Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 2

Bearbeitung bis 29.04.2010

Aufgabe 1: Luminosität

Zur Zeit wird am CERN in Genf der pp-Speicherring LHC in Betrieb genommen. In dem 26.7 km langen Ring sollen in beiden Umlaufrichtungen 2808 Pakete (Bunches) von jeweils $1.1{\cdot}10^{11}$ Protonen gespeichert werden. Die Pakete kollidieren bei einer Schwerpunktsenergie von 14 TeV auf einer Fläche mit einem effektiven Radius von 33 μm. Wie groß ist die Luminosität? Wieviele Ereignisse erwartet man innerhalb eines Tages für eine Reaktion mit einem Wirkungsquerschnitt von 30 pb (Größenordnung des erwarteten Wirkungsquerschnitts für Higgsproduktion bei kleiner Higgsmasse)?

Lösung:

Die Luminosität eines Speicherrings ist gegeben durch die Anzahlen der Teilchen pro Paket N_1 und N_2, die Fläche A der Wechselwirkungszone sowie die Frequenz ν, mit der die Pakete kollidieren:

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{A} \cdot \nu$$

Hier ist $N_1 = N_2 = 1.1 \cdot 10^{11}$ und $A = \pi r^2$ mit $r = 33$ μm. Die Frequenz ergibt sich aus dem Umfang $U = 26.7$ km, der Anzahl der Pakete $n = 2808$ und der Geschwindigkeit der Protonen $v \approx c$:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{U} = \frac{nc}{U}$$

Damit erhält man eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = 1.1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Bei dieser Luminosität erwartet man innerhalb einer Zeit von $\Delta t = 1$ d bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 30$ pb die folgende Anzahl N von Ereignissen:

$$N = \frac{dN}{dt} \cdot \Delta t = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta t = 2.9 \cdot 10^4$$

Aufgabe 2: De-Broglie-Wellenlänge

Welche kinetische Energie müssen Neutrinos ($m_\nu = 0$), Elektronen, Myonen oder Protonen haben, damit sie eine de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = 2\pi\lambda\!\!\!^{-} = 1$ fm haben? Welche Energie haben Photonen mit einer Wellenlänge von 1 fm?

Lösung:

Für die de-Broglie-Wellenlänge gilt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \quad \Rightarrow \quad pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie $E_{kin} = E - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$:

Neutrino:	$E_{kin} = 1.240$ GeV
Elektron:	$E_{kin} = 1.239$ GeV
Myon:	$E_{kin} = 1.139$ GeV
Proton:	$E_{kin} = 0.617$ GeV

Für Photonen gilt:

$$E = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Aufgabe 3: Formfaktor

a) Zeigen Sie, dass der Formfaktor für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r = |\vec{r}|)$ durch

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr$$

gegeben ist. Dabei sei ρ auf 1 normiert: $\int \rho(\vec{r}) d^3r = 1$.

b) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme der Formfaktor

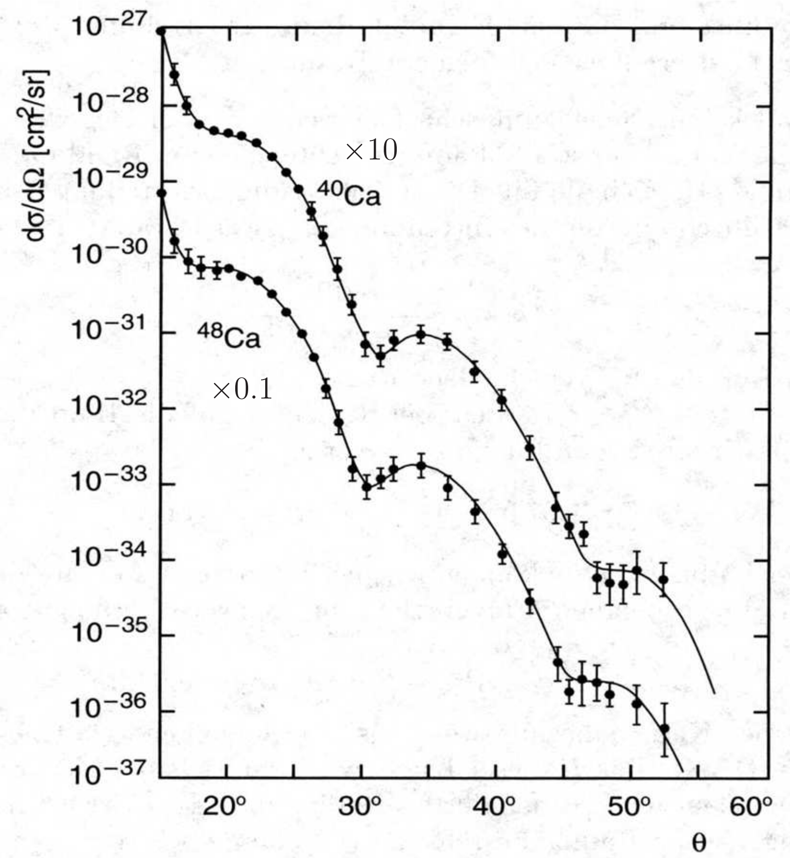
$$F(q) = \frac{3}{x^3} \cdot (\sin x - x\cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{qR}{\hbar}$$

ist.

c) Berechnen Sie $F(q = 0)$

d) Ermitteln Sie (graphisch oder numerisch) die ersten drei positiven Nullstellen von $F(x)$.

e) In der Abbildung ist der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen mit einer Energie von $E = 750$ MeV an ^{40}Ca und ^{48}Ca in Abhängigkeit vom Streuwinkel aufgetragen. Welchen Streuwinkeln entsprechen die im vorigen Aufgabenteil ermittelten Nullstellen? Bestimmen Sie daraus den Kernradius R der beiden Isotope.



Lösung:

a) Der Formfaktor ist für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert als

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3r$$

Für die Integration werden hier Kugelkoordinaten verwendet. Dabei wird die z-Achse ($\theta = 0$) in Richtung von $\vec{q}$ gewählt, so dass $\vec{q}\cdot\vec{r} = qr\cos\theta$ ist:

$$\begin{aligned}
F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \rho(r) e^{iqr\cos\theta/\hbar} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi \quad \text{(Subst. } x = \cos\theta) \\
&= -2\pi \int_1^{-1}\int_0^{\infty} \rho(r) e^{iqrx/\hbar} r^2 \, dr\, dx \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \rho(r) \left[\frac{\hbar}{iqr} e^{iqrx/\hbar}\right]_{-1}^{1} r^2 \, dr \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} \left(e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}\right) r^2 \, dr \\
&= 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 \, dr \qquad (1)
\end{aligned}$$

b) Da das Volumen einer Kugel mit Radius R gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$ ist, ist die normierte Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel gegeben durch:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} \text{ für } r \leq R \\ 0 \text{ für } r > R \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung 1 für den Formfaktor:

$$\begin{aligned}
F(q) &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 \, dr \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr/\hbar) \, dr \\
&= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[-r\frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) \, dr \right) \\
&= \frac{3\hbar^2}{q^2R^3} \left[-r\cos(qr/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qr/\hbar) \right]_0^R \\
&= \frac{3\hbar^2}{q^2R^3} \left(-R\cos(qR/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qR/\hbar) \right) \\
&= \frac{3\hbar^3}{q^3R^3} \left(\sin(qR/\hbar) - qR/\hbar \cdot \cos(qR/\hbar) \right) \\
&= \frac{3}{x^3} (\sin x - x\cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{qR}{\hbar}
\end{aligned}$$

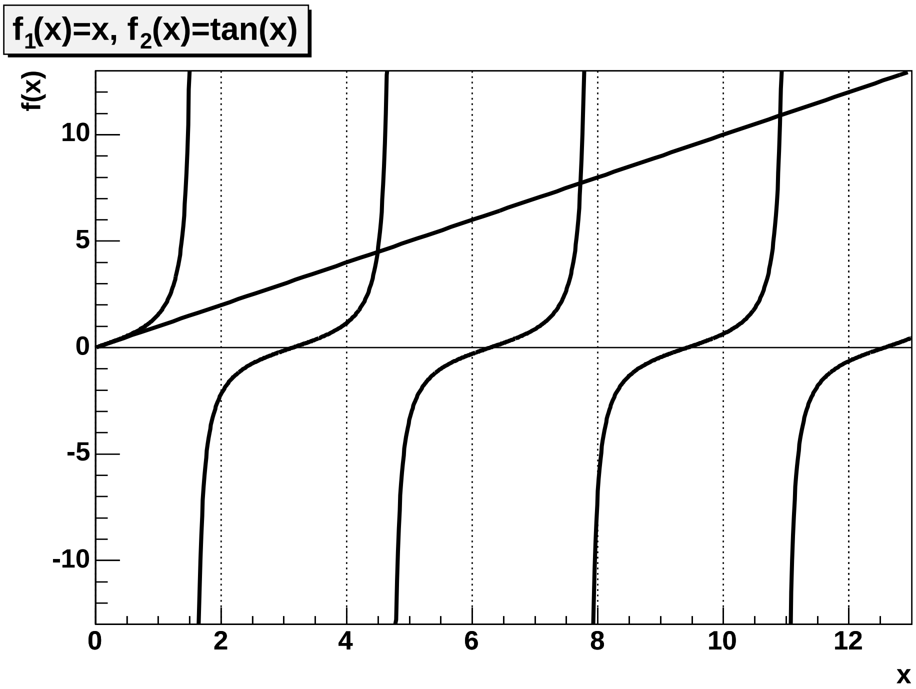
c) $F(q=0)$ lässt sich durch Taylorentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen:

$$\begin{aligned}
F(q=0) &= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x\cos x) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot [1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4)] \right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{3}{x^3} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\
&= \lim_{x\to 0} 3 \left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

d) Aus $F(x) = 0$ folgt:

$$\sin x - x\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan x$$

Aus den Schnittpunkten der Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \tan x$ lassen sich also die Nullstellen von $F(x)$ bestimmen.



Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \sin x_n} = x_n - 1/x_n + \cot x_n$$

Für die Startwerte 5, 7 und 11 (aus der graphischen Darstellung) ergeben sich nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.493 \\ x_2 &= 7.725 \\ x_3 &= 10.904 \end{aligned}$$

e) Aus $x = qR/\hbar$ folgt für $p \gg mc$:

$$R = \frac{\hbar}{q} \cdot x = \frac{\hbar c}{2pc \sin\theta/2} \cdot x = \frac{\hbar c}{2E \sin\theta/2} \cdot x$$

Da die lokalen Minima des Wirkungsquerschnitts den Nullstellen von $F(x)$ entsprechen, lässt sich aus ihnen der Radius R bestimmen.

Für ^{40}Ca:	Für ^{48}Ca:
$\theta_1 = 18^\circ \Rightarrow R_1 = 3.78$ fm	$\theta_1 = 17^\circ \Rightarrow R_1 = 4.00$ fm
$\theta_2 = 31^\circ \Rightarrow R_2 = 3.80$ fm	$\theta_2 = 30^\circ \Rightarrow R_2 = 3.93$ fm
$\theta_3 = 47^\circ \Rightarrow R_3 = 3.60$ fm	$\theta_3 = 45^\circ \Rightarrow R_3 = 3.75$ fm

Als mittleren Radius erhält man $R = 3.73$ fm für ^{40}Ca und $R = 3.89$ fm für ^{48}Ca.

Aufgabe 4: Weizsäcker-Massenformel

a) Bestimmen Sie analytisch aus der Weizsäcker-Massenformel die Ladungszahl Z des stabilsten Isobars in Abhängigkeit von A. Nehmen Sie dabei Z als kontinuierliche Variable an und vernachlässigen Sie die Paarungsenergie.

b) Welche kinetische Energie wird frei, wenn ein ^{238}U-Kern symmetrisch in zwei identische Bruchstücke gespalten wird?

c) Nehmen Sie an, dass jedes Bruchstück durch β-Zerfall weiter bis zum Massental hin zerfällt. Welches stabile Element wird erreicht und wieviel kinetische Energie wird insgesamt bei den β-Zerfällen frei?

Lösung:

a) Die Weizsäcker-Massenformel lautet (unter Vernachlässigung der Paarungsenergie):

$$M(A,Z) = (A-Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A-2Z)^2}{4A}$$

Das Minimum von $M(A,Z)$ bestimmt die Ladungszahl des stabilsten Isobars. Im Minimum gilt:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial M}{\partial Z} &= -m_n + m_p + m_e + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - a_a \frac{A-2Z}{A} \\
&= -m_n + m_p + m_e - a_a + (2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1})Z \\
\Rightarrow \quad Z &= \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1}} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{a_a + a_c A^{2/3}}
\end{aligned}$$

Mit $a_a = 93.15$ MeV und $a_c = 0.714$ MeV [Povh] ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{A}{2} \cdot \frac{93.94 \text{ MeV}}{93.15 \text{ MeV} + 0.714 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}} \\
&= \frac{A}{1.98 + 0.0152 \cdot A^{2/3}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

b) Bei der symmetrischen Spaltung von $^{238}_{92}$U entstehen zwei Tochterkerne mit $A = 119$ und $Z = 46$ (^{119}Pd). Die frei werdende kinetische Energie ist also:

$$E_{kin} = M(A = 238, Z = 92) - 2 \cdot M(A = 119, Z = 46)$$

Da die Massen-, Volumen- und Asymmetrieterme für Mutter- und Tochterkerne gleich sind, ergibt sich E_{kin} aus der Differenz von Oberflächen-, Coulomb- und Paarungsenergie ($E_p = \delta/\sqrt{A}$, $\delta = -11.2$ MeV für ${}^{238}_{92}$U (gg-Kern), $\delta = 0$ für ${}^{119}_{46}$Pd (ug-Kern)):

$$\begin{aligned} E_{kin} &= a_s(238^{2/3} - 2 \cdot 119^{2/3}) + a_c(92^2 \cdot 238^{-1/3} - 2 \cdot 46^2 \cdot 119^{-1/3}) \\ &\quad +(-11.2 \text{ MeV} \cdot 238^{-1/2} - 2 \cdot 0 \cdot 119^{-1/2}) \\ &= -172.0 \text{ MeV} + 360.9 \text{ MeV} - 0.7 \text{ MeV} \\ &= 188.1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(Bei Vernachlässigung der Paarungsenergie ist $E_{kin} = 188.8$ MeV.)

c) Aus Gleichung 2 erhält man $Z = 50.69$ als Position des Minimums. Demnach erfolgen insgesamt 5 β^--Zerfälle von ${}^{119}_{46}$Pd bis ${}^{119}_{51}$Sb ($\Delta Z = 5$). Da die Masse der beim β^--Zerfall erzeugten Elektronen bereits in der Weizsäcker-Massenformel berücksichtigt ist, ergibt sich für die insgesamt freigesetzte kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= M(A = 119, Z = 46) - M(A = 119, Z = 51) \\ &= \Delta Z \cdot (m_n - m_p - m_e) + a_c A^{-1/3}(46^2 - 51^2) \\ &\quad + a_a A^{-1} \left[(46 - A/2)^2 - (51 - A/2)^2\right] \\ &= 3.9 \text{ MeV} - 70.4 \text{ MeV} + 86.1 \text{ MeV} \\ &= 19.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0, und da die Volumen- und die Oberflächenenergie sich beim β-Zerfall nicht ändern, tragen nur die Massenterme, der Coulombterm und der Asymmetrieterm zur kinetischen Energie bei.

Bemerkung: In Wirklichkeit endet die β-Zerfallskette nicht bei ${}^{119}_{51}$Sb, sondern schon beim stabilen Isotop ${}^{119}_{50}$Sn. Für diese Kette ergibt sich eine kinetische Energie von $E_{kin} = 19.4$ MeV.