundzustand ($l = 0$) des Deuterons:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0 \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0$$

Was muss hier als Masse $m$ eingestezt werden? Lösen Sie die Gleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$ unter den Randbedingungen $u(r = 0) = 0$ und $u(r \to \infty) = 0$ und benutzen Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion und deren Ableitung, um die Tiefe des Potentials abzuschätzen. Gehen Sie von der Näherung aus, dass die Bindungsenergie $B = 2.25$ MeV viel kleiner als $V_0$ ist. Ist diese Näherung gerechtfertigt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Nukleonen bei einem Radius $r < r_0$ aufhalten?