Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 1

Bearbeitung bis 22.04.2010

Webseite des Email-Verteilers:
`https://www.lists.kit.edu/sympa/info/ktp-ss2010`
Verwenden Sie den Menüpunkt **Subscribe** bzw. **Abonnieren** um sich anzumelden.

Aufgabe 1: Einheiten und Größenordnungen

In der Kernphysik werden in der Regel keine SI-Einheiten verwendet, da für die zu beschreibenden Prozesse andere Einheiten sehr viel handlicher sind.

Berechnen Sie die äquivalenten Werte für die in der Tabelle angegebenen Größen. Nennen Sie Anwendungsgebiete für Photonen dieser Energie bzw. Wellenlänge, welche Objekte kann man damit auflösen?
E ist die Energie in Joule und eV, ν die Frequenz in Hertz, λ die Wellenlänge in Metern und Δx die Auflösung.

E [J]	E [eV]	ν [Hz]	λ [m]	Δx [m]	Objektgröße ...
	2,4				
		$1{,}5 \cdot 10^{17}$			
$4{,}6 \cdot 10^{-15}$					
			$2 \cdot 10^{-15}$		

Lösung 1

- Um die Werte zu berechnen benötigt man folgende Gleichungen:

$$E(\mathrm{J}) = 1.602 \cdot 10^{-19} \tfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}} E(\mathrm{eV}) \tag{1}$$

$$E = h\nu \tag{2}$$

$$\nu = \tfrac{c}{\lambda} \tag{3}$$

$$\Delta x = \tfrac{\lambda}{2} \tag{4}$$

Ausserdem entspricht die Auflösung Δx der halben Wellenlänge λ.
Damit erhält man leicht die Werte der unten stehenden Tabelle.

E [J]	E [eV]	ν [Hz]	λ [m]	Δx [m]	Größe von ...
$3.84 \cdot 10^{-19}$	2.4	$5.80 \cdot 10^{14}$	$5.16 \cdot 10^{-7}$	$2.58 \cdot 10^{-7}$	Kristallstrukturen
$9.93 \cdot 10^{-17}$	$6.20 \cdot 10^{2}$	$1.5 \cdot 10^{17}$	$2.00 \cdot 10^{-9}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$	Molekülen
$4.6 \cdot 10^{-15}$	$2.87 \cdot 10^{4}$	$6.94 \cdot 10^{18}$	$4.31 \cdot 10^{-11}$	$2.15 \cdot 10^{-11}$	Atomen
$9.93 \cdot 10^{-11}$	$6.20 \cdot 10^{8}$	$1.50 \cdot 10^{23}$	$2.00 \cdot 10^{-15}$	10^{-15}	Atomkernen

Hinweis: Bei der Berechnung des Auflösungsvermögens mit Hilfe der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ entsteht ein Faktor 2π im Vergleich zur Auflösung die man mit $\Delta x = \lambda/2$ erhält.

- **ZUSATZ:** Mit den Rechnungen der letzten Übung kann man auf einfache Weise zur Energie in Elektronenvolt eines Teilchenzusammenstoßes die entsprechende Energie eines Autos in Joule berechnen. Die Energie einer einzelnen Protonenkollision im LHC ist 7 TeV$= 7 \cdot 10^{12}$ eV, da in Beschleunigerexperimenten die Beziehung

$$E_{\text{Schwerpkt.}} = E_1 + E_2 \tag{5}$$

gilt, wobei E_1 und E_2 die Energien der Protonen 1 und 2 im Labrsystem sind.

Ein Bunch Protonen besteht aus 10^{11} Teilchen, die Gesamtenergie des Bunches ist

$$E_{\text{bunch}} = 7 \cdot 10^{23}\,\text{eV} = 1.12 \cdot 10^5\,\text{J}. \tag{6}$$

Nimmt man diese Energie und benutzt

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2, \tag{7}$$

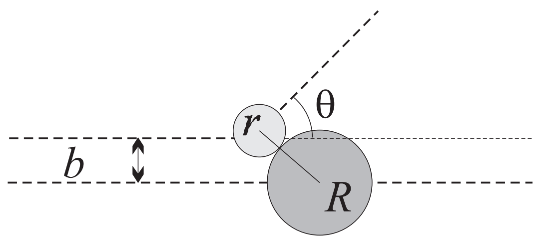
kann man die Geschwindigkeit v eines Autos der Masse $m \approx 1\,\text{t}$ aus der kinetischen Energie E_{kin} zu ca. 15 m/s bzw. 54 km/h berechnen. Bedenkt man, dass insgesamt ca. 2800 Bunche im LHC Ring gespeichert sind ergibt dies eine beeindruckende Menge Energie.

Aufgabe 2: Rutherford Wirkungsquerschnitt

Bei der Streuung von α-Teilchen an einer Goldfolie entdeckte Rutherford den Atomkern. Hier soll nun der Wirkungsquerschnitt unter der Annahme eines Coulomb-Potentials berechnet werden. Benutzen Sie dazu die im Text und in der Skizze unten verwendeten Bezeichnungen.

a) Was waren die Beobachtungen hinsichtlich der Streuwinkel der α-Teilchen? Nennen Sie Gründe für die Diskrepanz zum Thomson-Modell (Rosinenpudding). Welche Schlussfolgerungen über die innere Struktur des Atoms zog Rutherford aus seinen Beobachtungen?

b) Leiten Sie den Streu-Wirkungsquerschnitt her. Nehmen Sie an, dass ausschließlich die Coulomb-Kraft die Wechselwirkung eines leichten Projektils der Ladung Z_p mit einem sehr viel schwereren Target der Ladung Z_t bestimmt. Vernachlässigen Sie daher den Rückstoß auf den Target-Kern.



- Geben Sie den Stoßparameter b als Funktion des Streuwinkels θ an.
- Leiten Sie einen Ausdruck für den differenziellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ als Funktion des Winkels θ her! Benutzen Sie

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|. \tag{8}$$

- Welchen Einfluss haben die Vorzeichen der Ladungen $Z_\mathrm{p}e$ und $Z_\mathrm{t}e$ auf den differenziellen Wirkungsquerschnitt? Wie wird die Ablenkung $\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta$ des Teilchens beeinflusst?

Lösung 2

Rutherford verwendete Daten aus Experimenten, die er mit Hilfe von Geiger und Maasden von 1911 - 13 an der Universität Manchester durchgeführt hatte. Aus dem Ergebnis bewies Rutherford, dass das von Thomson vorgeschlagenen Atommodell falsch war. Dieses ging davon aus, dass die positiven und negativen Ladungen gleichmäßig über das Atom verteilt waren.

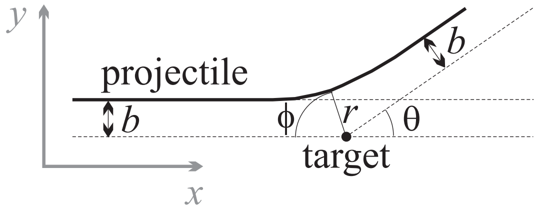
a) Sie machten folgende Beobachtungen:

   - Es gibt Vorwärtsstreuung, manche Teilchen passieren den Aufbau ohne Ablenkung.
   - Streuung tritt mit großen Winkeln auf, sogar Rückstreuung wurde beobachtet.

   Das Thomson Modell nimmt an, dass positive und negative Ladungen gleichmäßig über das gesamte Atomvolumen verteilt sind. Dies wird auch „Rosinenkuchemodell“genannt, ein positiv geladener „Klumpen“ mit negativen Ladungen darin eingebettet. Falls dies der Fall wäre würde elastische Streuung das verhalten der α-Teilchen bestimmen. Da diese schwerer als die Teilchen sind an denen sie streuen würden (die negativen Ladungen, also Elektronen, positive Ladungen der selben Masse könnten die α-Teilchen nicht mehr als den Bruchteil eines Grades ablenken), betrügen Ablenkwinkel nicht mehr als 90°. Rutherford beobachtete jedoch, dass eines von 8000 Teilchen zu Winkeln größer als dem rechten Winkel abgelenkt wird.

   Rutherford schloss aus diesen Beobachtungen, dass das Thomson'sche Atommodell falsch war. Nach ihm bestand das Atom aus einem positiv geladenen massiven Kern und einer negativ geladenen Wolke. Der Kern musste schwer sein, aber nur einen sehr kleinen Teil des Volumens einnehmen, dies folgt daraus, dass nur ein kleiner Teil der einfallenden α-Teilchen zurückgestreut wird.

b) Ableitung des Wirkungsquerschnittes der Rutherfordstreuung



- Die Coulombwechselwirkung des gestreuten α-Teilchen und dem Goldkern ist gegeben durch

$$F = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \tag{9}$$

dabei ist $Z_\mathrm{p} e = 2e$ die Ladung des α-Teilchens, $Z_\mathrm{t} e = 79e$ die Ladung des Goldkerns, e die Elementarladung und r der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Teilchen. Mit den Parametern aus der obigen Skizze erhält man

$$F_y = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\phi = m_\mathrm{p} \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

für die Kraft auf das abgelenkte α-Teilchen in y-Richtung. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen dem Abstandsvektor der Teilchen $\vec{r}$ und der negativen x-Richtung des Projektils. Der zweite Term ist die Masse m_p des Projektils mal der Beschleunigung in Ablenkrichtung y.

Der Drehimpuls des Teilchens ist bestimmt durch

$$L = |\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = m v_0 b = m r^2 \dot{\phi}, \tag{11}$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit des Projektils v_0, dem Stoßparameter b, der Zeitableitung des Winkels ϕ, $\dot{\phi} = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$, wie oben definiert.

Aus **??** erhält man

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 b} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

Nun lässt sich die Beschleunigung in y-Richtung durch Einsetzen in **??** schreiben als

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m_\mathrm{p}} \sin\phi \tag{13}$$

$$= \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 m_\mathrm{p} v_0 b} \sin\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Vor dem Streuprozess gilt $\phi = 0$ (in guter Näherung), $v_y = 0$, and danach $\phi = \pi - \theta$ sowie $v_y = v_0 \sin\theta$ (aus Energieerhaltung). Dies ermöglicht die Bestimmung der Geschwindigkeit in Ablenkrichtung zu bestimmen. Die

Berechnung erfolgt durch Integration über t

$$v_0 \sin\theta = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 m_\mathrm{p} v_0 b} \underbrace{(1 + cos\theta)}_{\int_0^{\pi-\theta} \sin\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 m_\mathrm{p} v_0^2 b} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2Eb} \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

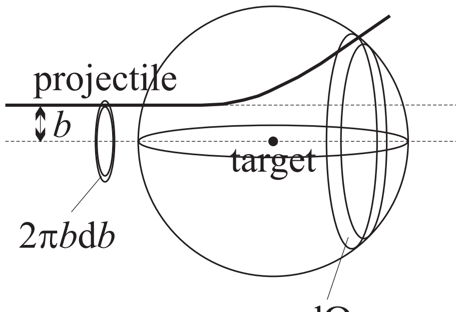
mit Verwendung eines Additionstheorems und der kinetischen Energie $E = 1/2 m_\mathrm{p} v_0^2$. Daraus erhlt man den Stoßparameter ($\tan\rho\cot\rho = 1$ für beliebige Winkel)

$$b = \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot\frac{\theta}{2}. \tag{20}$$

- Der nächste Schritt ist die Berechnung der Funktion, welche die Ablenkung beschreibt, diese ist

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2E}(-1)\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}. \tag{21}$$

Nun muss man bekannte Fakten über den Differentiellen Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$, die abzuleitende Größe anwenden: Er ist definiert als die Zahl der Teilchen pro Targetteilchen, welche pro Sekunde in einen festen Raumwinkel gestreut werden, dividiert durch die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Sekunde. Der Raumwinkel ist gegeben durch $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta$ fr den Ausschnitt einer Kugel im Interval $\mathrm{d}\theta$ rotiert für alle ϕ. Abbildung **??** veranschaulicht dies. Teilchen die den Ring $2\pi b\mathrm{d}b$ durchfliegen durchfliegen ebenfalls die Ringfläche definiert als Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$.



$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi b\mathrm{d}b \tag{22}$$

Der differnetielle Wirkungsquerschnitt (immer ≥ 0) ist also definiert durch:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \left|\frac{2\pi b \mathrm{d}b}{2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta}\right| && (23)\\
&= \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| && (24)\\
&= \frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2E}\cot\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2E}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\sin\theta} && (25)\\
&= -\left(\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 2E}\right)^2 \cot\frac{\theta}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} && (26)\\
&= \left(\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\frac{\cot\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} && (27)\\
&= \left(\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^3\frac{\theta}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} && (28)\\
&= \left(\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0 4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} && (29)
\end{aligned}
$$

- Ändert man das Ladungsvorzeichen, wird das Teilchen in die entgegengesetzte y-Richtung gestreut. Dies hat keinen Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt, da dort die Ladungen nur quadriert auftreten. Dies ist auch ersichtlich, da der Wirkungsquerschnitt unabhängig von ϕ ist.
- Abweichungen werden bei großen und kleinen Winkeln erwartet. Die Annahmen, die während der Ableitung gemacht wurden sind eine gute Näherung, haben jedoch einige Schwächen.

  Bei kleinen Winkeln, also großen Stoßparametern, ist die Elektronenwolke um den Kern nicht mehr vernachlässigbar. Ausserdem wurde im Experiment nicht die Streuung an einem einzelnen Kern untersucht, sondern an einer gesamten Anordnung derselben, so dass eingache Coulomb-Wechselwirkung mit einer Kugel eine Vereinfachung darstellt .

  Die Teilchen sind nicht punktförmig sondern nehmen ein gewisses Volumen ein. Dies und die Tatsache dass sie spinbehaftet sind führt zu Abweichungen bei großen Winkeln. Weitere Annahmen, die das Szenario der Coulomb-Streuung nur annähern sind, dass keine Mehrfachstreuung stattfindet und dass unendlich große Stoßparameter möglich sind.

Aufgabe 3: Streuung von α-Teilchen

Ein Strahl von α-Teilchen ($E_\alpha = 4{,}5\,\mathrm{MeV}$, Strom $I = 1\,\mathrm{nA}$) wird an Gold gestreut (Folie von $2\,\mu\mathrm{m}$ Dicke, $Z = 79$, $A = 197$, $\rho = 19{,}3\,\mathrm{g/cm^3}$). Ein $1\,\mathrm{cm^2}$ großer Detektor in $10\,\mathrm{cm}$ Abstand um das Target wird verwendet. Gehen Sie im Folgenden von Rutherford-Streuung aus.

(a) Berechnen Sie für die Winkel $\theta = 15°$, $90°$ und $140°$ den differenziellen Wirkungsquerschnitt.

(b) Berechnen Sie für die Winkel $\theta = 15°$, $90°$ und $140°$ die Anzahl der Teilchen, die pro Sekunde in den Detektor gelangen.

(c) Experimentell sind keine Abweichungen von der Rutherford-Streuung bis zu einem Winkel von $150°$ zu finden. Schätzen sie eine obere Grenze R_N für den Kernradius von Gold ab. (Annahme: $R_\mathrm{N} \approx b_\mathrm{crit} = b(\theta_\mathrm{crit})$).

Lösung 3

(a) Der differentille Rutherford-Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Z_\mathrm{p} Z_\mathrm{t} e^2}{4\pi\epsilon_0\, 4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{30}$$

Mit $Z_\mathrm{p} = 2$, $Z_\mathrm{t} = 79$, $E_\alpha = 4.5\,\mathrm{MeV}$ and $e^2/(4\pi\epsilon_0) \approx 1.44\,\mathrm{MeVfm}$ vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{159.8\,\mathrm{fm}^2}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1.598\,\mathrm{b}}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{31}$$

Daher gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta = 15°) = 5505\,\mathrm{b/srad}$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta = 90°) = 6.39\,\mathrm{b/srad}$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta = 140°) = 2.05\,\mathrm{b/srad}$$

(b) Der gemessene Wirkungsquerschnitt ist $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \cdot \Delta\Omega$, in diesem Fall mit einem Detektor der Fläche $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ in einem Abstand von $r = 10\,\mathrm{cm}$

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2} = 10^{-2}\,\mathrm{srad}.$$

Die Targetdichte ρ_target bzw. die Zahl der Streuzentren pro Fläche beträgt (mit der Dichte von Gold $\rho = 19.3\,\mathrm{g/cm}^3$, der molaren Masse $m_\mathrm{mol} \approx 197\mathrm{g/mol}$ und der Targetdicke $d = 2\,\mu\mathrm{m}$)

$$\rho_\mathrm{t} = \rho \cdot d \cdot \frac{\mathrm{N_A}}{m_\mathrm{mol}(\mathrm{Au})} = 1.180 \cdot 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-2} = 1.180 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{b}^{-1}. \tag{32}$$

Die Zahl der Strahlteilchen pro Sekunde ist gegeben durch ($I = 1\,\mathrm{nA}$, α-Teilchen mit $Z_\alpha = 2$)

$$I = N_\alpha \cdot \frac{q_\alpha}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{N_\alpha}{\Delta t} = \frac{I}{q_\alpha} = \frac{I}{2 \cdot \mathrm{e}} = 3.12 \cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1} \tag{33}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist: (Detektoreffizienz $\varepsilon = 1$)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{N_{\mathrm{Reaktionen}}}{\Delta\Omega \cdot \rho_{\mathrm{Target}} \cdot N_{\mathrm{Strahl}}} \tag{34}$$

and so

$$\dot{N}_{\mathrm{Reaktionen}} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \cdot \Delta\Omega \cdot \rho_{\mathrm{Target}} \cdot \dot{N}_\alpha. \tag{35}$$

Für die angegebenen Winkel ergibt dies:

$$\begin{aligned} \dot{N}(15^\circ) &= 2.02 \cdot 10^6\,\mathrm{s}^{-1} \\ \dot{N}(90^\circ) &= 2.35 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \\ \dot{N}(140^\circ) &= 754\,\mathrm{s}^{-1}. \end{aligned}$$

(c) In der Vorlesung wurde eine Formel für den Punkt gegeben, an dem die beobachteten Daten von der Coulomb-Streuung abweichen, und mit dem Radius der Teilchen verknüpft.

$$R_{\mathrm{N}} \approx b_{\mathrm{crit}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 \mathrm{e}^2}{4\pi\varepsilon_0 2E_0}\right) \cot\left(\frac{\theta_{\mathrm{crit}}}{2}\right). \tag{36}$$

Eine Abweichung bei einem Winkel von $\theta = 150^\circ$ entspricht einem Radius von

$$R_{\mathrm{N}} \approx 6.8\,\mathrm{fm}.$$

Nach

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A} \qquad \text{with} \qquad R_0 \approx 1.2\,\mathrm{fm} \tag{37}$$

erwartet man für ^{197}Au einen Wert von 6.98 fm.

Vorsicht!
$\boldsymbol{R_{\mathrm{N}} \neq b_{\mathrm{crit}}}$**! Siehe z.B. Demtröder 4 Kap. 2.2.** Man muss immer eine der Größen E_0 oder θ_{crit} festhalten, um in der jeweils anderen den kritischen Parameter zu finden. Im gegebenen Fall muss daher die Energie der α-Teilchen konstant bleiben.