Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 06

Bearbeitung bis 10.06.2010

Aufgabe 1: Das β-Spektrum und Fermis Goldene Regel

Die Form des β-Spektrum ist gegeben durch

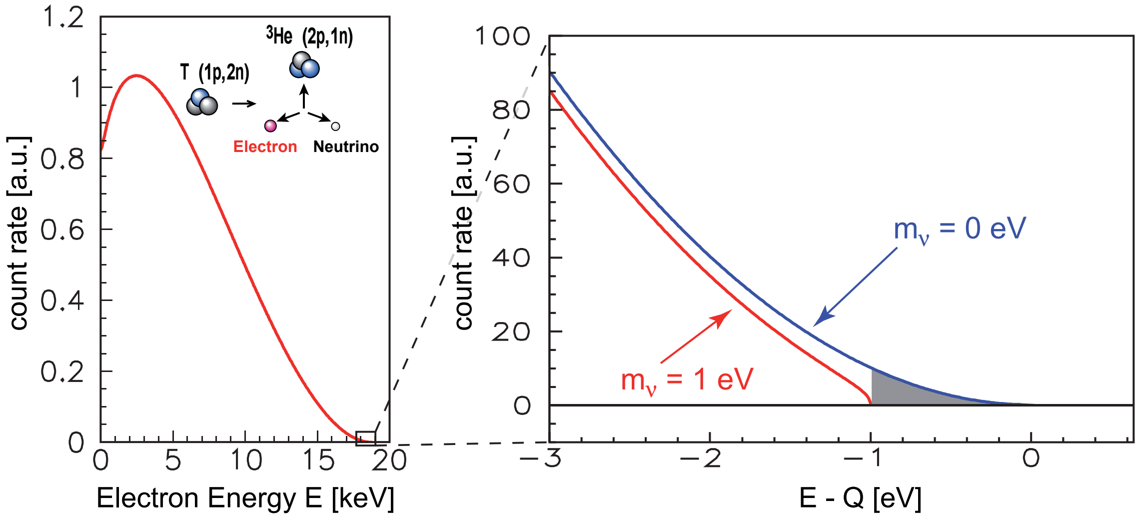
$$\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}E} = C \cdot |M^2_{\mathrm{had}}| \cdot F(E, Z+1) \cdot p_{\mathrm{e}} \cdot \underbrace{(E + m_{\mathrm{e}}c^2)}_{= E_{\mathrm{e,ges}}} \cdot E_\nu \cdot \underbrace{\sqrt{E_\nu^2 - m^2_{\nu_{\mathrm{e}}} c^4}}_{= p_\nu} \cdot \underbrace{\Theta(E_\nu - m_{\nu_{\mathrm{e}}} c^2)}_{\to E_\nu > m_{\nu_{\mathrm{e}}} c^2\ !},$$

wobei alle konstanten Vorfaktoren zur Vereinfachung in C zusammengefasst wurden. Des Weiteren ist $E_\nu = Q - E$ die Maximalenergie der Neutrinos und $F(E, Z+1)$ die Fermifunktion, die die Coulomb-Wechselwirkung des emittierten Elektrons mit dem Kernladung berücksichtigt. Vorsicht: E stellt die kinetische Energie der emittierten Elektronen dar, wogegen E_ν die Gesamtenergie der Neutrinos beschreibt.
Dieser Ausdruck kann mittels Fermis Goldener Regel hergeleitet werden.

(a) Wie ist die Anzahl von verschiedenen Zuständen $\mathrm{d}n$ in einem Volumen V im Impulsraum zwischen p und $p + \mathrm{d}p$? Diese Anzahl lässt sich aus dem Fermigas Modell herleiten.

(b) Die Masse des Kerns ist groß im Vergleich zur Masse des emittierten Leptons. Der Rückstoßimpuls wird dadurch immer vom Kern ausgeglichen, sodass die Richtung von emittiertem Elektron und Neutrino in guter Näherung unkorreliert sind. Daher kann die allgemeine Zustandsdichte als Produkt von zwei unabhängigen Dichten für Elektronen und Neutrinos betrachtet werden. Leiten Sie den Ausdruck für die Zustanddichte $\rho(E)$ in Fermis Goldener Regel her. Verwenden Sie dazu $E_\nu = Q - E$ um alle Energien und Impulse durch Terme der kinetischer Energie und Masse des Elektrons auszudrücken.

(c) Das Übergangsmatrixelement $|M|$ kann in einen leptonischen Teil M_{lep} und einen hadronischen Teil M_{had} getrennt werden. Leiten sie einen Ausdruck für das β-Spektrum unter Verwendung von $F(E, Z+1) = V^2 \cdot |M^2_{\mathrm{lep}}|$ her. Der leptonische Teil resultiert aus der Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Leptonen innerhalb des Kerns aufhalten: $1/V$ für die Neutrinos und $1/V \cdot F(E, Z+1)$ für die Elektronen.



(d) **Zur Diskussion im Tutorium:** Zur direkten Bestimmung der Neutrinomasse wird das Elektronen-Spektrum von β-Strahlern wie Tritium oder Rhenium untersucht.

(i) Betrachten Sie die Observable der ν-Masse und ihre Abhängigkeit.

(ii) Um welchen Faktor müssen systematische und statistische Fehler reduziert werden, wenn die Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung verbessert werden soll?

(ii) In welchem Bereich des Spektrums hat die Neutrinomasse den größten Einfluss auf dessen Verlauf?

(iv) Wie groß ist der Anteil von Elektronen in einem 1 eV breiten Energieintervall unterhalb des Endpunktes? Welche Rate erwartet man also in diesem Energiebereich, wenn die β-Quelle eine Aktivität von 10^{11} Bq hat. Verwenden Sie für $Q = 18{,}6\,\mathrm{keV}$ und nehmen Sie an, dass das Matrixelement $|M_{\mathrm{had}}|$ unabhängig von der Energie ist.

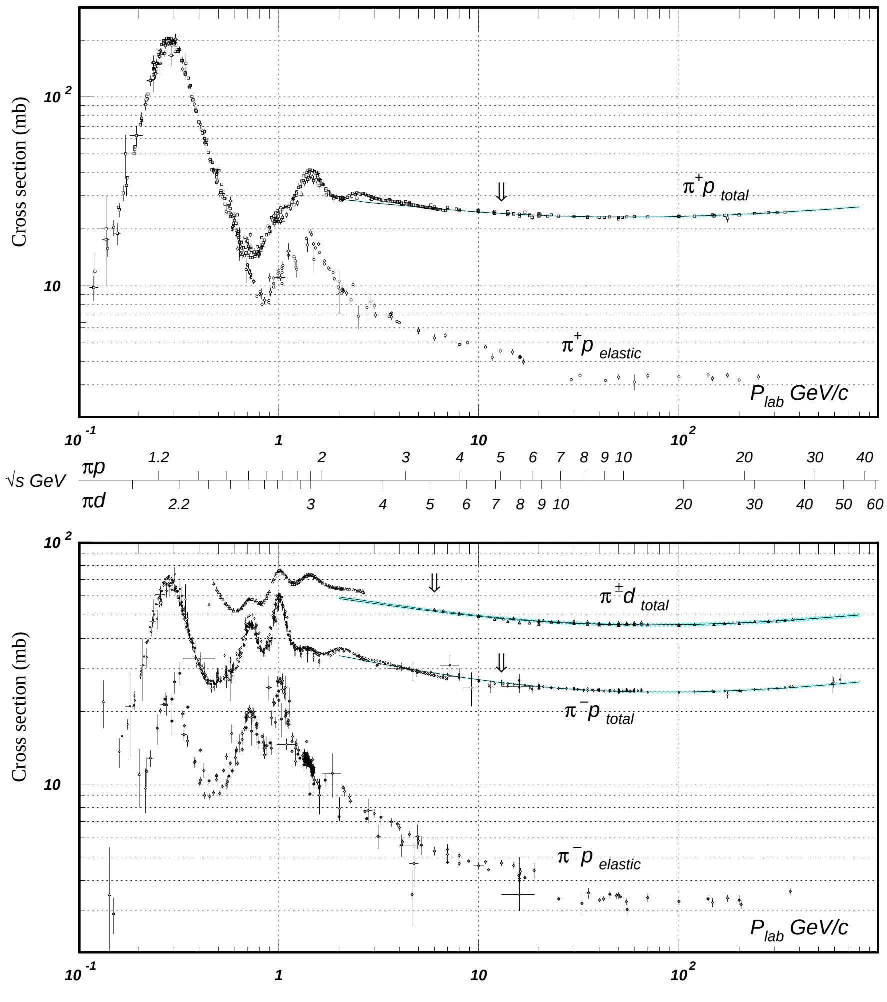
Aufgabe 2: Feynman-Diagramme

a) Zeichnen Sie alle Feynman-Diagramme für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ bei denen genau ein Photon ausgetauscht wird. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ betrachtet?

b) Zeichnen Sie jeweils ein Feynman-Diagramm für β^--Zerfall, β^+-Zerfall und Elektroneneinfang. Beachten Sie dabei, dass das ausgetauschte W-Boson an Vertices mit Nukleonen und an Vertices mit Leptonen koppelt. Vertices mit Nukleonen und Leptonen gleichzeitig kommen nicht vor.

Aufgabe 3: Isospin

Der Isospin ist eine Größe welche bei Prozessen der Starken Wechselwirkung erhalten ist und analog zum Spin behandelt wird. Betrachten Sie die Maxima der Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen möglichen Reaktionen der Pionenstreuung. Die Maxima entsprechen den Anregungen der $\Delta(1232)$-Resonanz (siehe Schaubilder unten, aus [1]). Es gibt vier verschiedene Ladungszustände der Resonanz, während Pionen mit drei verschiedenen Ladungen auftreten.



a) Ergänzen Sie die Werte des Isospins I und I_3 in der unten stehenden Tabelle, da diese für die weiteren Teilaufgaben gebraucht werden, und schätzen Sie die Wirkungsquerschnitte der Δ–Resonanz Peaks (bei $\sqrt{s} = 1232$ MeV) aus dem Plot ab.

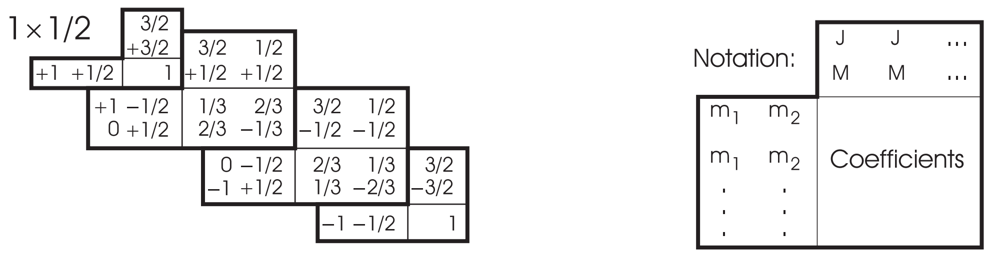
Teilchen	I	I_3
Proton p		
Neutron n		
π^-		
π^0		
π^+		
Δ^-		
Δ^0		
Δ^+		
Δ^{++}		

Kanal	elastisch/total	Wirkungsquerschnitt
$p\pi^+$	total	
$p\pi^+$	elastisch	
$p\pi^-$	total	
$p\pi^-$	elastisch	

b) Geben Sie alle möglichen Reaktionen für die vier verschiedenen Wirkungsquerschnitte $\pi p \to \Delta \to \pi N$ an, sowie die Quantenzahlen I, I_3 für die Anfangs-, Zwischen- und Endzustände.

c) Verwenden Sie die unten angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten (CG) um die relativen Höhen der vier Wirkungsquerschnitte tehoretisch zu berechnen. (Zur Erinnerung: $\sigma \sim \mathrm{CG}^2(\text{anfangs} \to \text{zwischen}) \cdot \mathrm{CG}^2(\text{zwischen} \to \text{end})!$)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



Clebsch–Gordan-Koeffizienten für Isospins 1 und 1/2 im Anfangszustand (aus [1]).

Literatur

[1] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592** (2004) 1.