

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 08

Bearbeitung bis 24.06.2010 Abgabedatum

Aufgabe 1: Teilchendetektoren

Wenn ein geladenes Teilchen in einem Szintillator Energie verliert, geschieht dies meist durch Anregung der Atome bzw. Moleküle des Szintillators. Ein Großteil der angeregten Elektronen gibt beim Übergang ins Grundniveau diese Energie über strahlungslose Rotation und Vibrationsübergänge an die Umgebung ab. Nur wenige Prozent emittieren ein Photon im sichtbaren oder nahen Ultraviolett-Bereich. In Plastikszintillatoren wird im Mittel ein Photon pro 100 eV Energieverlust emittiert. Für eine bestimmte Szintillatorgeometrie erreichen nur 6% dieser Photonen die Photokathode des Photomultipliers, mit dem sie nachgewiesen werden, der Rest wird im Szintillator oder den Wänden absorbiert. Die Photokathode hat eine Quantenausbeute von 30%, d.h. nur 30% der auftreffenden Photonen erzeugen ein Photoelektron, das im Photomultiplier verstärkt wird. In einem Argon-gefüllten Gaszählrohr werden 25 eV pro Ionisierung gebraucht. In einem Halbleiterdetektor wird im Mittel eine Energie von 3,6 eV (Si) benötigt, um ein Elektron-Loch-Paar zu erzeugen. Für die beiden letzten Detektoren nehmen wir an, dass 100 % der Ladungsträger nachgewiesen werden.

- a) Wie groß ist der statistische Anteil der relativen Energieauflösung σ_E/E eines Detektors für einen Energieverluste des Teilchens von 100 keV, 5 MeV und 20 MeV? Berechnen Sie die Anzahl der nachgewiesenen Photonen, Ionisationen und Elektron-Loch-Paare. Gehen Sie bei der Berechnung von einer Poissonverteilung aus.
- b) Wie dick müssen diese drei Detektorarten sein, damit sie diese Energieverluste messen, wenn Teilchen im minimalionisierenden Energiebereich ($\gamma \approx 3-4$) den Detektor durchqueren? Verwenden Sie die Bethe-Bloch-Gleichung mit $\rho_{\text{szint}} \approx 1.2 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{Si}}=2.33 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{Ar}}=1-3 \text{ mg/cm}^3$ (siehe auch Aufgabe 1 vom 7. Übungsblatt).

Lösung:

Solution 28

Die Form des Energiespektrums, das mit einem Detektor gemessen wird, wird hauptsächlich von zwei Größen beeinflusst:

- der Höhe des Energieverlustes eines geladenen Teilchens im aktiven Detektormaterial
- der Energieauflösung des Detektors.

Der Energieverlust von durchgehenden Teilchen folgt bei dünnen Detektoren einer Landauverteilung und nähert sich für dickere Detektoren einer Gaussverteilung an. Im Grenzfall deponiert ein Teilchen seine gesamte Energie im Detektor. Ein Beispiel für den letzten Fall wären z.B. Comptonelektronen und Photoelektronen (nicht bei Plastiksintillatoren!), die im Szintillatormaterial selbst durch Gammas erzeugt werden. Die Detektorantwort auf einen monoenergetischen Energieverlust wird durch die Poissonstatistik beschrieben (Energieauflösung). Durch Faltung des Energieverlustspektrums mit der energieabhängigen Energieauflösungsfunktion erhält man das gemessene Spektrum des Detektors.

- a) In einem Detektor aus Szintillator und Photomultiplier bedeutet ein nachgewiesenes Photon des Szintillationslichtes, dass das Photon ein Photoelektron (PE) aus der Photokathode des Photomultipliers herausgeschlagen hat. Dieses Elektron wird in der Dynodenkette verstärkt und als Anodenpuls in der nachgeschalteten Elektronik nachgewiesen. Die mittlere Anzahl der PE ist proportional zum Energieverlust des primären Teilchens im Szintillator. Da die Erzeugung und der Nachweis eines einzelnen PE unabhängig von den anderen PE ist, kann die statistische Schwankung σ_N der Anzahl N der PE bei monoenergetischem Energieverlust mit der Poisson-Statistik beschrieben werden. In der Poisson-Statistik ist der Fehler einer Zählrate N gleich der Wurzel der Zählrate $\sigma_N = \sqrt{N}$. Der relative Fehler wird dadurch

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sigma_N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Uns interessieren bei unseren Messungen die relativen Fehler. Laut Aufgabenbeschreibung sollen Energien von 100 keV, 5 MeV, und 20 MeV nachgewiesen werden. Aus den verschiedenen Energien, die notwendig sind, um die Detektormaterialien im Fall des Szintillators, der Halbleiter sowie des Gasdetektors anzuregen, können wir die Anzahl der Prozesse bei gegebener Energie berechnen. Daraus können wir dann die relative Energieauflösung bestimmen, wodurch wir folgende Ergebnisse erhalten.

Prozess	ΔE [MeV]	E_{Prozess} [eV]	N	ΔN	$\sigma(\Delta E)/\Delta E$	$\sigma(\Delta E)$ [MeV]
Szintillator	0.1		20	4.5	0.223	0.022
	5	100/0.02=5000	1000	31	0.031	0.155
	20		4000	63	0.016	0.32
Halbleiter	0.1		$2.77 \cdot 10^4$	167	$6.0 \cdot 10^{-3}$	0.0006
	5	3.6	$1.39 \cdot 10^6$	1179	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.004
	20		$5.56 \cdot 10^6$	2357	$4.24 \cdot 10^{-4}$	0.008
Gas	0.1		$4 \cdot 10^3$	63.2	0.016	0.0016
	5	25	$2 \cdot 10^5$	447	$2.23 \cdot 10^{-3}$	0.011
	20		$8 \cdot 10^5$	894	$1.12 \cdot 10^{-3}$	0.022

b) Die Bethe–Bloch Gleichung ist gegeben als

$$S = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} N_A \frac{Z}{A} \rho \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right]. \quad (1)$$

Wir können folgende Vereinfachungen annehmen:

$$\begin{aligned} z^2 &= 1, \\ \gamma &= 3 - 4 \Rightarrow \gamma^2 \approx 10, \\ \beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.9 \Rightarrow \beta \approx 0.95, \\ B &= \frac{2m_e c^2}{I} \approx 10^4, \\ T_{\max} &\approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

Die molare Masse A und die Kernladung Z für Silizium beträgt $A(\text{Si}) = 28,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{Si}) = 14$ und für Argon $A(\text{Ar}) = 39,9 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{Ar}) = 18$. Beim Plastiksintillator nehmen wir an, dass er hauptsächlich aus Polymerketten besteht mit einzelnen CH_2 -Gliedern. Diese Glieder haben $A(\text{CH}_2) = 12 + 2 = 14 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{CH}_2) = 6 + 2$. Als grobe Schätzung gilt allgemein: $Z/A \approx 1/2$ bzw. $Z/A \approx 1/2 \text{mol/g}$, wenn wie in diesem Fall A als molare Masse gesehen wird.

Damit erhalten wir:

$$K = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} N_A = 0.3071 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{mol}}.$$

Damit wird die Formel zu

$$S = -\frac{dE}{dx} = k\rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln(B\beta^2\gamma^2) - \beta^2 \right]$$

Damit erhalten wir folgende Werte für den Energieverlust ΔE über eine Distanz Δx in den verschiedenen Medien. Als Energiewerte für die minimalionisierenden Teilchen sind aus Teilaufgabe a) 100 keV, 5 MeV und 20 MeV gegeben.

Detektor	$\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$	$Z/A \left[\frac{\text{mol}}{\text{g}} \right]$	$\Delta E/\Delta x \left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$	$\Delta s / 100 \text{ keV}$	$\Delta s / 5 \text{ MeV}$	$\Delta s / 20 \text{ MeV}$
Szintillator	1,2	0,57	1,12	0,080 cm	4,46 cm	17,83 cm
Silizium	2,33	0,498	2,18	0,053 cm	2,27 cm	10,51 cm
Argon	0,002	0,45	0,00148	67,8 cm	3390 cm	1355 cm

Aufgabe 2: Čerenkovdetektor

- a) Ein RICH-Detektor (Ring Imaging Cherenkov detector) hat einen 1 cm dicken Radiator, der mit flüssigem Freon (Brechungsindex $n = 1.22$) gefüllt ist. Der Abstand L zwischen dem Radiator und dem Photodetektor ist 9.5 cm. Wie groß sind die Schwellenimpulse oberhalb derer Pionen bzw. Kaonen Čerenkovlicht erzeugen? Berechnen Sie die Größe der Ringradien auf dem Photodetektor für Licht aus der Mitte des Radiators als Funktion des Impulses und stellen Sie diese Funktion im Bereich vom Pion-Schwellenimpuls bis 2 GeV graphisch dar.
- b) Ein mit CO_2 gefüllter Čerenkovzähler soll zum Nachweis von π -Mesonen eingesetzt werden. Man beachte, dass die Suszeptibilität $\chi = \epsilon - 1$ proportional zum Druck ist. Bei Normaldruck ist der Brechungsindex $n = 1.00041$. Wie hoch muss der Druck sein, um Pionen oberhalb einer Energie von 5 GeV nachzuweisen? Ab welcher Energie erzeugen bei diesem Druck auch Kaonen Čerenkovlicht im Detektor?

Lösung:

- a) An der Schwelle gilt:

$$1 = \beta n = \frac{p}{E} n = \frac{np}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} = np$$

$$\Rightarrow p^2 + m^2 = n^2 p^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

Also sind die Schwellenimpulse $p_\pi = 200$ MeV und $p_K = 706$ MeV.

Für den Winkel θ , unter dem das Čerenkovlicht abgestrahlt wird, gilt:

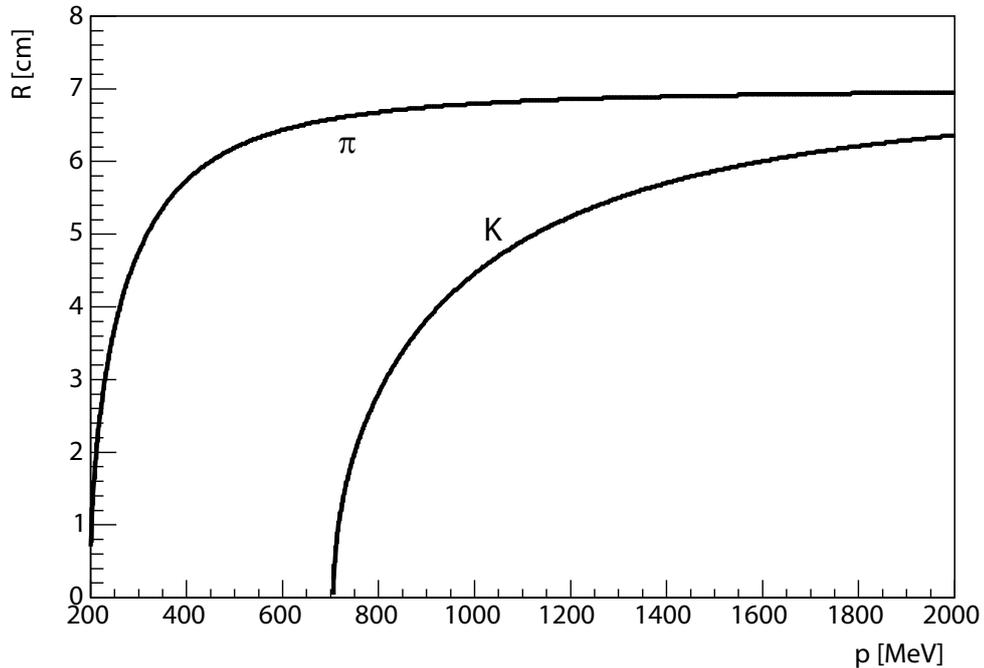
$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{E}{np} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{np}$$

Als Ringradius R ergibt sich:

$$R = L_0 \tan \theta = L_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = L_0 \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = L_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = L_0 \sqrt{\frac{n^2 p^2}{p^2 + m^2} - 1}$$

Dabei ist $L_0 = L + d/2 = 10$ cm (Dicke $d = 1$ cm).

Cherekovringe



Anhand des Bildes kann diskutiert werden, in welchen Bereich Pionen und Kaonen getrennt werden können.

- b) Für $\mu = 1$ ist der Brechungsindex gegeben durch $n = \sqrt{\epsilon}$. Daraus folgt an der Schwelle:

$$\sqrt{\epsilon} = n = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}}$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon - 1 = \frac{E^2}{E^2 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{E^2 - m^2}$$

Als Druck P (Großbuchstabe zur Vermeidung von Verwechslungen mit dem Impuls p) erhält man aus der Suszeptibilität $\chi_0 = n^2 - 1$ bei Normaldruck P_0 :

$$P = \frac{\chi}{\chi_0} \cdot P_0 = \frac{m^2}{(E^2 - m^2)(n^2 - 1)} \cdot P_0 \quad (2)$$

Für Pionen ergibt sich $P = 0.96$ bar.

Aus Gleichung 2 folgt:

$$E^2 - m^2 = \frac{m^2}{n^2 - 1} \frac{P_0}{P} \Rightarrow E = m \sqrt{\frac{P_0}{(n^2 - 1)P} + 1}$$

Für Kaonen ergibt sich bei diesem Druck eine Schwellwertenergie von $E = 17.7$ GeV.

Aufgabe 3: Beschleuniger

- a) Ein Linearbeschleuniger für Protonen wird mit einer konstanten Frequenz von $\nu = 200$ MHz betrieben. Welche Länge muss die Driftröhre an dem Ort haben, an dem die Protonen eine kinetische Energie von 1 MeV, 100 MeV, 10 GeV haben?
- b) Bei einem Synchrotron müssen die Generatorfrequenz und das Magnetfeld an die Energie der relativistisch beschleunigten Teilchen angepasst werden, um sie auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius R zu halten. Wie hängen die Frequenz und das Magnetfeld von der Energie der Teilchen (Masse m , Ladung e) ab?
- c) Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie von Teilchenreaktionen an folgenden Beschleunigern:

Beschleuniger	Teilchen	Energien
LEP 2	e^+e^-	$E_{e^+} = E_{e^-} = 103$ GeV
PEP-II	e^+e^-	$E_{e^+} = 3.1$ GeV, $E_{e^-} = 9$ GeV
HERA	ep	$E_e = 27.5$ GeV, $E_p = 920$ GeV
	ep	$E_e = 27.5$ GeV, p in Ruhe
Tevatron	$p\bar{p}$	$E_p = E_{\bar{p}} = 980$ GeV
LHC	pp	$E_p = 7$ TeV
	${}^{208}_{82}\text{Pb } {}^{208}_{82}\text{Pb}$ (Kerne)	$E = 2.76$ TeV pro Nukleon

Welche Näherung kann man bei diesen Energien machen?

- d) Wie hoch müßte die Energie eines Protons aus der kosmischen Strahlung sein, wenn in einer Reaktion mit einem stationären Proton in der Atmosphäre dieselbe Schwerpunktsenergie erreicht werden soll wie bei pp-Kollisionen bei LHC?

Lösung:

- a) Die Länge L der Driftröhre muss so gewählt werden, dass die Protonen sie innerhalb einer halben Periodendauer T durchqueren:

$$L = v \cdot T/2 = \frac{v}{2\nu} \quad (3)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Protonen, die sich folgendermaßen aus der Masse m und Gesamtenergie E bzw. der kinetischen Energie E_{kin} berechnen

läßt:

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{mc^2} &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{E^2} \\
 \Rightarrow v &= c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{kin} + mc^2)^2}} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Mit Gleichung 3 ergibt sich:

E_{kin}	L
1 MeV	3.46 cm
100 MeV	32.1 cm
10 GeV	74.7 cm

Zum Vergleich: Bei einer klassischen Rechnung erhält man bei einer Erhöhung der kinetischen Energie um den Faktor 100 eine Zunahme der Länge um den Faktor 10.

- b) Die Generatorfrequenz ν muss ein ganzzahliges Vielfaches (n) der Umlauffrequenz sein. Unter Verwendung von Gleichung 4 ergibt sich:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2\pi R} = n \cdot \frac{c}{2\pi R} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

Das Magnetfeld muss so gewählt werden, dass die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, bei der gegenüber der klassischen Formel ein zusätzlicher Gammafaktor auftritt:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= evB = \gamma m \frac{v^2}{R} \\
 \Rightarrow B &= \frac{\gamma m v}{eR} = \frac{Ev}{c^2 eR} = \frac{E}{ceR} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}
 \end{aligned}$$

- c) Die Schwerpunktsenergie \sqrt{s} läßt sich aus den Vierervektoren $\mathbf{p}_{1,2} = (E_{1,2}, \vec{p}_{1,2}) = (E_{1,2}, 0, 0, \pm p_{1,2})$ (Strahlachse = z -Achse) der beiden kollidierenden Teilchen berechnen (hier $c=1$):

$$\begin{aligned}
 s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\
 &= \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2^2 \\
 &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) \\
 &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2(p_1 \cdot (-p_2)) \\
 &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 + 2p_1 p_2 \\
 &= 2E_1 E_2 + 2\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2)} + m_1^2 + m_2^2
 \end{aligned}$$

Für $E_{1,2} \gg m_{1,2}$ können die Massenterme vernachlässigt werden:

$$s = 4E_1E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1E_2} \quad (5)$$

Für $E_1 \gg m_{1,2}$ und $E_2 = m_2$ (Fixed Target) kann folgende Näherung gemacht werden:

$$s = 2E_1m_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = \sqrt{2E_1m_2} \quad (6)$$

Damit erhält man folgende Schwerpunktsenergien:

Beschleuniger	Schwerpunktsenergie \sqrt{s}
LEP 2	206 GeV
PEP-II	10.6 GeV
HERA	318 GeV
HERA (Fixed Target)	7.18 GeV
Tevatron	1.96 TeV
LHC (pp)	14 TeV
LHC (PbPb)	$1.12 \cdot 10^3$ TeV (n=207)

Aus Gleichung 6 folgt für die Energie eines Protons ($m_p \approx 1$ GeV) der kosmischen Strahlung, die benötigt würde, um eine Schwerpunktsenergie von 14 TeV zu erreichen (entspricht einem Fixed-Target-Experiment):

$$E_1 = \frac{s}{2m_2} = 2.0 \cdot 10^{17} \text{ eV}$$

Experimente, wie z.B. das Auger-Experiment, haben Luftschauer von Teilchen der kosmischen Strahlung mit Primärenergien bis 10^{20} eV nachgewiesen. In Collider-Experimenten können also wesentlich höhere Schwerpunktsenergien erreicht werden als bei Fixed-Target-Experimenten.