Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 03

Bearbeitung bis 06.05.2010

Aufgabe 1: Neutronensterne

Im Allgemeinen kann man annehmen, dass die Dichte in Zentrum von Neutronensternen ein Vielfaches der Dichte von gewöhnlicher Kernmaterie erreichen kann.

a) Begründen Sie, weshalb ein makroskopischer Körper mit Kernmaterie vergleichbarer Dichte, nicht aus gleichen Teilen an Protonen&Elektronen sowie Neutronen ($N_\mathrm{p} = N_\mathrm{e} \approx N_\mathrm{n}$) zusammengesetzt sein kann, wie die Materie in unserer Umwelt.

b) Schätzen Sie den Anteil an Protonen und Elektronen in einem Neutronenstern bei normaler Kerndichte ($\rho_0 = 0.15\,\mathrm{Nukleonen/fm^3}$) ab.

Hinweis: Betrachten Sie alle Teilchen als nicht wechselwirkend. Nehmen Sie an, die Elektronen seien hoch relativistisch und die anderen Teilchen seien nicht relativistisch. Nutzen Sie Fermi-Impuls und Fermi-Energie.

Lösung:

Als Randbedingung verwenden wir die Ladungserhaltung. Die Gesamtladung ist $Q_\mathrm{total} = 0$.

a) In Kernmaterie ist die Dichte der Protonen und Neutronen ungefähr gleich der halben Dichte der Nukleonen, also $\rho_\mathrm{p} \approx \rho_\mathrm{n} \approx \rho_0/2$. Der Fermi-Impuls für Nukleonen ist:

$$p_\mathrm{F} \approx 250\,\mathrm{MeV}/c.$$

Ihre Fermi-Energie ist:

$$E_\mathrm{F}^{(\mathrm{N})} = \frac{p_\mathrm{F}^2}{2M_\mathrm{N}} \approx 33\,\mathrm{MeV}.$$

Elektronen der selben Dichte hätten den gleichen Fermi-Impuls, und damit eine Fermi-Energie von:

$$E_\mathrm{F}^{(\mathrm{e})} = p_\mathrm{F}^2 c^2 = 250\,\mathrm{MeV} \gg E_\mathrm{F}^{(\mathrm{N})}$$

Die FERMI-Energie der Elektronen ist wesentlich größer als die der Neutronen. Wenn Elektronen und Protonen zu einem Neutron und einem Neutrino (welches den Neutronenstern verlässt) kombinieren, wird Energie frei.

$$\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu$$

Aus diesem Grund muss ein solches makroskopisches Objekt einen deutlichen Überschuss an Neutronen besitzen.

b) Die Beziehung von Dichte und FERMI-Impuls ist gegeben durch:

$$\rho = 2 \times \frac{4\pi}{3} p_\mathrm{F}^3/(2\pi\hbar)^3 = \frac{p_\mathrm{F}^3}{3\pi^2\hbar^3},$$

Der Faktor 2 berücksichtigt den Spin, und es gilt:

$$p_\mathrm{F} = (3\pi^2\hbar^3\rho)^{1/3}.$$

Der FERMI-Impuls von Neutronen der Dichte $\rho = 0.15\,/\mathrm{fm}^3$ ist:

$$p_\mathrm{F} = 324\,\mathrm{MeV}/c$$

und die FERMI-Energie beträgt:

$$E_\mathrm{F} = \frac{p_\mathrm{F}^2}{2M_\mathrm{n}} = 56.0\,\mathrm{MeV}.$$

Sind nur Neutronen vorhanden, bedeutet dies $\rho_\mathrm{n} = \rho_0,\ \rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{p} = 0$, Neutronen der FERMI-Energie können sich in Protonen und Elektronen umwandeln,

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}\,(+\nu)\ + Q,$$

dabei ist

$$Q = E_\mathrm{F}^{(\mathrm{n})} + M_\mathrm{n}c^2 - (M_\mathrm{p} + m_\mathrm{e})c^2 = 56.78\,\mathrm{MeV}. \quad (E_\nu = 0)$$

Dieser Prozess ist möglich, solange folgende Beziehung gilt:

$$E_\mathrm{F}^{(\mathrm{n})} > E_\mathrm{F}^{(\mathrm{e})} + E_\mathrm{F}^{(\mathrm{p})} + (M_\mathrm{n} - M_\mathrm{p} - m_\mathrm{e})c^2.$$

Aus a) wissen wir, dass im Gleichgewicht gilt:

$$\rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{p} \ll \rho_\mathrm{n}$$

und deshalb

$$E_\mathrm{F}^{(\mathrm{p})} \approx 0\,; \qquad \rho_\mathrm{n} \approx \mathrm{const}, \quad E_\mathrm{F}^{(\mathrm{n})} \approx \mathrm{const}.$$

Daraus erhalten wir

$$E_\mathrm{F}^{(\mathrm{e})} = 56.8\,\mathrm{MeV} \quad \text{and} \quad p_\mathrm{F}^{(\mathrm{e})} = 56.8\,\mathrm{MeV/c}$$

$$\rho_e = \rho_p = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = 8.055 \times 10^{-4}\,\mathrm{fm}^3$$

$$\rho_e/\rho_n = 5.37 \times 10^{-3}.$$

Der Anteil der Elektronen und Protonen in solch einem Neutronenstern beträgt ca. 0,5%.

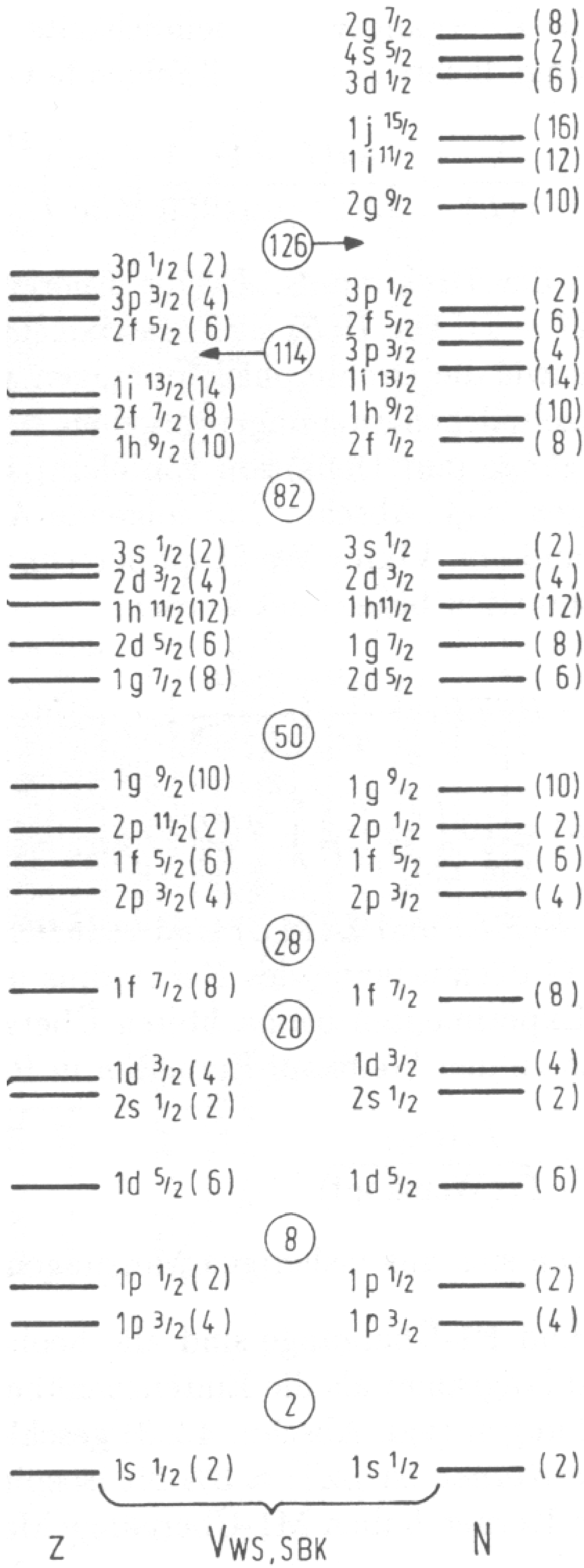
(Vernachlässigt man die Massendifferenz zwischen Protonen und Neutronen, so sollte man zum gleichen Ergebnis kommen.)

Aufgabe 2: Schalenmodell

a) Auf der nächsten Seite ist die Anordnung der Energieniveaus angegeben, wie sie vom Schalenmodell vorhergesagt wird. Entnehmen Sie diesem Schema die Werte für den Spin und die Parität J^P der folgenden Kerne und geben Sie diese Werte an:
^{3}He, ^{5}He, ^{7}Li, ^{8}Be, ^{13}C, ^{17}F, ^{31}P, ^{114}Sn, ^{209}Pb.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Neutronenschalen $1\mathrm{p}_{1/2}$ und $1\mathrm{d}_{5/2}$ für Kerne mit $A \approx 16$ aus der gesamten Bindungsenergie von ^{15}O (111.9556 MeV), ^{16}O (127.6193 MeV), und ^{17}O (131.7627 MeV).

c) Wie interpretieren sie den Unterschied der Bindungsenergie von ^{17}O und ^{17}F (128.2196 MeV)? Schätzen Sie den Radius dieser Kerne ab: Vergleichen Sie dazu die Ergebnisse aus der Annahme homogen geladener Kugeln mit denen aus der Beziehung $r = 1.21\,\mathrm{fm}A^{1/3}$.


2g 7/2 (8)
4s 5/2 (2)
3d 1/2 (6)
1j 15/2 (16)
1i 11/2 (12)
2g 9/2 (10)
126
3p 1/2 (2)
3p 3/2 (4)
2f 5/2 (6)
114
1i 13/2 (14)
2f 7/2 (8)
1h 9/2 (10)
3p 1/2 (2)
2f 5/2 (6)
3p 3/2 (4)
1i 13/2 (14)
1h 9/2 (10)
2f 7/2 (8)
82
3s 1/2 (2)
2d 3/2 (4)
1h 11/2 (12)
2d 5/2 (6)
1g 7/2 (8)
3s 1/2 (2)
2d 3/2 (4)
1h 11/2 (12)
1g 7/2 (8)
2d 5/2 (6)
50
1g 9/2 (10)
2p 11/2 (2)
1f 5/2 (6)
2p 3/2 (4)
1g 9/2 (10)
2p 1/2 (2)
1f 5/2 (6)
2p 3/2 (4)
28
1f 7/2 (8)
1f 7/2 (8)
20
1d 3/2 (4)
2s 1/2 (2)
1d 3/2 (4)
2s 1/2 (2)
1d 5/2 (6)
1d 5/2 (6)
8
1p 1/2 (2)
1p 3/2 (4)
1p 1/2 (2)
1p 3/2 (4)
2
1s 1/2 (2)
1s 1/2 (2)
Z
VWS, SBK
N

Lösung:

a) Die Eigenschaften der Kerne sind in der unten stehenden Tabelle angegeben. Zuerst notieren wir die Werte für A, Z und N der Kerne und zählen ab, in welchem Niveau das letzte ungepaarte Nukleon ist. Dann können wir die Schalenkonfiguration des einzelnen Nukleons angeben, seinen Bahndrehimpuls und seine Quantenzahlen J^P.

Kern	A	N	Z	Konfiguration	L	J^P
^{3}He	3	1	2	n: $1s_{1/2}$	0	$1/2^+$
^{5}He	5	3	2	n: $1p_{3/2}$	1	$3/2^-$
^{7}Li	7	4	3	p: $1p_{3/2}$	1	$3/2^-$
^{8}Be	8	4	4	gg–Kern		0^+
^{13}C	13	7	6	n: $1p_{1/2}$	1	$1/2^-$
^{17}F	17	8	9	p: $1d_{5/2}$	2	$5/2^+$
^{31}P	31	16	15	p: $2s_{1/2}$	0	$1/2^+$
^{114}Sn	114	64	50	gg–Kern		0^+
^{209}Pb	209	127	82	n: $2g_{9/2}$	4	$9/2^+$

b) Man kann den ^{17}O-Kern als einen ^{16}O-Rumpf mit einem zusätzlichen Nukleon in der $1f_{5/2}$-Schale betrachten. Die Energie dieses Niveaus ist also gleich $B(^{16}\mathrm{O}) - B(^{17}\mathrm{O})$. Die $1p_{1/2}$-Schale im ^{15}O-Kern liegt entsprechend bei einer Energie von $B(^{15}\mathrm{O}) - B(^{16}\mathrm{O})$. Die Differenz der beiden Energieniveaus kann man oben ablesen.

$$\begin{aligned} E(1f_{5/2}) - E(1p_{1/2}) &= 2B(^{16}\mathrm{O}) - B(^{15}\mathrm{O}) - B(^{17}\mathrm{O}) \\ &= 11.5203\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

c) Die Bindungsenergie der beiden Kerne unterscheidet sich deutlich, obwohl sie nur Spiegelkerne sind. Im Schalenmodell haben sie den selben Rumpf, der einzige Unterschied ist das äusserste Valenznukleon. Dies ist ein Proton im ^{17}F und ein Neutron im ^{17}O.

Für homogen geladene Kugeln erhalten wir den selben Ausdruck, den wir schon in der Weizsäcker-Massenformel für den Coulomb-Term hatten. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{5}\frac{16\hbar\alpha c}{\Delta E_{\mathrm{Bind}}} \\ &= \frac{3}{5}\frac{16\hbar\alpha c}{3.5431\,\mathrm{MeV}} \\ &= 3.9066\,\mathrm{fm}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist viel größer als 3.1113 fm., was wir aus der Gleichung $r = 1.21\,\mathrm{fm}A^{1/3}$ erhalten. Das zusätzliche Nukleon hat also einen größeren Radius als die anderen Nukleonen. Aufgrund der größeren Coulomb-Abstoßung der Protonen ist der Potentialtopf bei Fluor flacher als beim Sauerstoff.

Aufgabe 3: Deuteron Wellenfunktion

Näherungsweise kann das Potential von Proton und Neutron im Deuteron durch ein zentralsymmetrisches Kastenpotential der Tiefe $-V_0$ und Radius $r_0 \approx 1.4$ fm beschrieben werden:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \text{ für } r < r_0 \\ \quad 0 \text{ für } r > r_0 \end{cases}$$

Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung für den Grundzustand ($l = 0$) des Deuterons:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0 \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0$$

Was muss hier als Masse m eingesetzt werden? Lösen Sie die Gleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$ unter den Randbedingungen $u(r = 0) = 0$ und $u(r \to \infty) = 0$ und benutzen Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion und deren Ableitung, um die Tiefe des Potentials abzuschätzen. Gehen Sie von der Näherung aus, dass die Bindungsenergie $B = 2.25$ MeV viel kleiner als V_0 ist. Ist diese Näherung gerechtfertigt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Nukleonen bei einem Radius $r < r_0$ aufhalten?

Lösung:

Die Masse m ist die reduzierte Masse also die halbe Nukleonmasse:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_p/2$$

Für $r < r_0$ gilt:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u = 0 \qquad (E + V_0 > 0,\ u(r = 0) = 0)$$
$$\Rightarrow \quad u_1(r) = A_1 \sin kr \quad \text{mit } k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$$

Für $r > r_0$ gilt:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}Eu = 0 \qquad (E < 0 \text{ da gebundener Zustand, } u(r \to \infty) = 0)$$
$$\Rightarrow \quad u_2(r) = A_2 e^{-\kappa r} \quad \text{mit } \kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ und $\frac{d}{dr}u_1(r_0) = \frac{d}{dr}u_2(r_0)$ folgt

$$\begin{aligned} A_1 \sin kr_0 &= A_2 e^{-\kappa r_0} \\ A_1 k \cos kr_0 &= -A_2 \kappa e^{-\kappa r_0} \end{aligned}$$

Durch Division der zweiten durch die erste Gleichubg erhält man:

$$k \cot kr_0 = -\kappa$$

Da die Wellenfunktion im Grundzustand keine Knoten hat, muss $kr_0 < \pi$ sein. Wenn die Bindungsenergie $B = -E$ viel kleiner als V_0 ist, so ist auch $\kappa \ll k$. Daraus folgt

$$\cot kr_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad kr_0 \approx \frac{\pi}{2}$$

Einsetzen von k ergibt

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar \cdot r_0 = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \quad & 2m(-B+V_0) = \frac{\pi^2\hbar^2}{4r_0^2} \\
\Rightarrow \quad & V_0 = B + \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \\
\Rightarrow \quad & V_0 = 54.5 \text{ MeV} \quad \text{bzw.} \quad V_0 \approx 52.2 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $B \ll V_0$ gerechtfertigt.

Die Wahrscheinlichkeit P, dass sich die Nukleonen in einem Volumen V, das durch die Radien r_a und r_b begrenzt ist, aufhalten, ist gegeben durch:

$$P = \int_V \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\, d^3r = 4\pi \int_{r_a}^{r_b} \psi^*(r)\psi(r)\, r^2 dr = \int_{r_a}^{r_b} u^2(r)\, dr$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sind also:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^{r_0} u_1^2(r)\, dr = A_1^2 \int_0^{r_0} \sin^2 kr\, dr \quad \text{Subst: } r = \frac{x}{k}, \quad kr_0 = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{A_1^2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{A_1^2}{k}\frac{\pi}{4} \\
P_2 &= \int_{r_0}^{\infty} u_2^2(r)\, dr = A_2^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\kappa r}\, dr = A_2^2 \left[-\frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{A_2^2}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ kann mit der Näherung $kr_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Beziehung zwischen den Normierungen A_1 und A_2 hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
& u_1(r_0) = A_1 \sin kr_0 = A_1 \\
= \quad & u_2(r_0) = A_2 e^{-\kappa r_0} \\
\Rightarrow \quad & A_2 = A_1 e^{\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für P_2:

$$P_2 = \frac{A_1^2 e^{2\kappa r_0}}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} = \frac{A_1^2}{2\kappa}$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, gilt:

$$1 = P_1 + P_2 = A_1^2 \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right) \quad \Rightarrow \quad A_1^2 = \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right)^{-1}$$

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit P_1, dass sich die Nukleonen innerhalb des Radius des Kastenpotentials aufhalten:

$$P_1 = \frac{\pi}{4k\left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi\kappa}} = 0.25$$

Obwohl Proton und Neutron ein gebundenes System bilden, halten sie sich also überwiegend ausserhalb des bindenden Potentialtopfes auf.