

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 06

Bearbeitung bis 10.06.2010

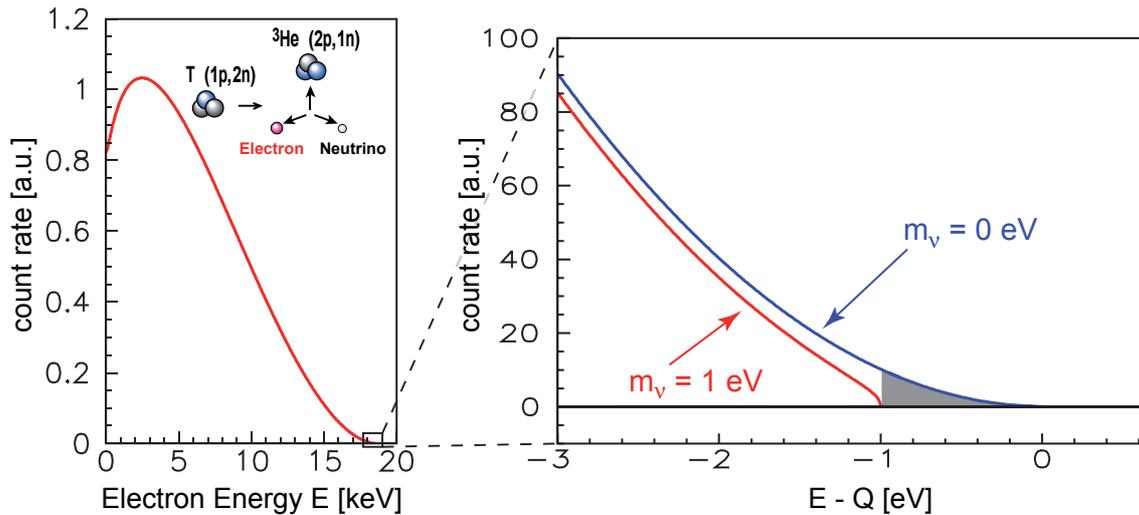
Aufgabe 1: Das β -Spektrum und Fermis Goldene Regel

Die Form des β -Spektrum ist gegeben durch

$$\frac{d^2N}{dt dE} = C \cdot |M_{\text{had}}^2| \cdot F(E, Z+1) \cdot p_e \cdot \underbrace{(E + m_e c^2)}_{= E_{e,\text{ges}}} \cdot E_\nu \cdot \underbrace{\sqrt{E_\nu^2 - m_{\nu_e}^2 c^4}}_{= p_\nu} \cdot \underbrace{\Theta(E_\nu - m_{\nu_e} c^2)}_{\rightarrow E_\nu > m_{\nu_e} c^2!},$$

wobei alle konstanten Vorfaktoren zur Vereinfachung in C zusammengefasst wurden. Des Weiteren ist $E_\nu = Q - E$ die Maximalenergie der Neutrinos und $F(E, Z+1)$ die Fermifunktion, die die Coulomb-Wechselwirkung des emittierten Elektrons mit dem Kernladung berücksichtigt. Vorsicht: E stellt die kinetische Energie der emittierten Elektronen dar, wogegen E_ν die Gesamtenergie der Neutrinos beschreibt. Dieser Ausdruck kann mittels Fermis Goldener Regel hergeleitet werden.

- Wie ist die Anzahl von verschiedenen Zuständen dn in einem Volumen V im Impulsraum zwischen p und $p + dp$? Diese Anzahl lässt sich aus dem Fermigas Modell herleiten.
- Die Masse des Kerns ist groß im Vergleich zur Masse des emittierten Leptons. Der Rückstoßimpuls wird dadurch immer vom Kern ausgeglichen, sodass die Richtung von emittiertem Elektron und Neutrino in guter Näherung unkorreliert sind. Daher kann die allgemeine Zustandsdichte als Produkt von zwei unabhängigen Dichte für Elektronen und Neutrinos betrachtet werden. Leiten Sie den Ausdruck für die Zustandsdichte $\rho(E)$ in Fermis Goldener Regel her. Verwenden Sie dazu $E_\nu = Q - E$ um alle Energien und Impulse durch Terme der kinetischer Energie und Masse des Elektrons auszudrücken.
- Das Übergangsmatrixelement $|M|$ kann in einen leptonischen Teil M_{lep} und einen hadronischen Teil M_{had} getrennt werden. Leiten sie einen Ausdruck für das β -Spektrum unter Verwendung von $F(E, Z+1) = V^2 \cdot |M_{\text{lep}}^2|$ her. Der leptonische Teil resultiert aus der Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Leptonen innerhalb des Kerns aufhalten: $1/V$ für die Neutrinos und $1/V \cdot F(E, Z+1)$ für die Elektronen.



(d) **Zur Diskussion im Tutorium:** Zur direkten Bestimmung der Neutrinomasse wird das Elektronen-Spektrum von β -Strahlern wie Tritium oder Rhenium untersucht.

- (i) Betrachten Sie die Observable der ν -Masse und ihre Abhängigkeit.
- (ii) Um welchen Faktor müssen systematische und statistische Fehler reduziert werden, wenn die Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung verbessert werden soll?
- (ii) In welchen Bereich des Spektrums hat die Neutrinomasse den größten Einfluss auf dessen Verlauf?
- (iv) Wie groß ist der Anteil von Elektronen in einem 1 eV breiten Energieintervall unterhalb des Endpunktes? Welche Rate erwartet man also in diesem Energiebereich, wenn die β -Quelle eine Aktivität von 10^{11} Bq hat. Verwenden Sie für $Q = 18,6$ keV und nehmen Sie an, dass das Matrixelement $|M_{\text{had}}|$ unabhängig von der Energie ist.

Lösung:

Definitionen nach Otten, Weinheimer [2]

Zerfallsenergie Q Die Freisetzungüberschussenergie (release surplus energy) Q wird auf die kinetische Energie des β Teilchen E , die Gesamtenergie des Neutrinos E_ν , die Rückstoßenergie E_{rec} des Tochterkerns sowie die Anregung des Tochterkerns in einen Endzustand V_j aufgeteilt.

$$Q = E + E_\nu + E_{\text{rec}} + V_j \quad (1)$$

Endpunktenergie E_0 Die Endpunktsenergie ist die Energie an der das Spektrum endet, falls der Tochterkern im Grundzustand erzeugt wird ($V_j = V_0 = 0$)

$$E_0 = Q - E_{\text{rec}} \quad (2)$$

Gesamtenergie des Elektrons $E_{e,\text{ges}}$ Die Gesamtenergie des Elektrons beträgt
 $E_{e,\text{ges}} = E + m_e c^2$

Im folgenden wollen wir zur Vereinfachung sowohl die Rückstoßenergie E_{rec} als auch das Endzustandsspektrum V_j vernachlässigen.

- (a) Die Anzahl unterschiedlicher Zustände dn in einem Volumen V mit Impulsen zwischen p und $p + dp$ bei einer gegebenen Energie E_{ges} lautet

$$dn = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V p E_{\text{ges}} dE_{\text{ges}}}{h^3 c^2}. \quad (3)$$

(Verwende $p = 1/c \cdot \sqrt{E_{\text{ges}}^2 - m^2 c^4}$ und $dp/dE_{\text{ges}} = E_{\text{ges}}/c \cdot (E_{\text{ges}}^2 - m^2 c^4)^{-1/2}$, dadurch wird $dp = E_{\text{ges}}/c \cdot (E_{\text{ges}}^2 - m^2 c^4)^{-1/2} dE_{\text{ges}}$.) Die Zustandsdichte pro Energieintervall beträgt

$$\frac{dn}{dE_{\text{ges}}} = \frac{V p E_{\text{ges}}}{2\pi^2 \hbar^3 c^2}. \quad (4)$$

- (b) Die Dichte $\rho(E)$ für unabhängige Neutrino- und Elektronenzustandsdichte ist

$$\rho(E) = \frac{dn_e}{dE_{e,\text{ges}}} \cdot \frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V^2 p_e E_{e,\text{ges}} p_\nu E_\nu}{4\pi^4 \hbar^6 c^4}. \quad (5)$$

(Verwende, dass das Differential der kinetischen Energie E gleich den Differentialen der Gesamtenergien $E_{e,\text{ges}}$ und E_ν ist.) Mit $E_\nu = Q - E$ und $p_\nu = \sqrt{(E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4)}/c^2 = \sqrt{((Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4)}/c^2$ wird die Dichte $\rho(E)$

$$\rho(E) = p_{e,\text{ges}} E_{e,\text{ges}} \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot (Q - E) \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (6)$$

- (c) Fermis Goldene Regel lautet

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} |M^2| \rho(E). \quad (7)$$

Aus Gleichung (6) und $|M^2| = A |M_{\text{lep}}^2| |M_{\text{had}}^2|$ erhält man

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} A |M_{\text{lep}}^2| |M_{\text{had}}^2| p_e E_{e,\text{ges}} \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot (Q - E) \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (8)$$

Die Verwendung von $|M_{\text{lep}}^2| = 1/V^2 \cdot F(E, Z + 1)$ und $E_\nu = Q - E$ führt zu

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} A \cdot F(E, Z + 1) \cdot |M_{\text{had}}^2| p_e E_e \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot \frac{E_\nu}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (9)$$

Alle Konstanten werden in A' zusammengefasst. Mit $\Theta(E_\nu - m_\nu c^2)$ kann die Bedingung erfüllt werden, dass $\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \geq 0$ und $E_{e,\text{ges}} = m_e c^2 + E$ gilt. Die Form des β -Spektrums ist damit gegeben als

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = A' \cdot F(E, Z + 1) \cdot |M_{\text{had}}^2| p_e \cdot (m_e c^2 + E) \cdot \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot E_\nu \cdot \Theta(E_\nu - m_\nu c^2). \quad (10)$$

(d) **Diskussion im Tutorium**

- (i) Die Observable in der Neutrinomassenmessung mittels β -Spektrum ist m_ν^2 .
- (ii) Eine Verringerung der systematischen und statistischen Fehler um zwei Größenordnungen (z.B. 100) führt zu einer Verbesserung der Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung (z.B. 10). Der Grund dafür ist das die Observable m_ν^2 ist und nicht m_ν .
- (ii) Wie im Bild gezeigt hat die Neutrinomasse nur einen deutlichen Einfluss am Endpunkt des Spektrums.
- (iv) Der Anteil der Elektronen im 1 eV breiten Intervall unterhalb des Endpunkts (in diesem vereinfachenden Fall ist $E_0 = Q$) kann wie folgt abgeschätzt werden.

$$\delta = \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^3 \quad (11)$$

$$= \left(\frac{1 \text{ eV}}{18600 \text{ eV}} \right)^3 \quad (12)$$

$$= 1.6 \cdot 10^{-13} \quad (13)$$

Verwende Näherung aus Vorlesung 10 Seite 17 für die Zählrate $N(E)$:

$$N(E) \propto (E_0 - E)^2 \text{ für große } E, \text{ bzw.} \quad (14)$$

$$\propto (Q - E)^2 \text{ in aktueller Notation.} \quad (15)$$

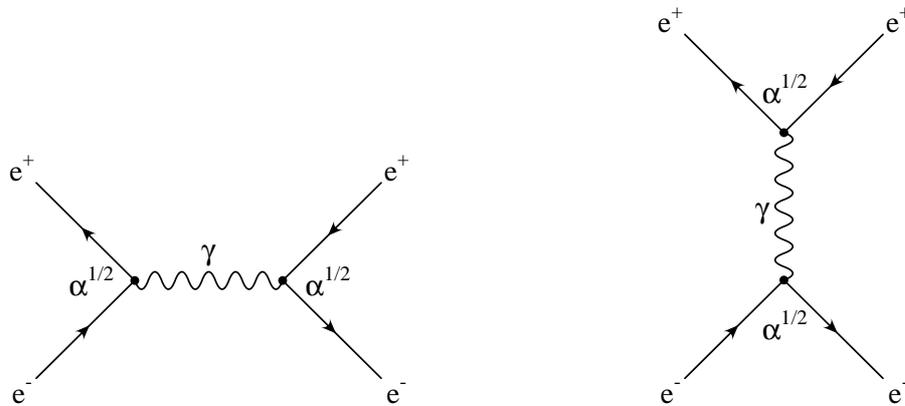
(Näherung ergibt sich auch aus Taylor-Entwicklung des Spektrums um $m_\nu = 0$.) Damit erhalten wir eine Rate in diesem Energiebereich von $n = \delta \cdot A = 1.6 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{11} \text{ Bq} = 0.016 \frac{1}{\text{s}}$. Dies sind also ca. 1300 Ereignisse am Tag.

Aufgabe 2: Feynman-Diagramme

- a) Zeichnen Sie alle Feynman-Diagramme für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ bei denen genau ein Photon ausgetauscht wird. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ betrachtet?
- b) Zeichnen Sie jeweils ein Feynman-Diagramm für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang. Beachten Sie dabei, dass das ausgetauschte W -Boson an Vertices mit Nukleonen und an Vertices mit Leptonen koppelt. Vertices mit Nukleonen und Leptonen gleichzeitig kommen nicht vor.

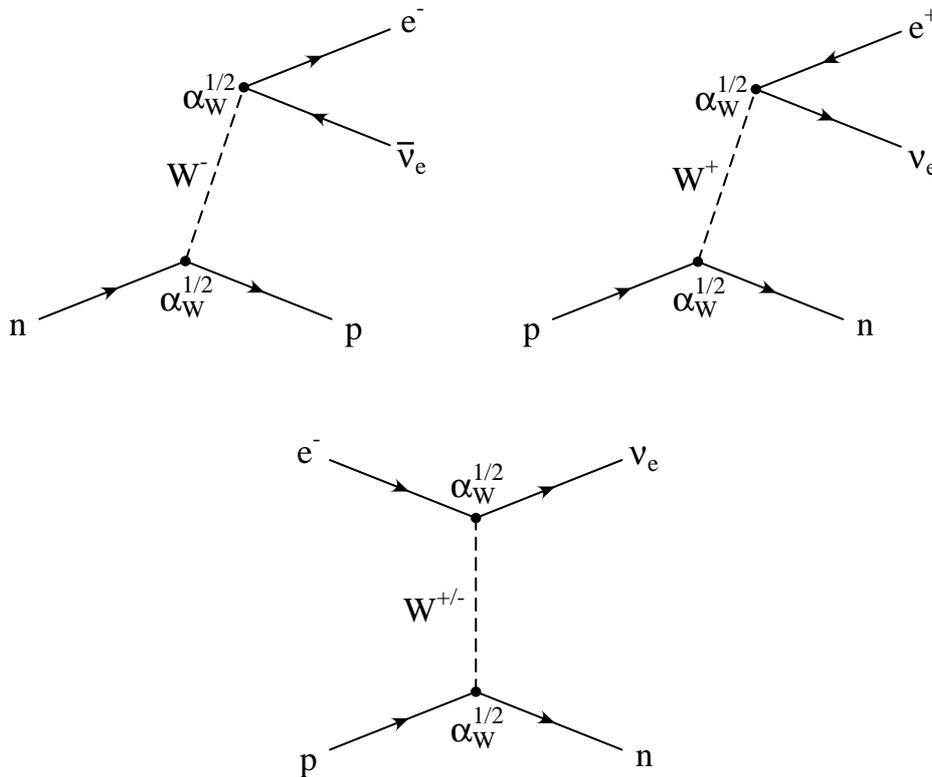
Lösung:

- a) Es gibt zwei Feynman-Diagramme führender Ordnung in α für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Zeitachse nach rechts, Ortsachse nach oben):



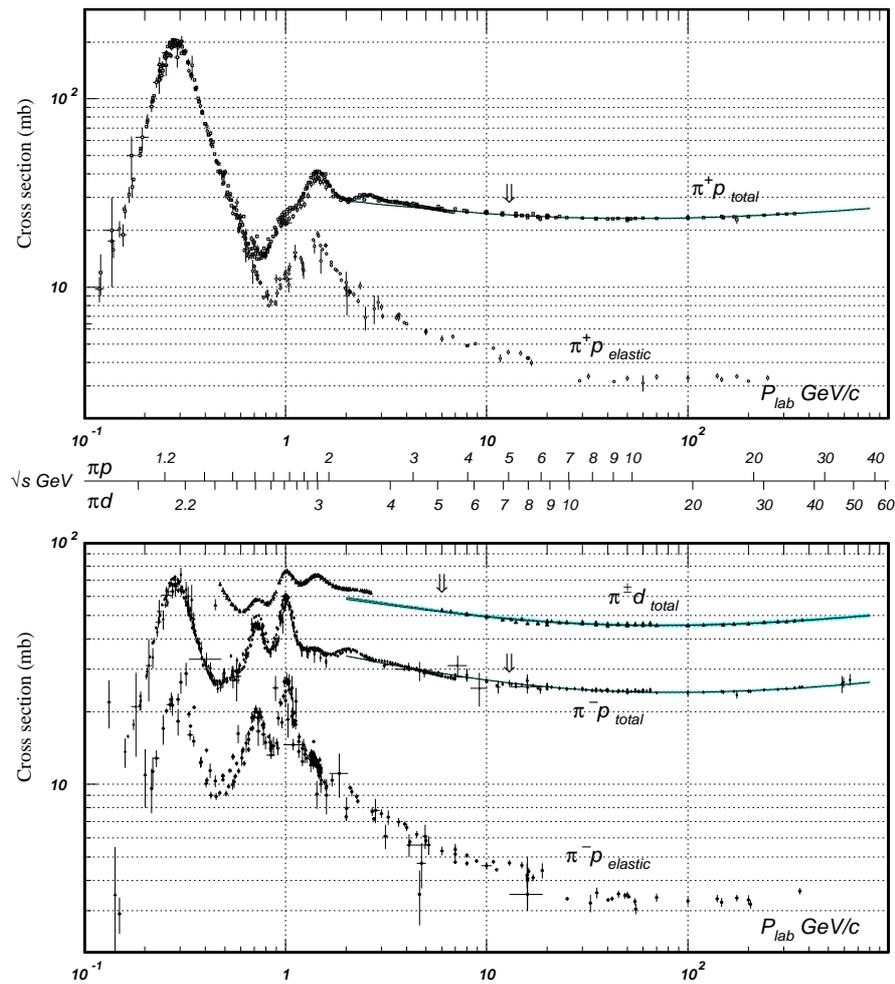
Bei der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ gibt es nur einen Graphen führender Ordnung in α und zwar den Annihilationsgraphen analog zum ersten Diagramm.

- b) Die Feynmandiagramme führender Ordnung in α_W für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang sind:



Aufgabe 3: Isospin

Der Isospin ist eine Größe welche bei Prozessen der Starken Wechselwirkung erhalten ist und analog zum Spin behandelt wird. Betrachten Sie die Maxima der Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen möglichen Reaktionen der Pionenstreuung. Die Maxima entsprechen den Anregungen der $\Delta(1232)$ -Resonanz (siehe Schaubilder unten, aus [1]). Es gibt vier verschiedene Ladungszustände der Resonanz, während Pionen mit drei verschiedenen Ladungen auftreten.



- a) Ergänzen Sie die Werte des Isospins I und I_3 in der unten stehenden Tabelle, da diese für die weiteren Teilaufgaben gebraucht werden, und schätzen Sie die Wirkungsquerschnitte der Δ -Resonanz Peaks (bei $\sqrt{s} = 1232$ MeV) aus dem Plot ab.

Teilchen	I	I_3
Proton p		
Neutron n		
π^-		
π^0		
π^+		
Δ^-		
Δ^0		
Δ^+		
Δ^{++}		

Kanal	elastisch/total	Wirkungsquerschnitt
$p\pi^+$	total	
$p\pi^+$	elastisch	
$p\pi^-$	total	
$p\pi^-$	elastisch	

- b) Geben Sie alle möglichen Reaktionen für die vier verschiedenen Wirkungsquerschnitte $\pi p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ an, sowie die Quantenzahlen I, I_3 für die Anfangs-, Zwischen- und Endzustände.
- c) Verwenden Sie die unten angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten (CG) um die relativen Höhen der vier Wirkungsquerschnitte theoretisch zu berechnen. (Zur Erinnerung: $\sigma \sim CG^2(\text{anfangs} \rightarrow \text{zwischen}) \cdot CG^2(\text{zwischen} \rightarrow \text{end})!$)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$1 \times 1/2$	$3/2$	$3/2$	$1/2$
$+1$	$+3/2$	$+1/2$	$+1/2$
$+1$	$+1/2$	1	$+1/2$
$+1$	$-1/2$	$1/3$	$2/3$
0	$+1/2$	$2/3$	$-1/3$
0	$-1/2$	$2/3$	$1/3$
-1	$+1/2$	$1/3$	$-2/3$
-1	$-1/2$	$1/3$	$-2/3$
-1	$-1/2$	1	1

Notation:	J	J	...
	M	M	...
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
.	.		
.	.		
.	.		

Clebsch–Gordan-Koeffizienten für Isospins 1 und 1/2 im Anfangszustand (aus [1]).

Lösung:

- a) Ergänzen Sie die Werte des Isospins I und I_3 in der unten stehenden Tabelle, da diese für die weiteren Teilaufgaben gebraucht werden, und schätzen Sie die Wirkungsquerschnitte der Δ -Resonanz Peaks aus dem Plot ab.

Die dritte Komponente des Isospins ist direkt mit der Ladung des Teilchens verknüpft. Die verschiedenen I_3 Komponenten müssen also um 1 unterschiedlich sein. Die totalen und elastischen Wirkungsquerschnitte sind aus den Plots ersichtlich, wir müssen die Wirkungsquerschnitte an ihren Maxima der Δ -Resonanz abtragen. Damit erhalten wir die folgende Tabelle:

Teilchen	I	I_3
Proton p	1/2	1/2
Neutron n	1/2	-1/2
π^-	1	-1
π^0	1	0
π^+	1	1
Δ^-	3/2	-3/2
Δ^0	3/2	-1/2
Δ^+	3/2	1/2
Δ^{++}	3/2	3/2

Kanal	elastisch/total	Wirkungsquerschnitt [mb]
$p\pi^+$	total	200
$p\pi^+$	elastisch	200
$p\pi^-$	total	70
$p\pi^-$	elastisch	23

- b) Geben Sie alle möglichen Reaktionen für die vier verschiedenen Wirkungsquerschnitte $\pi p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ an, sowie die Quantenzahlen I, I_3 für die Anfangs-, Zwischen- und Endzustände.

Wir müssen alle verschiedenen Reaktionen welche in den Streuprozessen auftreten betrachten. Im elastischen Fall sind die Teilchen im Anfangs- und Endzustand identisch.

$$\pi^+ p_{(\text{el.})} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p \quad (16)$$

$$\pi^- p_{(\text{el.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \quad (17)$$

Die Art der Δ -Resonanz im Zwischenzustand ist durch Ladungserhaltung gegeben.

Der totale Wirkungsquerschnitt im Fall $\pi^+ p$ ist identisch zum elastischen Wirkungsquerschnitt, da es keine andere Möglichkeit gibt, die Ladungen auf das Proton und das Pion zu verteilen.

$$\pi^+ p_{(\text{tot.})} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p \quad (18)$$

$$(19)$$

Als letzter Fall bleibt der totale Wirkungsquerschnitt für $\pi^- p$, dabei ist

$$\pi^- p_{(\text{tot.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \quad (20)$$

$$\text{or } \rightarrow \pi^0 n \quad (21)$$

Die Isospins werden im nächsten Teil der Übung angegeben.

- c) Verwenden Sie die unten angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten (CG) um die relativen Höhen der vier Wirkungsquerschnitte theoretisch zu berechnen. (Zur Erinnerung: $\sigma \sim CG^2(\text{anfangs} \rightarrow \text{zwischen}) \cdot CG^2(\text{zwischen} \rightarrow \text{end})!$)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$1 \times 1/2$	$\begin{array}{ c } \hline 3/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline +1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline +3/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline +1/2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline +1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline +1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 1/3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 2/3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 2/3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1/3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 3/2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline -1/2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 0 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline +1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 2/3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1/3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 1/3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -2/3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 3/2 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -3/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline -1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline -1/2 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline \end{array}$

Notation:	$\begin{array}{ c } \hline J \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline J \\ \hline \end{array}$	\dots
	$\begin{array}{ c } \hline M \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline M \\ \hline \end{array}$	\dots
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
\vdots	\vdots		
\vdots	\vdots		
\vdots	\vdots		

from [1]

Die Clebsch–Gordan Koeffizienten in der Tabelle sind für das spezifische Problem eines Isospin $1/2$ Teilchens (das Nukleon) und eines Isospin 1 Teilchens (das Pion) gegeben. Der Zwischenzustand besitzt Isospin $3/2$. Im Folgenden werden die Reaktionen mit den Quantenzahlen der Teilchen in Klammern (I, I_3) und den Clebsch–Gordan Koeffizienten angegeben.

$$\underline{\pi^+ p_{(el.)} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p}$$

$$CG^2((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \cdot CG^2((\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\underline{\pi^- p_{(el.)} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p}$$

$$CG^2((1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})) \cdot CG^2((\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow (1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\underline{\pi^+ p_{(tot.)} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p}$$

$$CG^2((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \cdot CG^2((\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\underline{\pi^- p_{(tot.)} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \text{ or } \pi^0 n}$$

$$CG^2((1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})) \cdot CG^2((\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow (1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

$$+ CG^2((1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})) \cdot CG^2((\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow (1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Dies bedeutet, dass die Wirkungsquerschnitte sich verhalten sollten wie

$$\sigma_{tot.}(\pi^+ p) : \sigma_{el.}(\pi^+ p) : \sigma_{tot.}(\pi^- p) : \sigma_{el.}(\pi^- p) = 9 : 9 : 3 : 1, \quad (22)$$

was von den experimentellen Wirkungsquerschnitten erfüllt wird.

$$\sigma_{tot.}(\pi^+ p) : \sigma_{el.}(\pi^+ p) : \sigma_{tot.}(\pi^- p) : \sigma_{el.}(\pi^- p) = 200 \text{ mb} : 200 \text{ mb} : 70 \text{ mb} : 22 \text{ mb}. \quad (23)$$

Literatur

[1] S. Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592** (2004) 1.

[2] E.W. Otten und C. Weinheimer, Rep. Prog. Phys. **71** (2008) 086201