Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 05

Bearbeitung bis 27.05.2010

Aufgabe 1: Tunneleffekt und α-Zerfall

Betrachten Sie die Streuung einer ebenen Welle der Energie E (eindimensional, in positive x-Richtung) an einer rechteckigen Potentialbarriere.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{Bereich I,} \quad -\infty < x < 0 \\ U(> E) & \text{Bereich II,} \quad 0 \leq x \leq b, \text{ und} \\ 0 & \text{Bereich III,} \quad b < x < \infty. \end{cases}$$

a) Geben Sie die Schrödingergleichung für das angegebene Potential an. Beschreiben Sie die Lösungen für die drei verschiedenen Bereiche (Amplituden A und B für einlaufende und reflektierte Welle). Veranschaulichen sie ihre Lösung an einer Skizze.

b) Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen der Potentialregionen an. Wie würden sie den Transmissionsfaktor definieren?

c) Nach einigen Rechnungen (welche an dieser Stelle nicht durchgeführt werden müssen) findet man zwischen A_{I} und A_{III} die Beziehung:

$$A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{III}} e^{ik_{\mathrm{I}}b} \left(\cosh(ik_{\mathrm{II}}b) + \underbrace{\frac{i}{2}\left(\frac{ik_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{I}}} - \frac{k_{\mathrm{I}}}{ik_{\mathrm{II}}}\right)}_{\text{In der Ordnung von 1}} \sinh(ik_{\mathrm{II}}b) \right),$$

dabei ist k_{I} die Wellenzahl im Bereich I und k_{II} die Wellenzahl im Bereich II, diese ist rein imaginär. Verwenden Sie die Gleichungen welche exponential- und hyperbolische Funktionen in Beziehung setzen, sowie die Tatsache, dass die Breite der Barriere groß im Vergleich zur de–Broglie Wellenlänge ist, um die Gleichung für den Transmissionsfaktor herzuleiten

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} b \sqrt{2m(U-E)}\right).$$

d) Wie würden Sie den Transmissionskoeffizienten aus obiger Gleichung beschreiben für den Fall einer Coulombbarriere. Geben Sie eine kurze Beschreibung mit Skizze an.

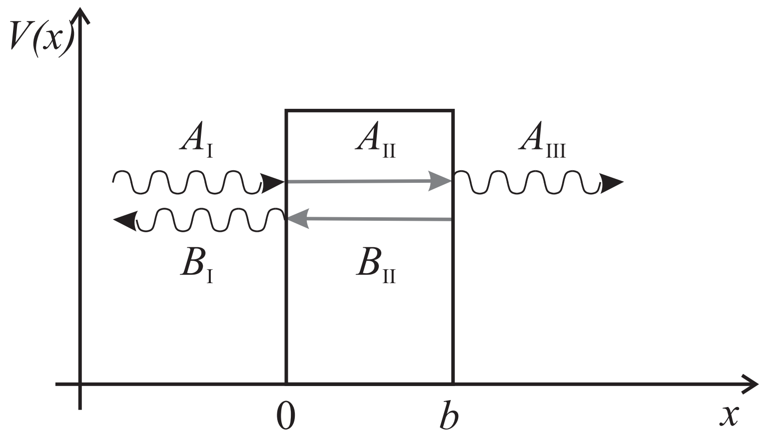
Lösung:

a) Die Schrödingergleichung für ein gegebenes Potential $V(x)$ ist

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

im stationären Fall.

Der Fall einlaufender/transmittierter und reflektierter Wellen ist wie im Bild unten gezeigt:



Wir haben eine einlaufende Welle der Amplitude A_{I} mit der Energie E. Die Potentialbarriere der Höhe U ist höher als E. Ein Teil der Welle wird an der Barriere reflektiert, diese Welle hat die Amplitude B_{I}. Die gesamte Welle welche in Bereich I besteht ist eine Überlagerung aus einlaufender und reflektierter Welle.

Da die Potentialbarreire höher ist als die Energie der einlaufenden Welle ist der Wellenvektor innerhalb der Barriere rein imaginär. Die Amplitude in Propagationsrichtung der einlaufenden Welle ist A_{II}. Am Übergang zwischen Bereich II und III wird die Welle teilweise mit der Amplitude B_{II} reflektiert und teilweise mit A_{III} transmittiert.

Klassisch ist keine Transmission in den Bereich III möglich wenn die Potentialbarriere höher als die Energie der Welle ist, Quantenmechanisch wird die Welle jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit transmittiert.

Darum gilt für die Wellenfunktionen:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{I}} &= A_{\mathrm{I}} \exp(ik_{\mathrm{I}}x) + B_{\mathrm{I}} \exp(-ik_{\mathrm{I}}x) && \text{mit} \quad k_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \\
\psi_{\mathrm{II}} &= A_{\mathrm{II}} \exp(ik_{\mathrm{II}}x) + B_{\mathrm{II}} \exp(-ik_{\mathrm{II}}x) && \text{mit} \quad k_{\mathrm{II}} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}, \\
\psi_{\mathrm{III}} &= A_{\mathrm{III}} \exp(ik_{\mathrm{III}}x) && \text{mit} \quad k_{\mathrm{III}} = k_{\mathrm{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}.
\end{aligned}$$

Der Wellenvektor in Region II ist — wie oben schon erwähnt — rein imaginär. Damit lässt sich $\kappa_{\mathrm{II}} = ik_{\mathrm{II}}$ als reale Größe schreiben. Die Wellenvektoren in Bereich I und III sind identisch, da das Teilchen dort dasselbe Potential spürt.

b) Die Randbedingungen stellen sicher, dass die Welle an den Grenzen stetig ist. Darum müssen wir fordern, dass die Funktion und ihre erste Ableitung an diesen Stellen stetig ist.

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}},\ \ \psi_{\mathrm{II}}(b) = \psi_{\mathrm{III}}(b)\\ \psi'_{\mathrm{I}}(0) = \psi'_{\mathrm{II}},\ \ \psi'_{\mathrm{II}}(b) = \psi'_{\mathrm{III}}(b)\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}&A_{\mathrm{I}} + B_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{II}} + B_{\mathrm{II}}\\ &ik_{\mathrm{I}}(A_{\mathrm{I}} - B_{\mathrm{I}}) = \kappa_{\mathrm{II}}(A_{\mathrm{II}} - B_{\mathrm{II}})\\ &A_{\mathrm{III}}\exp(ik_{\mathrm{I}}b) = A_{\mathrm{II}}\exp(\kappa_{\mathrm{II}}b) + B_{\mathrm{II}}\exp(-\kappa_{\mathrm{II}}b)\\ &ik_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{III}}\exp(ik_{\mathrm{I}}b) = \kappa_{\mathrm{II}}(A_{\mathrm{II}}\exp(\kappa_{\mathrm{II}}b) - B_{\mathrm{II}}\exp(-\kappa_{\mathrm{II}}b))\end{aligned}$$

für die Amplituden.

Der Transmissionsfaktor lässt sich durch die einlaufende Stromdichte $\vec{j}_{\mathrm{in}}$ und die Stromdichte hinter der Potentialbarriere $\vec{j}_{\mathrm{out}}$ definieren als

$$\begin{aligned}T &= \frac{|\vec{j}_{\mathrm{out}}|}{|\vec{j}_{\mathrm{in}}|}\\ &= \frac{|\psi_{\mathrm{out}}|^2}{|\psi_{\mathrm{in}}|^2}\frac{v_{\mathrm{out}}}{v_{\mathrm{in}}}.\end{aligned}$$

In unserem Fall ist die einfallende Wellenfunktion gegeben durch $\psi_{\mathrm{in}} = \psi_{\mathrm{I}}$ und die auslaufende durch $\psi_{\mathrm{out}} = \psi_{\mathrm{III}}$. Die Wellengeschwindigkeiten in Region I und III sind gleich, analog zu ihren Wellenvektoren spüren sie das gleiche Potential $v_{\mathrm{out}} = v_{\mathrm{in}}$. Das Ergebnis ist ein Transmissionsfaktor von

$$\begin{aligned}T &= \frac{|\psi_{\mathrm{III}}|^2}{|\psi_{\mathrm{I}}|^2}\\ &= \frac{|\psi_{\mathrm{III}}\psi^\star_{\mathrm{III}}|}{|\psi_{\mathrm{I}}\psi^\star_{\mathrm{I}}|}\\ &= \frac{|A_{\mathrm{III}}|^2}{|A_{\mathrm{I}}|^2},\end{aligned}$$

Das Verhältnis der quadratischen Amplituden in Region I und III.

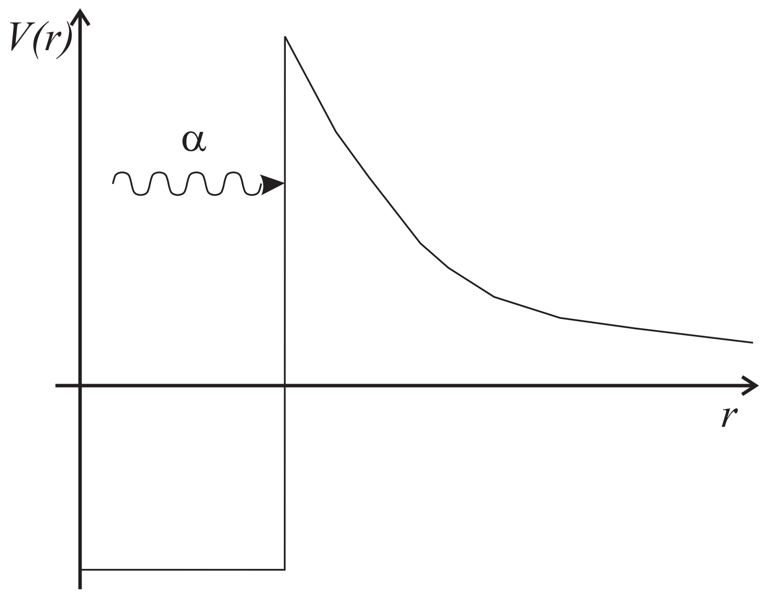
c) Ist die Beziehung zwischen den zwei Amplituden A_{I} und A_{III} gegeben wie in der Übung, dann können wir eine einfache Gleichung für den Transmissionsfaktor ableiten, indem wir die Beziehung zwischen hyperbolischen Funktionen und der Exponentialfunktion anwenden.

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{I}} &= A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\left(\cosh(ik_{\mathrm{II}}b) + \underbrace{\frac{i}{2}\left(\frac{ik_{\mathrm{II}}}{k_{\mathrm{I}}} - \frac{k_{\mathrm{I}}}{ik_{\mathrm{II}}}\right)}_{\text{Ordnung von 1}}\sinh(ik_{\mathrm{II}}b)\right)\\
&= A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b} + \mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{II}}b}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b} - \mathrm{e}^{-\kappa_{\mathrm{II}}b}\right)\right)\\
&= A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b}\right)\\
&= A_{\mathrm{III}}\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b}
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir, was wir in Teilaufgabe b) über den Transmissionsfaktor hergeleitet haben

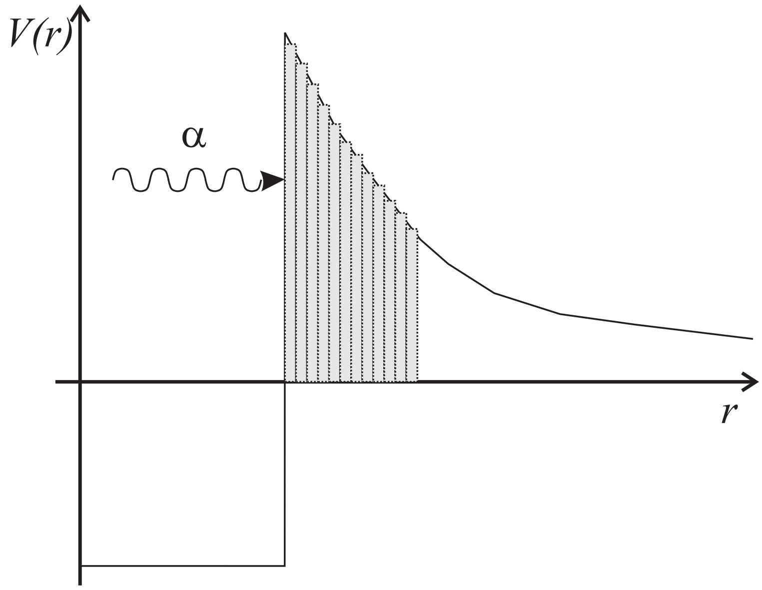
$$\begin{aligned}
T &= \frac{A_{\mathrm{III}}A_{\mathrm{III}}^{\star}}{A_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}^{\star}}\\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b}\mathrm{e}^{ik_{\mathrm{I}}b}\mathrm{e}^{\kappa_{\mathrm{II}}b}}\\
&= \mathrm{e}^{-2\kappa_{\mathrm{II}}b}\\
&= \mathrm{e}^{-\frac{2b}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}}
\end{aligned}$$

d) Betrachtet man den α Zerfall eines Atomkerns, dann ist die Annahme eines Rechteckpotentials eine zu starke Vereinfachung. Ein realistischeres Potential wäre:



Es besteht aus zwei überlappenden Teilen: Das Potential innerhalb des Kerns, welches einen Potentialtopf darstellt, und das Coulombpotential, welches groß für geringe Abstände ist und für $r \to \infty$ gegen 0 geht.

Wollen wir dieses Problem lösen, können wir das Potential in Bereiche unterteilen. Innerhalb dieser Bereiche nähern wir das Potential jeweils durch ein Rechteck an. Lassen wir nun die Breite dieser Bereiche gegen 0 gehen und integrieren über alle, sollten wir ein vernünftiges Ergebnis erhalten.



Damit erhält man ein Ergebnis, bei welchem man im Exponenten des Transmissionsfaktors integriert

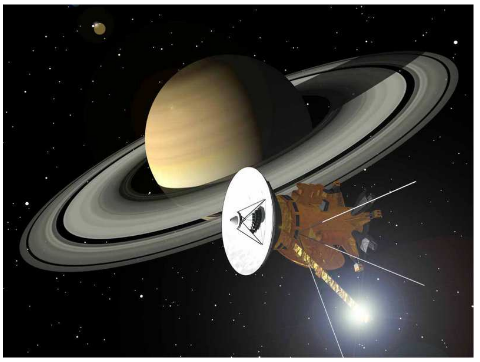
$$T = \exp(-2\int_R^{R'} k \mathrm{d}r).$$

Berücksichtigt man die Radialsymmetrie, erhält man verschiedene Partialwellen in der Gleichung. Die Wellenzahl ist gegeben durch

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(V(r)\frac{(l+1)l\hbar}{2mr} - E\right)}.$$

Danach war aber nicht explizit gefragt.

Aufgabe 2: Die Radioisotopengeneratoren der Raumsonde Cassini



Die Raumsonde Cassini startete 1997 und erreichte ihr Ziel Saturn im Jahr 2004. Aufgrund der großen Entfernung zur Sonne ist die photovoltaische Stromerzeugung nicht möglich. Stattdessen werden drei Radioisotopengeneratoren eingesetzt, welche insgesamt 32.8 kg Plutoniumdioxid (PuO_2) enthalten. Das verwendete Plutonium besteht hauptsächlich aus dem Isotop ^{238}Pu mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 87.7\,\text{a}$ und einer Energie der α-Teilchen von $E_\alpha = 5.593\,\text{MeV}$.

Die entstehende Wärme wird durch einen thermoelektrischen Generator in elektrische Energie umgewandelt. Die Umwandlungseffizienz ist hierbei $\varepsilon \approx 8\,\%$.

a) Berechnen Sie die Aktivität des Plutoniums in den Generatoren zu Beginn beim Start im Jahre 1997 und am geplanten Ende der Primärmission nach 11 Jahren.

b) Berechnen Sie die elektrische Leistung, die zu Beginn und 11 Jahre später produziert wird.

c) Schätzen Sie die benötigte Fläche für Solarzellen ab, die notwendig wären, um dieselbe elektrische Leistung zur Verfügung zu stellen. Solarzellen in der Weltraumtechnik erreichen einen Wirkungsgrad von $\varepsilon \approx 25\,\%$.

Lösung:

a) Wir wissen dass die Zerfallsrate mit der Halbwertszeit zusammenhängt über:

$$N(T_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0$$
$$= N_0 \exp(-\lambda T_{1/2}),$$

daraus erhalten wir $\lambda T_{1/2} = \ln 2$, in unserem Fall ist die Zerfallsrate (normiert auf einen Kern) $\lambda = 2.50 \cdot 10^{-10}/\text{s}$.

Die Aktivität einer Substanz im Verhältnis zur Zahl der radioaktiven Kerne in der Probe ist gegeben durch

$$A = \lambda N$$
$$= \lambda N_\text{A} \frac{m}{M_\text{mol}(\text{PuO}_2)}$$
$$\text{mit} \quad M_\text{mol}(\text{PuO}_2) \approx M_\text{mol}(\text{Pu}) + 2M_\text{mol}(O) = 270.05\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

Mit den oben angegebenen Werten haben die Generatoren eine Aktivität von $A_0 = 1.83 \cdot 10^{16}/\mathrm{s}$ beim Start. Zu einem späteren Zeitpunkt ist die Aktivität gegeben durch

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \exp(-\lambda t) \\ &= A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right) \end{aligned}$$

Nach 11 Jahren ist sie auf $A_0 = 1.68 \cdot 10^{16}/\mathrm{s}$ gefallen.

b) Um die Leistung zu bestimmen muss man die Energie die durch α-Teilchen pro Zeitintervall Δt emittiert wird bestimmen. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{E_{\mathrm{tot}}(t)}{\Delta t} \\ &= A(t) \cdot E_\alpha . \end{aligned}$$

Die erzeugte Leistung ist $P_0 = 16399\,\mathrm{W}$ and $P(11\,\mathrm{a}) = 15055\,\mathrm{W}$. Mit einer Effizient von $\varepsilon = 8\,\%$ ist die elektrische Leistung $P_0^{\mathrm{el}} = 1311\,\mathrm{W}$ and $P^{\mathrm{el}}(11\,\mathrm{a}) = 1204\,\mathrm{W}$.

Zur Diskussion im Tutorium: Die tatsächlichen erwarteten Werte für die Cassini-Sonde sind $P_0^{\mathrm{el}} = 855\,\mathrm{W}$ and $P^{\mathrm{el}}(11\,\mathrm{a}) = 633\,\mathrm{W}$. Mögliche Ursachen für die Abweichung sind:

- Eine Mischung mit anderen Plutoniumisotopen längerer Halbwertszeit (z. B. $T_{1/2}(^{239}\mathrm{Pu}) = 24110\,\mathrm{a}$).
- Zeit zwischen Isotopenproduktion und Start.
- Abnahme der Effizienz.
- Hitzeverluste.
- Verlust von α-Teilchen.

c) Solarzellen die in Satelliten verwendet werden erreichen Effizienzen von bis zu $\varepsilon_{\mathrm{sc}} = 25\,\%$. Die Solarkonstante ist $q_{\mathrm{S}} = 1367\,\mathrm{W/m^2}$. Der mittlere Abstand der Erde zur Sonne ist $R_{\mathrm{ES}} = 1\,\mathrm{AU}$, der mittlere Abstand des Saturn zur Sonne ist $R_{\mathrm{SaS}} = 9.5\,\mathrm{AU}$.

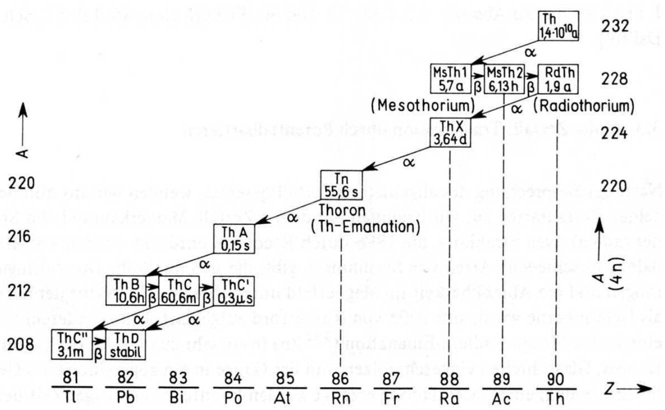
Nimmt man senkrechten Einfall der Sonnenstrahlung an (durch Ausrichten der Solarzellen), dann wäre die produzierte elektrische Leistung pro Fläche

$$P^{el}/A = \varepsilon_{\mathrm{sc}} q_{\mathrm{S}} \frac{R_{\mathrm{ES}}^2}{R_{\mathrm{SaS}}^2} = 3.8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}. \tag{1}$$

Um eine vergleichbare elektrische Leistung zu erhalten wie mit dem Radioisotpengenerator wären mehr als $300\,\mathrm{m}^2$ Solarzellen nötig.

Aufgabe 3: Thorium-Zerfallskette

Eine Probe Erz enthält 86.7 g ^{232}Th und 17.7 g ^{208}Pb. Berechnen sie das Alter der Probe unter der Annahme, dass sie ursprünglich kein ^{208}Pb enthielt.



Lösung:

In der ^{232}Th Zerfallskette haben alle sekundären Zerfälle abgesehen vom ^{232}Th Zerfall vernachlässigbare Halbwertszeiten. Das Verhältnis von $N(t)/N_0$ ist mit $N(t) \propto m(t) = 86.7\,\mathrm{g}$ und $m_0 = m(^{232}\mathrm{Th}) + m(^{208}\mathrm{Pb}) \cdot 232/208$ gegeben als

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{m(t)}{m_0} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}}. \tag{2}$$

Dies ergibt für das Alter

$$t = -\frac{1}{\ln 2} T_{1/2} \ln \frac{m(t)}{m_0}. \tag{3}$$

das Verhältnis $m(t)/m_0 = 86.7/(86.7 + 17.7 \cdot 232/208) = 86.7/112.0 = 0.814$. Das Alter der Erzprobe ist damit $4.14 \cdot 10^9$ Jahre.