Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

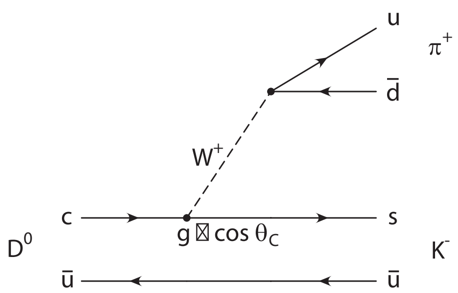
Übungsblatt Nr. 9

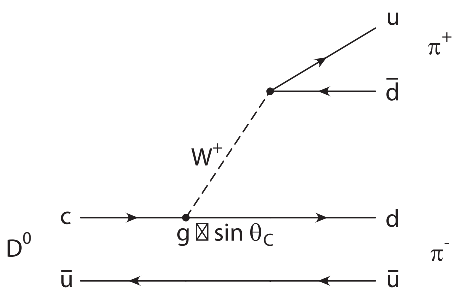
Bearbeitung bis 01.07.2010 Abgabedatum

Aufgabe 1: D^0-Zerfall

Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für die Zerfälle des D^0-Mesons (Quarkzusammensetzung $c\bar{u}$) in $K^-\pi^+$ bzw. $\pi^-\pi^+$. Schätzen Sie die Größenordnung des Verhältnisses der partiellen Breiten $\Gamma(D^0 \to K^-\pi^+)/\Gamma(D^0 \to \pi^-\pi^+)$ ab.

Lösung:





Der Zerfall in zwei Pionen ist Cabibbo-unterdrückt. Näherungsweise erwartet man:

$$\frac{\Gamma(D^0 \to K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0 \to \pi^-\pi^+)} \approx \frac{\cos^2\theta_C}{\sin^2\theta_C} = \frac{1}{\tan^2\theta_C} \approx 20$$

Aufgabe 2: K^0-Erzeugung

Mit einem π^--Strahl, der auf ein stationäres Protontarget geschossen wird, sollen durch starke Wechselwirkung neutrale K-Mesonen erzeugt werden. In einem gewissen Bereich des Pion-Impulses können nur K^0-Mesonen jedoch keine $\bar{K}^0$-Mesonen erzeugt werden.

a) Welchen Impuls müssen die Pionen mindestens haben, um K^0-Mesonen erzeugen zu können, und wie sieht in diesem Fall die Reaktionsgleichung aus?

b) Ab welchem Pion-Impuls können auch $\bar{K}^0$-Mesonen erzeugt werden und über welche Reaktion?

Lösung:

a) Im Anfangszustand ist die Baryonenzahl $B = 1$ und die Strangeness $S = 0$. Da beide Größen in der starken Wechselwirkung erhalten bleiben und das K^0-Meson $B = 0$ und $S = +1$ hat, muss mindestens noch ein weiteres Teilchen mit $B = 1$ und $S = -1$ erzeugt werden. Dies ist durch folgende Reaktion erfüllt:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \to \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}]$$

Wie in Aufgabe 3c aus Blatt 8 ergibt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned}
s &= (\mathbf{p}_\mathrm{p} + \mathbf{p}_\pi)^2 \\
&= \mathbf{p}_\mathrm{p}^2 + 2\mathbf{p}_\mathrm{p}\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_\pi^2 \\
&= m_\mathrm{p}^2 + m_\pi^2 + 2(E_\mathrm{p}E_\pi - \vec{p}_\mathrm{p}\vec{p}_\pi) \qquad \vec{p}_\mathrm{p} = 0 \\
&= m_\mathrm{p}^2 + m_\pi^2 + 2E_\mathrm{p}E_\pi \\
&= m_\mathrm{p}^2 + m_\pi^2 + 2m_\mathrm{p}E_\pi \\
&= m_\mathrm{p}^2 + m_\pi^2 + 2m_\mathrm{p}\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}
\end{aligned}$$

mit $\sqrt{s} = m_\Lambda + m_{K^0}$ der minimale Pion-Impuls:

$$p_\pi = \sqrt{\frac{(s - m_\mathrm{p}^2 - m_\pi^2)^2}{4m_\mathrm{p}^2} - m_\pi^2} = 899 \text{ MeV}$$

b) Das $\bar{K}^0$-Meson hat $B = 0$ und $S = -1$. Da Baryonen keine Antiquarks und somit auch keine $\bar{s}$-Quarks mit $S = +1$ enthalten, gibt es kein Teilchen mit $B = 1$ und $S = +1$. Um $\bar{K}^0$-Mesonen zu erzeugen, müssen also neben dem $\bar{K}^0$ mindestens zwei weitere Teilchen erzeugt werden, damit Baryonenzahl und Strangeness erhalten sind. Folgende Reaktion erfüllt die Erhaltungssätze:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \to n[udd] + K^0[d\bar{s}] + \bar{K}^0[\bar{d}s]$$

Analog zu Teil a) ergibt sich mit $\sqrt{s} = m_n + 2m_{K^0}$ als minimaler Impuls des Pions:

$$p_\pi = 1509 \text{ MeV}$$

Aufgabe 3: Teilchenreaktionen

Begründen Sie, weshalb folgende Reaktionen nicht erlaubt, bzw. stark unterdrückt sind:

a) $p + \pi^+ \to K^+ + \Lambda^0$

b) $p \to n + \pi^+$

c) $\Lambda^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

d) $J/\psi \rightarrow \gamma + \gamma$

e) $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$

f) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$

Geben Sie die Art der (dominierenden) Wechselwirkung folgender Reaktionen an:

g) $p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$

h) $\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \gamma$

i) $n + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + p$

j) $J/\psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-$

k) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$

l) $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$

m) $\nu_e + p \rightarrow e^- + \pi^+ + p$

n) $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$

o) $\bar{\Delta}^0 \rightarrow \bar{n} + \pi^0$

Geben Sie außerdem für alle Reaktionen die Quarkzusammensetzung der beteiligten Hadronen an.

Lösung:

a) $p[uud] + \pi^+[u\bar{d}] \rightarrow K^+[u\bar{s}] + \Lambda^0[uds]$
Ladung nicht erhalten

b) $p[uud] \rightarrow n[udd] + \pi^+[u\bar{d}]$
Energie nicht erhalten ($m_p < m_n + m_\pi$)

c) $\Lambda^0[uds] \rightarrow \pi^+[u\bar{d}] + e^- + \bar{\nu}_e$
Baryonenzahl nicht erhalten

d) $J/\psi[c\bar{c}] \rightarrow \gamma + \gamma$
C-Parität nicht erhalten. η_c ist der 1^1S_0 Zustand von $[c\bar{c}]$, d.h. J=0 und J/ψ ist der 1^3S_1 Zustand, d.h. J=1. Die Eigenwerte der Parität sind wie folgt zu berechnen $C = (-1)^J$. Somit ergibt sich für $C(\eta_c) = +1$ und $C(J/\psi) = -1$. Dadurch kann nur η_c in zwei γ's zerfallen und J/ψ in drei γ's, da $C(\gamma) = -1$.

e) $\nu_\mu + p[uud] \rightarrow \mu^+ + n[udd]$
Leptonenzahl nicht erhalten

f) $e^- + \gamma \to e^-$
Energie- und Impulserhaltung nicht erfüllt (für freie e^-)

g) $p[uud] + K^-[\bar{u}s] \to \Sigma^+[uus] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^+[u\bar{d}] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)

h) $\bar{\Sigma}^0[\bar{u}^{\uparrow}\bar{d}^{\uparrow}\bar{s}^{\downarrow}] \to \bar{\Lambda}^0[\bar{u}^{\uparrow}\bar{d}^{\downarrow}\bar{s}^{\uparrow}] + \gamma$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)

i) $n[udd] + p[uud] \to \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}] + p[uud]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)

j) $J/\psi[c\bar{c}] \to \mu^+ + \mu^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung ($\gg Z^0$-Beitrag)

k) $K^-[\bar{u}s] \to \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Schwache Wechselwirkung (Änderung der Strangeness)

l) $\tau^- \to \pi^-[\bar{u}d] + \nu_\tau$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino)

m) $\nu_e + p[uud] \to e^- + \pi^+[u\bar{d}] + p[uud]$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino). Hinweis: Zwei W-Bosonen sind für die Reaktion notwendig.

n) $\pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}] \to \gamma + e^+ + e^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)

o) $\bar{\Delta}^0[\bar{u}^{\downarrow}\bar{d}^{\downarrow}\bar{d}^{\downarrow}] \to \bar{n}[\bar{u}^{\uparrow}\bar{d}^{\downarrow}\bar{d}^{\downarrow}] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)

Aufgabe 4: $SU(2)$-Symmetrie

Die Darstellung von Spins in einem Spin-1/2-System durch zweidimensionale Spinoren kann analog auf das Isospindublett aus u- und d-Quark übertragen werden:

$$u\text{-Quark} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Isospin up)}$$
$$d\text{-Quark} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Isospin down)}$$

Durch eine $SU(2)$-Transformation kann z.B. ein u-Quark in ein d-Quark umgewandelt werden oder umgekehrt. Da der Isospin in der starken Wechselwirkung erhalten ist, hat eine solche Transformation keine Auswirkungen auf diese Wechselwirkung.

Dies gilt für alle möglichen $SU(2)$-Transformationen im dreidimensionalen Isospinraum. Diese Transformationen U, die $U^+U = UU^+ = 1$ und $\det U = 1$ erfüllen müssen, sind durch folgende Formel gegeben:

$$U = \exp\left(\frac{1}{2} i\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\tau\right) = \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{n}}\cdot\tau\sin\frac{\theta}{2}$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix, θ der Drehwinkel, $\hat{\mathbf{n}}$ ein dreidimensionaler Einheitsvektor, der die Drehachse im Isospinraum angibt, und τ ein Vektor von drei 2×2-Matrizen:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch eine solche $SU(2)$-Transformation wird ein beliebiger Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ mit der Isospin-up-Komponente u und der Isospin-down-Komponente d überführt in einen im Isospinraum gedrehten Isospinor $\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrizen U_1, U_2 und U_3 für die Rotation um die drei Achsen im Isospinraum ($n_1 = (1,0,0)$, $n_2 = (0,1,0)$, $n_3 = (0,0,1)$) und wenden Sie diese auf den Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ an.

b) Zeigen Sie, dass für Antiquarks dieselben Transformationsmatrizen U verwendet werden können, wenn man das Isospindublett als $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ definiert[1]:

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

Wenden Sie dazu die Ladungskonjugation ($u \to \bar{u}$, $d \to \bar{d}$ und komplex konjugieren) auf den um U_1, U_2 bzw. U_3 gedrehten Spinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ aus dem vorigen Aufgabenteil an, und vergleichen Sie diese Spinoren mit den um U_1, U_2 bzw. U_3 gedrehten Spinoren $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$.

c) Zeigen Sie, dass das ω-Meson ($\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$) ein Isospin-Singulett ist, indem Sie die Invarianz unter Rotation um jede der drei Achsen zeigen. Was ändert sich an der Argumentation, wenn man statt des ω-Mesons die η-Mesonen betrachtet? Wie wirken sich Isospin-Transformationen auf das ϕ-Meson aus?

[1] Bei der Ladungskonjugation ändern die additiven Quatenzahlen ihr Vorzeichen, d.h. $I_3(\bar{u}) = -1/2$ (Isospin down) und $I_3(\bar{d}) = +1/2$ (Isospin up)

d) Drehen Sie das π^+-Meson ($u\bar{d}$) im Isospinraum um 90° bzw. 180° einmal um die erste und einmal um die zweite Achse ($U_1(90°)\pi^+$, $U_1(180°)\pi^+$, $U_2(90°)\pi^+$, $U_2(180°)\pi^+$). Welche Zustände erhalten Sie?

Lösung:

a) Die Transformationsmatrizen für die Rotation um die drei Achsen sind:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_1 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
U_2 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_2 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
U_3 &= \mathbf{1}\cos\frac{\theta}{2} + i\tau_3 \sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Angewendet auf einen Isospinor erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, u + i\sin\frac{\theta}{2}\, d \\ i\sin\frac{\theta}{2}\, u + \cos\frac{\theta}{2}\, d \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, u + \sin\frac{\theta}{2}\, d \\ -\sin\frac{\theta}{2}\, u + \cos\frac{\theta}{2}\, d \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\, u \\ e^{-i\frac{\theta}{2}}\, d \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Durch Ladungskonjugation C erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \\ -i\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \\ -\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} = C\left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}\right] = C\left[U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}}\, \bar{u} \\ e^{i\frac{\theta}{2}}\, \bar{d} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

U angewendet auf den Antiquark-Isospinor ergibt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_1 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} + i\sin\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \\ i\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \\ -[\cos\frac{\theta}{2}\, \bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d}] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_2 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} + \sin\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \\ -\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\, \bar{d} \\ -[\cos\frac{\theta}{2}\, \bar{u} + \sin\frac{\theta}{2}\, \bar{d}] \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U_3 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\, \bar{d} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}}\,(-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}}\, \bar{d} \\ -[e^{-i\frac{\theta}{2}}\, \bar{u}] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass sich dieselben Gleichungen für $\bar{u}'$ und $\bar{d}'$ wie für die ladungskonjugierten gedrehten Quarkzustände ergeben.

c) Mit den gedrehten Isospionoren aus den beiden vorigen Aufgabenteilen erhält man für das im Isospinraum gedrehte ω-Meson:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot U_1\omega &= U_1[u\bar{u}+d\bar{d}] = U_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\bar{U}_1\bar{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + U_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\bar{U}_1\bar{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\bar{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} - i\sin\frac{\theta}{2}\bar{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right) +\\
&\quad \left(i\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\left(-i\sin\frac{\theta}{2}\bar{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} + \cos\frac{\theta}{2}\bar{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right)\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\,u + i\sin\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right) +\\
&\quad \left(i\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(-i\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} - i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d} +\\
&\quad \sin^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} + i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} - i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d}\\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)u\bar{u} + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega\\
\sqrt{2}\cdot U_2\omega &= U_2[u\bar{u}+d\bar{d}]\\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\,u - \sin\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\,\bar{u} - \sin\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right) +\\
&\quad \left(\sin\frac{\theta}{2}\,u + \cos\frac{\theta}{2}\,d\right)\left(\sin\frac{\theta}{2}\,\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\,\bar{d}\right)\\
&= \cos^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \sin^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d} +\\
&\quad \sin^2\frac{\theta}{2}\,u\bar{u} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,u\bar{d} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\bar{u} + \cos^2\frac{\theta}{2}\,d\bar{d}\\
&= \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)u\bar{u} + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega\\
\sqrt{2}\cdot U_3\omega &= U_3[u\bar{u}+d\bar{d}]\\
&= e^{i\frac{\theta}{2}}\,u\,e^{-i\frac{\theta}{2}}\,\bar{u} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\,d\,e^{i\frac{\theta}{2}}\,\bar{d}\\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2}\cdot\omega
\end{aligned}$$

Das ω-Meson ist also invariant unter $SU(2)$-Transformationen im Isospinraum und somit ein Isospin-Singulett.

Bei den η-Mesonen hat man wie beim ω-Meson die Komponente $u\bar{u} + d\bar{d}$, allerdings gibt es hier einen zusätzlichen Anteil $s\bar{s}$. Da das s-Quark (und das

$\bar{s}$-Quark) keinen Isospin hat, ist es invariant unter Isospintransformationen ($Us = s$, $U\bar{s} = \bar{s}$). Das Transformationsverhalten der η-Mesonen entspricht also dem des ω-Mesons. D.h. auch die η-Mesonen sind Isospin-Singuletts.

Das ϕ-Meson besteht nur aus $s\bar{s}$ und ist somit nicht von Isospin-Transformationen betroffen. Es ist also auch ein Isospin-Singulett.

d) Verwende die $U_{1,2,3}$ Matrizen aus Aufgabenteil a) und dass $\cos 45° = \sin 45° = 1/\sqrt{2}$, $\cos 90° = 0$ und $\sin 90° = 1$. Für die Transformation um 90° um die erste Achse gilt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + id \\ iu + d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} - i\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_1(90°)\pi^+ &= U_1(90°)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + id)\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(-iu\bar{u} + u\bar{d} + d\bar{u} + id\bar{d}) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ + \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die erste Achse ergibt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} id \\ iu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\bar{u} \\ -[-i\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$U_1(180°)\pi^+ = U_1(180°)u\bar{d} = id(-i\bar{u}) = d\bar{u} = \pi^-$$

Für die Drehung um 90° um die zweite Achse erhält man:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + d \\ -u + d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} + \bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} U_2(90°)\pi^+ &= U_2(90°)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u - d)\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(u\bar{u} + u\bar{d} - d\bar{u} - d\bar{d}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ - \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die zweite Achse ergibt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -u \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{u} \\ -[\bar{d}] \end{pmatrix}$$

$$U_2(180°)\pi^+ = U_2(180°)u\bar{d} = (-d)\bar{u} = -d\bar{u} = -\pi^-$$

Das um 180° gedrehte π^+ ergibt ein π^- (mit Phasenfaktor). Bei der Drehung des π^+ um 90° erhält man eine Überlagerung von π^0, π^+ und π^-.