

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 1

Bearbeitung bis 22.04.2010

Webseite des Email-Verteilers:

<https://www.lists.kit.edu/sympa/info/ktp-ss2010>

Verwenden Sie den Menüpunkt **Subscribe** bzw. **Abonnieren** um sich anzumelden.

Aufgabe 1: Einheiten und Größenordnungen

In der Kernphysik werden in der Regel keine SI-Einheiten verwendet, da für die zu beschreibenden Prozesse andere Einheiten sehr viel handlicher sind.

Berechnen Sie die äquivalenten Werte für die in der Tabelle angegebenen Größen. Nennen Sie Anwendungsgebiete für Photonen dieser Energie bzw. Wellenlänge, welche Objekte kann man damit auflösen?

E ist die Energie in Joule und eV, ν die Frequenz in Hertz, λ die Wellenlänge in Metern und Δx die Auflösung.

E [J]	E [eV]	ν [Hz]	λ [m]	Δx [m]	Objektgröße ...
	2,4				
		$1,5 \cdot 10^{17}$			
$4,6 \cdot 10^{-15}$					
			$2 \cdot 10^{-15}$		

Lösung 1

- Um die Werte zu berechnen benötigt man folgende Gleichungen:

$$E(\text{J}) = 1.602 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} E(\text{eV}) \quad (1)$$

$$E = h\nu \quad (2)$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad (3)$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} \quad (4)$$

Ausserdem entspricht die Auflösung Δx der halben Wellenlänge λ .

Damit erhält man leicht die Werte der unten stehenden Tabelle.

E [J]	E [eV]	ν [Hz]	λ [m]	Δx [m]	Größe von ...
$3.84 \cdot 10^{-19}$	2.4	$5.80 \cdot 10^{14}$	$5.16 \cdot 10^{-7}$	$2.58 \cdot 10^{-7}$	Kristallstrukturen
$9.93 \cdot 10^{-17}$	$6.20 \cdot 10^2$	$1.5 \cdot 10^{17}$	$2.00 \cdot 10^{-9}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$	Molekülen
$4.6 \cdot 10^{-15}$	$2.87 \cdot 10^4$	$6.94 \cdot 10^{18}$	$4.31 \cdot 10^{-11}$	$2.15 \cdot 10^{-11}$	Atomen
$9.93 \cdot 10^{-11}$	$6.20 \cdot 10^8$	$1.50 \cdot 10^{23}$	$2.00 \cdot 10^{-15}$	10^{-15}	Atomkernen

Hinweis: Bei der Berechnung des Auflösungsvermögens mit Hilfe der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ entsteht ein Faktor 2π im Vergleich zur Auflösung die man mit $\Delta x = \lambda/2$ erhält.

- **ZUSATZ:** Mit den Rechnungen der letzten Übung kann man auf einfache Weise zur Energie in Elektronenvolt eines Teilchenzusammenstoßes die entsprechende Energie eines Autos in Joule berechnen. Die Energie einer einzelnen Protonenkollision im LHC ist $7 \text{ TeV} = 7 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, da in Beschleunigerexperimenten die Beziehung

$$E_{\text{Schwerpkt.}} = E_1 + E_2 \quad (5)$$

gilt, wobei E_1 und E_2 die Energien der Protonen 1 und 2 im Labrsystem sind. Ein Bunch Protonen besteht aus 10^{11} Teilchen, die Gesamtenergie des Bunches ist

$$E_{\text{bunch}} = 7 \cdot 10^{23} \text{ eV} = 1.12 \cdot 10^5 \text{ J.} \quad (6)$$

Nimmt man diese Energie und benutzt

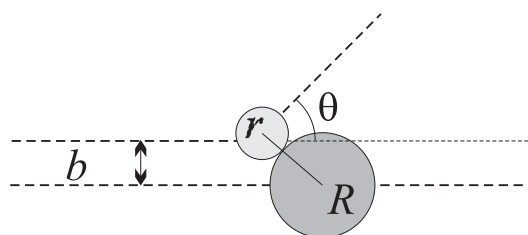
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (7)$$

kann man die Geschwindigkeit v eines Autos der Masse $m \approx 1 \text{ t}$ aus der kinetischen Energie E_{kin} zu ca. 15 m/s bzw. 54 km/h berechnen. Bedenkt man, dass insgesamt ca. 2800 Bunche im LHC Ring gespeichert sind ergibt dies eine beeindruckende Menge Energie.

Aufgabe 2: Rutherford Wirkungsquerschnitt

Bei der Streuung von α -Teilchen an einer Goldfolie entdeckte Rutherford den Atomkern. Hier soll nun der Wirkungsquerschnitt unter der Annahme eines Coulomb-Potentials berechnet werden. Benutzen Sie dazu die im Text und in der Skizze unten verwendeten Bezeichnungen.

- Was waren die Beobachtungen hinsichtlich der Streuwinkel der α -Teilchen? Nennen Sie Gründe für die Diskrepanz zum Thomson-Modell (Rosinenpudding). Welche Schlussfolgerungen über die innere Struktur des Atoms zog Rutherford aus seinen Beobachtungen?
- Leiten Sie den Streu-Wirkungsquerschnitt her. Nehmen Sie an, dass ausschließlich die Coulomb-Kraft die Wechselwirkung eines leichten Projektils der Ladung Z_p mit einem sehr viel schwereren Target der Ladung Z_t bestimmt. Vernachlässigen Sie daher den Rückstoß auf den Target-Kern.



- Geben Sie den Stoßparameter b als Funktion des Streuwinkels θ an.
- Leiten Sie einen Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ als Funktion des Winkels θ her! Benutzen Sie

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{db(\theta)}{d\theta} \right|. \quad (8)$$

- Welchen Einfluss haben die Vorzeichen der Ladungen $Z_p e$ und $Z_t e$ auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt? Wie wird die Ablenkung $db/d\theta$ des Teilchens beeinflusst?

Lösung 2

Rutherford verwendete Daten aus Experimenten, die er mit Hilfe von Geiger und Maasden von 1911 - 13 an der Universität Manchester durchgeführt hatte. Aus dem Ergebnis bewies Rutherford, dass das von Thomson vorgeschlagene Atommodell falsch war. Dieses ging davon aus, dass die positiven und negativen Ladungen gleichmäßig über das Atom verteilt waren.

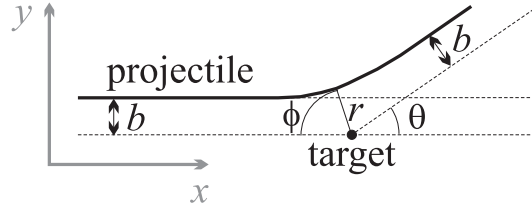
a) Sie machten folgende Beobachtungen:

- Es gibt Vorwärtsstreuung, manche Teilchen passieren den Aufbau ohne Ablenkung.
- Streuung tritt mit großen Winkeln auf, sogar Rückstreuung wurde beobachtet.

Das Thomson Modell nimmt an, dass positive und negative Ladungen gleichmäßig über das gesamte Atomvolumen verteilt sind. Dies wird auch „Rosinenkuchenmodell“ genannt, ein positiv geladener „Klumpen“ mit negativen Ladungen darin eingebettet. Falls dies der Fall wäre würde elastische Streuung das Verhalten der α -Teilchen bestimmen. Da diese schwerer als die Teilchen sind an denen sie streuen würden (die negativen Ladungen, also Elektronen, positive Ladungen der selben Masse könnten die α -Teilchen nicht mehr als den Bruchteil eines Grades ablenken), betrügen Ablenkungswinkel nicht mehr als 90° . Rutherford beobachtete jedoch, dass eines von 8000 Teilchen zu Winkeln größer als dem rechten Winkel abgelenkt wird.

Rutherford schloss aus diesen Beobachtungen, dass das Thomson'sche Atommodell falsch war. Nach ihm bestand das Atom aus einem positiv geladenen massiven Kern und einer negativ geladenen Wolke. Der Kern musste schwer sein, aber nur einen sehr kleinen Teil des Volumens einnehmen, dies folgt daraus, dass nur ein kleiner Teil der einfallenden α -Teilchen zurückgestreut wird.

b) Ableitung des Wirkungsquerschnittes der Rutherfordstreuung



- Die Coulombwechselwirkung des gestreuten α -Teilchen und dem Goldkern ist gegeben durch

$$F = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (9)$$

dabei ist $Z_p e = 2e$ die Ladung des α -Teilchens, $Z_t e = 79e$ die Ladung des Goldkerns, e die Elementarladung und r der Abstand zwischen den Mittelpunkten der Teilchen. Mit den Parametern aus der obigen Skizze erhält man

$$F_y = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \phi = m_p \frac{dv_y}{dt} \quad (10)$$

für die Kraft auf das abgelenkte α -Teilchen in y -Richtung. Dabei ist ϕ der Winkel zwischen dem Abstandsvektor der Teilchen $\vec{r}$ und der negativen x -Richtung des Projektils. Der zweite Term ist die Masse m_p des Projektils mal der Beschleunigung in Ablenkrichtung y .

Der Drehimpuls des Teilchens ist bestimmt durch

$$L = |\vec{L}| = m|\vec{r} \times \vec{v}| = mv_0 b = mr^2 \dot{\phi}, \quad (11)$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit des Projektils v_0 , dem Stoßparameter b , der Zeitableitung des Winkels ϕ , $\dot{\phi} = d\phi/dt$, wie oben definiert.

Aus ?? erhält man

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 b} \frac{d\phi}{dt}. \quad (12)$$

Nun lässt sich die Beschleunigung in y -Richtung durch Einsetzen in ?? schreiben als

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 m_p} \sin \phi \quad (13)$$

$$= \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_0 b} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \quad (14)$$

$$(15)$$

Vor dem Streuprozess gilt $\phi = 0$ (in guter Näherung), $v_y = 0$, und danach $\phi = \pi - \theta$ sowie $v_y = v_0 \sin \theta$ (aus Energieerhaltung). Dies ermöglicht die Bestimmung der Geschwindigkeit in Ablenkrichtung zu bestimmen. Die

Berechnung erfolgt durch Integration über t

$$v_0 \sin \theta = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_0 b} \underbrace{(1 + \cos \theta)}_{\int_0^{\pi-\theta} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} dt} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 m_p v_0^2 b} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2Eb} \quad (18)$$

$$(19)$$

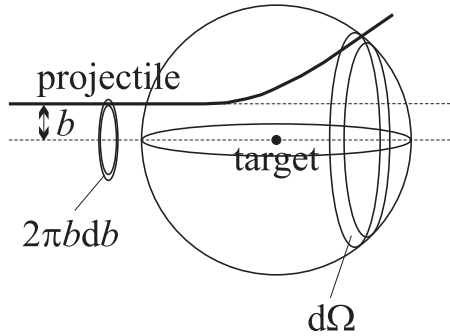
mit Verwendung eines Additionstheorems und der kinetischen Energie $E = 1/2 m_p v_0^2$. Daraus erht man den Stoßparameter ($\tan \rho \cot \rho = 1$ für beliebige Winkel)

$$b = \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot \frac{\theta}{2}. \quad (20)$$

- Der nächste Schritt ist die Berechnung der Funktion, welche die Ablenkung beschreibt, diese ist

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} (-1) \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (21)$$

Nun muss man bekannte Fakten über den Differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$, die abzuleitende Größe anwenden: Er ist definiert als die Zahl der Teilchen pro Targetteilchen, welche pro Sekunde in einen festen Raumwinkel gestreut werden, dividiert durch die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Sekunde. Der Raumwinkel ist gegeben durch $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ für den Ausschnitt einer Kugel im Intervall $d\theta$ rotiert für alle ϕ . Abbildung ?? veranschaulicht dies. Teilchen die den Ring $2\pi b db$ durchfliegen durchfliegen ebenfalls die Ringfläche definiert als Raumwinkel $d\Omega$.



$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b db \quad (22)$$

Der differentiellen Wirkungsquerschnitt (immer ≥ 0) ist also definiert

durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{2\pi b db}{2\pi \sin \theta d\theta} \right| \quad (23)$$

$$= \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (24)$$

$$= \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} \frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sin \theta} \quad (25)$$

$$= - \left(\frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \right)^2 \cot \frac{\theta}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \quad (26)$$

$$= \left(\frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \quad (27)$$

$$= \left(\frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad (28)$$

$$= \left(\frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (29)$$

- Ändert man das Ladungsvorzeichen, wird das Teilchen in die entgegengesetzte y -Richtung gestreut. Dies hat keinen Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt, da dort die Ladungen nur quadriert auftreten. Dies ist auch ersichtlich, da der Wirkungsquerschnitt unabhängig von ϕ ist.
- Abweichungen werden bei großen und kleinen Winkeln erwartet. Die Annahmen, die während der Ableitung gemacht wurden sind eine gute Näherung, haben jedoch einige Schwächen.

Bei kleinen Winkeln, also großen Stoßparametern, ist die Elektronenwolke um den Kern nicht mehr vernachlässigbar. Ausserdem wurde im Experiment nicht die Streuung an einem einzelnen Kern untersucht, sondern an einer gesamten Anordnung derselben, so dass eingache Coulomb-Wechselwirkung mit einer Kugel eine Vereinfachung darstellt .

Die Teilchen sind nicht punktförmig sondern nehmen ein gewisses Volumen ein. Dies und die Tatsache dass sie spinbehaftet sind führt zu Abweichungen bei großen Winkeln. Weitere Annahmen, die das Szenario der Coulomb-Streuung nur annähern sind, dass keine Mehrfachstreuung stattfindet und dass unendlich große Stoßparameter möglich sind.

Aufgabe 3: Streuung von α -Teilchen

Ein Strahl von α -Teilchen ($E_\alpha = 4,5$ MeV, Strom $I = 1$ nA) wird an Gold gestreut (Folie von $2 \mu\text{m}$ Dicke, $Z = 79$, $A = 197$, $\rho = 19,3$ g/cm³). Ein 1 cm^2 großer Detektor in 10 cm Abstand um das Target wird verwendet. Gehen Sie im Folgenden von Rutherford-Streuung aus.

- (a) Berechnen Sie für die Winkel $\theta = 15^\circ$, 90° und 140° den differentiellen Wirkungsquerschnitt.
- (b) Berechnen Sie für die Winkel $\theta = 15^\circ$, 90° und 140° die Anzahl der Teilchen, die pro Sekunde in den Detektor gelangen.
- (c) Experimentell sind keine Abweichungen von der Rutherford-Streuung bis zu einem Winkel von 150° zu finden. Schätzen sie eine obere Grenze R_N für den Kernradius von Gold ab. (Annahme: $R_N \approx b_{\text{crit}} = b(\theta_{\text{crit}})$).

Lösung 3

- (a) Der differentielle Rutherford-Wirkungsquerschnitt ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_p Z_t e^2}{4\pi\epsilon_0 4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (30)$$

Mit $Z_p = 2$, $Z_t = 79$, $E_\alpha = 4.5 \text{ MeV}$ and $e^2/(4\pi\epsilon_0) \approx 1.44 \text{ MeVfm}$ vereinfacht sich dies zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{159.8 \text{ fm}^2}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1.598 \text{ b}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (31)$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 15^\circ) &= 5505 \text{ b/srad} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 90^\circ) &= 6.39 \text{ b/srad} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta = 140^\circ) &= 2.05 \text{ b/srad} \end{aligned}$$

- (b) Der gemessene Wirkungsquerschnitt ist $d\sigma/d\Omega \cdot \Delta\Omega$, in diesem Fall mit einem Detektor der Fläche $A = 1 \text{ cm}^2$ in einem Abstand von $r = 10 \text{ cm}$

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2} = 10^{-2} \text{ srad}.$$

Die Targetdichte ρ_{target} bzw. die Zahl der Streuzentren pro Fläche beträgt (mit der Dichte von Gold $\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$, der molaren Masse $m_{\text{mol}} \approx 197 \text{ g/mol}$ und der Targetdicke $d = 2 \mu\text{m}$)

$$\rho_t = \rho \cdot d \cdot \frac{N_A}{m_{\text{mol}}(\text{Au})} = 1.180 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-2} = 1.180 \cdot 10^{-5} \text{ b}^{-1}. \quad (32)$$

Die Zahl der Strahlteilchen pro Sekunde ist gegeben durch ($I = 1 \text{ nA}$, α -Teilchen mit $Z_\alpha = 2$)

$$I = N_\alpha \cdot \frac{q_\alpha}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_\alpha}{\Delta t} = \frac{I}{q_\alpha} = \frac{I}{2 \cdot e} = 3.12 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1} \quad (33)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist: (Detektoreffizienz $\varepsilon = 1$)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N_{\text{Reaktionen}}}{\Delta\Omega \cdot \rho_{\text{Target}} \cdot N_{\text{Strahl}}} \quad (34)$$

and so

$$\dot{N}_{\text{Reaktionen}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega \cdot \rho_{\text{Target}} \cdot \dot{N}_\alpha. \quad (35)$$

Für die angegebenen Winkel ergibt dies:

$$\begin{aligned} \dot{N}(15^\circ) &= 2.02 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1} \\ \dot{N}(90^\circ) &= 2.35 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \\ \dot{N}(140^\circ) &= 754 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

(c) In der Vorlesung wurde eine Formel für den Punkt gegeben, an dem die beobachteten Daten von der Coulomb-Streuung abweichen, und mit dem Radius der Teilchen verknüpft.

$$R_N \approx b_{\text{crit}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 2E_0} \right) \cot \left(\frac{\theta_{\text{crit}}}{2} \right). \quad (36)$$

Eine Abweichung bei einem Winkel von $\theta = 150^\circ$ entspricht einem Radius von

$$R_N \approx 6.8 \text{ fm}.$$

Nach

$$R = R_0 \cdot \sqrt[3]{A} \quad \text{with} \quad R_0 \approx 1.2 \text{ fm} \quad (37)$$

erwartet man für ^{197}Au einen Wert von 6.98 fm.

Vorsicht!

$R_N \neq b_{\text{crit}}$! **Siehe z.B. Demtröder 4 Kap. 2.2.** Man muss immer eine der Größen E_0 oder θ_{crit} festhalten, um in der jeweils anderen den kritischen Parameter zu finden. Im gegebenen Fall muss daher die Energie der α -Teilchen konstant bleiben.

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 2

Bearbeitung bis 29.04.2010

Aufgabe 1: Luminosität

Zur Zeit wird am CERN in Genf der pp -Speicherring LHC in Betrieb genommen. In dem 26.7 km langen Ring sollen in beiden Umlaufrichtungen 2808 Pakete (Bunches) von jeweils $1.1 \cdot 10^{11}$ Protonen gespeichert werden. Die Pakete kollidieren bei einer Schwerpunktsenergie von 14 TeV auf einer Fläche mit einem effektiven Radius von $33 \mu\text{m}$. Wie groß ist die Luminosität? Wieviele Ereignisse erwartet man innerhalb eines Tages für eine Reaktion mit einem Wirkungsquerschnitt von 30 pb (Größenordnung des erwarteten Wirkungsquerschnitts für Higgsproduktion bei kleiner Higgsmasse)?

Lösung:

Die Luminosität eines Speicherrings ist gegeben durch die Anzahlen der Teilchen pro Paket N_1 und N_2 , die Fläche A der Wechselwirkungszone sowie die Frequenz ν , mit der die Pakete kollidieren:

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{A} \cdot \nu$$

Hier ist $N_1 = N_2 = 1.1 \cdot 10^{11}$ und $A = \pi r^2$ mit $r = 33 \mu\text{m}$. Die Frequenz ergibt sich aus dem Umfang $U = 26.7 \text{ km}$, der Anzahl der Pakete $n = 2808$ und der Geschwindigkeit der Protonen $v \approx c$:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{U} = \frac{nc}{U}$$

Damit erhält man eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = 1.1 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Bei dieser Luminosität erwartet man innerhalb einer Zeit von $\Delta t = 1 \text{ d}$ bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 30 \text{ pb}$ die folgende Anzahl N von Ereignissen:

$$N = \frac{dN}{dt} \cdot \Delta t = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta t = 2.9 \cdot 10^4$$

Aufgabe 2: De-Broglie-Wellenlänge

Welche kinetische Energie müssen Neutrinos ($m_\nu = 0$), Elektronen, Myonen oder Protonen haben, damit sie eine de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = 2\pi\lambda = 1 \text{ fm}$ haben? Welche Energie haben Photonen mit einer Wellenlänge von 1 fm ?

Lösung:

Für die de-Broglie-Wellenlänge gilt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie $E_{kin} = E - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$:

$$\begin{aligned} \text{Neutrino: } E_{kin} &= 1.240 \text{ GeV} \\ \text{Elektron: } E_{kin} &= 1.239 \text{ GeV} \\ \text{Myon: } E_{kin} &= 1.139 \text{ GeV} \\ \text{Proton: } E_{kin} &= 0.617 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Für Photonen gilt:

$$E = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Aufgabe 3: Formfaktor

- a) Zeigen Sie, dass der Formfaktor für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r = |\vec{r}|)$ durch

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr$$

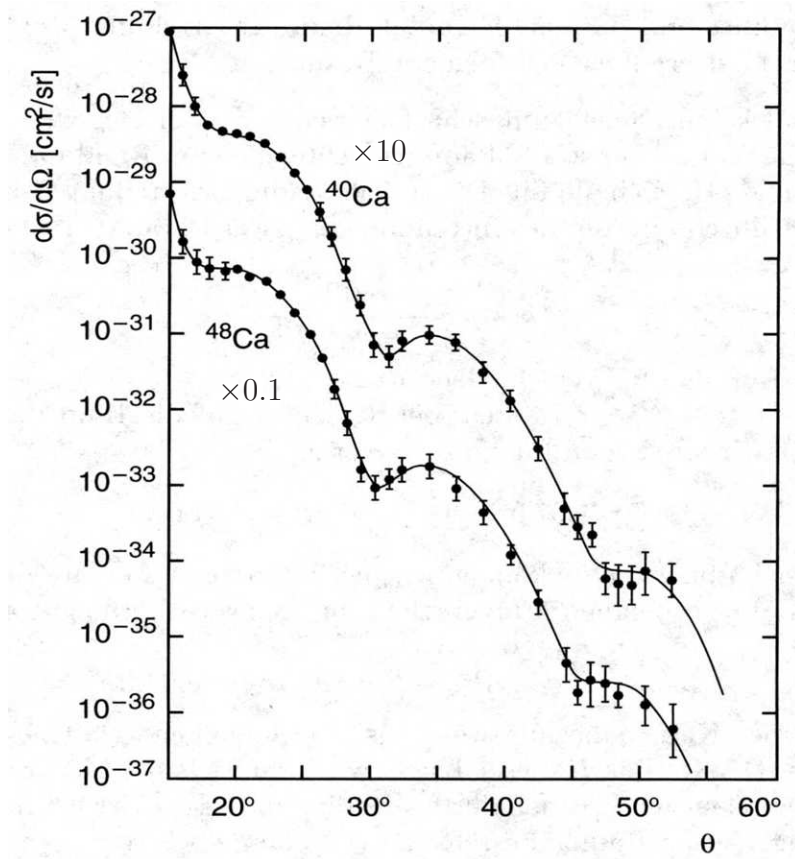
gegeben ist. Dabei sei ρ auf 1 normiert: $\int \rho(\vec{r}) d^3r = 1$.

- b) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme der Formfaktor

$$F(q) = \frac{3}{x^3} \cdot (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{qR}{\hbar}$$

ist.

- c) Berechnen Sie $F(q = 0)$
- d) Ermitteln Sie (graphisch oder numerisch) die ersten drei positiven Nullstellen von $F(x)$.
- e) In der Abbildung ist der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen mit einer Energie von $E = 750 \text{ MeV}$ an ^{40}Ca und ^{48}Ca in Abhängigkeit vom Streuwinkel aufgetragen. Welchen Streuwinkeln entsprechen die im vorigen Aufgabenteil ermittelten Nullstellen? Bestimmen Sie daraus den Kernradius R der beiden Isotope.



Lösung:

- a) Der Formfaktor ist für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert als

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar} d^3r$$

Für die Integration werden hier Kugelkoordinaten verwendet. Dabei wird die z -Achse ($\theta = 0$) in Richtung von $\vec{q}$ gewählt, so dass $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$ ist:

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr \cos \theta / \hbar} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (\text{Subst. } x = \cos \theta) \\
 &= -2\pi \int_{-1}^1 \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr x / \hbar} r^2 \, dr \, dx \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \left[\frac{\hbar}{iqr} e^{iqr x / \hbar} \right]_{-1}^1 r^2 \, dr \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr / \hbar} - e^{-iqr / \hbar}) r^2 \, dr \\
 &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr / \hbar)}{qr / \hbar} r^2 \, dr
 \end{aligned} \tag{1}$$

- b) Da das Volumen einer Kugel mit Radius R gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$ ist, ist die normierte Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel gegeben durch:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung 1 für den Formfaktor:

$$\begin{aligned} F(q) &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr/\hbar) dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[-r \frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) dr \right) \\ &= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left[-r \cos(qr/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qr/\hbar) \right]_0^R \\ &= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left(-R \cos(qR/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qR/\hbar) \right) \\ &= \frac{3\hbar^3}{q^3 R^3} (\sin(qR/\hbar) - qR/\hbar \cdot \cos(qR/\hbar)) \\ &= \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit } x = \frac{qR}{\hbar} \end{aligned}$$

- c) $F(q=0)$ lässt sich durch Taylorentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen:

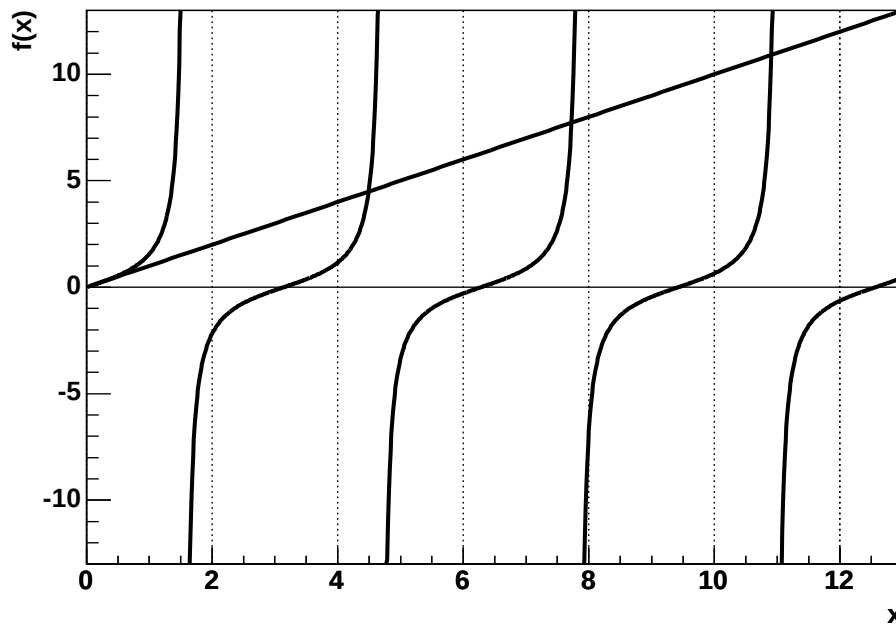
$$\begin{aligned} F(q=0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- d) Aus $F(x) = 0$ folgt:

$$\sin x - x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan x$$

Aus den Schnittpunkten der Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \tan x$ lassen sich also die Nullstellen von $F(x)$ bestimmen.

$$f_1(x)=x, f_2(x)=\tan(x)$$



Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \sin x_n} = x_n - 1/x_n + \cot x_n$$

Für die Startwerte 5, 7 und 11 (aus der graphischen Darstellung) ergeben sich nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.493 \\ x_2 &= 7.725 \\ x_3 &= 10.904 \end{aligned}$$

e) Aus $x = qR/\hbar$ folgt für $p \gg mc$:

$$R = \frac{\hbar}{q} \cdot x = \frac{\hbar c}{2pc \sin \theta/2} \cdot x = \frac{\hbar c}{2E \sin \theta/2} \cdot x$$

Da die lokalen Minima des Wirkungsquerschnitts den Nullstellen von $F(x)$ entsprechen, lässt sich aus ihnen der Radius R bestimmen.

Für ^{40}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 18^\circ &\Rightarrow R_1 = 3.78 \text{ fm} \\ \theta_2 = 31^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.80 \text{ fm} \\ \theta_3 = 47^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.60 \text{ fm} \end{aligned}$$

Für ^{48}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 17^\circ &\Rightarrow R_1 = 4.00 \text{ fm} \\ \theta_2 = 30^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.93 \text{ fm} \\ \theta_3 = 45^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.75 \text{ fm} \end{aligned}$$

Als mittleren Radius erhält man $R = 3.73 \text{ fm}$ für ^{40}Ca und $R = 3.89 \text{ fm}$ für ^{48}Ca .

Aufgabe 4: Weizsäcker-Massenformel

- a) Bestimmen Sie analytisch aus der Weizsäcker-Massenformel die Ladungszahl Z des stabilsten Isobars in Abhängigkeit von A . Nehmen Sie dabei Z als kontinuierliche Variable an und vernachlässigen Sie die Paarungsenergie.
- b) Welche kinetische Energie wird frei, wenn ein ^{238}U -Kern symmetrisch in zwei identische Bruchstücke gespalten wird?
- c) Nehmen Sie an, dass jedes Bruchstück durch β -Zerfall weiter bis zum Massental hin zerfällt. Welches stabile Element wird erreicht und wieviel kinetische Energie wird insgesamt bei den β -Zerfällen frei?

Lösung:

- a) Die Weizsäcker-Massenformel lautet (unter Vernachlässigung der Paarungsenergie):

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{4A}$$

Das Minimum von $M(A, Z)$ bestimmt die Ladungszahl des stabilsten Isobars. Im Minimum gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial M}{\partial Z} &= -m_n + m_p + m_e + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - a_a \frac{A - 2Z}{A} \\ &= -m_n + m_p + m_e - a_a + (2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1})Z \\ \Rightarrow Z &= \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1}} \\ &= \frac{A}{2} \cdot \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{a_a + a_c A^{2/3}} \end{aligned}$$

Mit $a_a = 93.15 \text{ MeV}$ und $a_c = 0.714 \text{ MeV}$ [Povh] ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{A}{2} \cdot \frac{93.94 \text{ MeV}}{93.15 \text{ MeV} + 0.714 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}} \\ &= \frac{A}{1.98 + 0.0152 \cdot A^{2/3}} \end{aligned} \quad (2)$$

- b) Bei der symmetrischen Spaltung von $^{238}_{92}\text{U}$ entstehen zwei Tochterkerne mit $A = 119$ und $Z = 46$ (^{119}Pd). Die frei werdende kinetische Energie ist also:

$$E_{kin} = M(A = 238, Z = 92) - 2 \cdot M(A = 119, Z = 46)$$

Da die Massen-, Volumen- und Asymmetrieterme für Mutter- und Tochterkerne gleich sind, ergibt sich E_{kin} aus der Differenz von Oberflächen-, Coulomb- und Paarungsenergie ($E_p = \delta/\sqrt{A}$, $\delta = -11.2$ MeV für $^{238}_{92}\text{U}$ (gg-Kern), $\delta = 0$ für $^{119}_{46}\text{Pd}$ (ug-Kern)):

$$\begin{aligned} E_{kin} &= a_s(238^{2/3} - 2 \cdot 119^{2/3}) + a_c(92^2 \cdot 238^{-1/3} - 2 \cdot 46^2 \cdot 119^{-1/3}) \\ &\quad + (-11.2 \text{ MeV} \cdot 238^{-1/2} - 2 \cdot 0 \cdot 119^{-1/2}) \\ &= -172.0 \text{ MeV} + 360.9 \text{ MeV} - 0.7 \text{ MeV} \\ &= 188.1 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(Bei Vernachlässigung der Paarungsenergie ist $E_{kin} = 188.8$ MeV.)

- c) Aus Gleichung 2 erhält man $Z = 50.69$ als Position des Minimums. Demnach erfolgen insgesamt 5 β^- -Zerfälle von $^{119}_{46}\text{Pd}$ bis $^{119}_{51}\text{Sb}$ ($\Delta Z = 5$). Da die Masse der beim β^- -Zerfall erzeugten Elektronen bereits in der Weizsäcker-Massenformel berücksichtigt ist, ergibt sich für die insgesamt freigesetzte kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= M(A = 119, Z = 46) - M(A = 119, Z = 51) \\ &= \Delta Z \cdot (m_n - m_p - m_e) + a_c A^{-1/3} (46^2 - 51^2) \\ &\quad + a_a A^{-1} [(46 - A/2)^2 - (51 - A/2)^2] \\ &= 3.9 \text{ MeV} - 70.4 \text{ MeV} + 86.1 \text{ MeV} \\ &= 19.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0, und da die Volumen- und die Oberflächenenergie sich beim β -Zerfall nicht ändern, tragen nur die Massenterme, der Coulombterm und der Asymmetrieterm zur kinetischen Energie bei.

Bemerkung: In Wirklichkeit endet die β -Zerfallskette nicht bei $^{119}_{51}\text{Sb}$, sondern schon beim stabilen Isotop $^{119}_{50}\text{Sn}$. Für diese Kette ergibt sich eine kinetische Energie von $E_{kin} = 19.4$ MeV.

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 03

Bearbeitung bis 06.05.2010

Aufgabe 1: Neutronensterne

Im Allgemeinen kann man annehmen, dass die Dichte in Zentrum von Neutronensternen ein Vielfaches der Dichte von gewöhnlicher Kernmaterie erreichen kann.

- a) Begründen Sie, weshalb ein makroskopischer Körper mit Kernmaterie vergleichbarer Dichte, nicht aus gleichen Teilen an Protonen&Elektronen sowie Neutronen ($N_p = N_e \approx N_n$) zusammengesetzt sein kann, wie die Materie in unserer Umwelt.
- b) Schätzen Sie den Anteil an Protonen und Elektronen in einem Neutronenstern bei normaler Kerndichte ($\rho_0 = 0.15 \text{ Nukleonen/fm}^3$) ab.

Hinweis: Betrachten Sie alle Teilchen als nicht wechselwirkend. Nehmen Sie an, die Elektronen seien hoch relativistisch und die anderen Teilchen seien nicht relativistisch. Nutzen Sie Fermi-Impuls und Fermi-Energie.

Lösung:

Als Randbedingung verwenden wir die Ladungserhaltung. Die Gesamtladung ist $Q_{\text{total}} = 0$.

- a) In Kernmaterie ist die Dichte der Protonen und Neutronen ungefähr gleich der halben Dichte der Nukleonen, also $\rho_p \approx \rho_n \approx \rho_0/2$. Der FERMI-Impuls für Nukleonen ist:

$$p_F \approx 250 \text{ MeV}/c.$$

Ihre FERMI-Energie ist:

$$E_F^{(N)} = \frac{p_F^2}{2M_N} \approx 33 \text{ MeV}.$$

Elektronen der selben Dichte hätten den gleichen FERMI-Impuls, und damit eine FERMI-Energie von:

$$E_F^{(e)} = p_F^2 c^2 = 250 \text{ MeV} \gg E_F^{(N)}$$

Die FERMI-Energie der Elektronen ist wesentlich größer als die der Neutronen. Wenn Elektronen und Protonen zu einem Neutron und einem Neutrino (welches den Neutronenstern verlässt) kombinieren, wird Energie frei.

$$p + e^- \rightarrow n + \nu$$

Aus diesem Grund muss ein solches makroskopisches Objekt einen deutlichen Überschuss an Neutronen besitzen.

b) Die Beziehung von Dichte und FERMI-Impuls ist gegeben durch:

$$\rho = 2 \times \frac{4\pi}{3} p_F^3 / (2\pi\hbar)^3 = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3},$$

Der Faktor 2 berücksichtigt den Spin, und es gilt:

$$p_F = (3\pi^2\hbar^3\rho)^{1/3}.$$

Der FERMI-Impuls von Neutronen der Dichte $\rho = 0.15/\text{fm}^3$ ist:

$$p_F = 324 \text{ MeV}/c$$

und die FERMI-Energie beträgt:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M_n} = 56.0 \text{ MeV}.$$

Sind nur Neutronen vorhanden, bedeutet dies $\rho_n = \rho_0$, $\rho_e = \rho_p = 0$, Neutronen der FERMI-Energie können sich in Protonen und Elektronen umwandeln,

$$n \rightarrow p + e (+\nu) + Q,$$

dabei ist

$$Q = E_F^{(n)} + M_n c^2 - (M_p + m_e) c^2 = 56.78 \text{ MeV}. \quad (E_\nu = 0)$$

Dieser Prozess ist möglich, solange folgende Beziehung gilt:

$$E_F^{(n)} > E_F^{(e)} + E_F^{(p)} + (M_n - M_p - m_e) c^2.$$

Aus a) wissen wir, dass im Gleichgewicht gilt:

$$\rho_e = \rho_p \ll \rho_n$$

und deshalb

$$E_F^{(p)} \approx 0; \quad \rho_n \approx \text{const}, \quad E_F^{(n)} \approx \text{const}.$$

Daraus erhalten wir

$$E_F^{(e)} = 56.8 \text{ MeV} \quad \text{and} \quad p_F^{(e)} = 56.8 \text{ MeV}/c$$

$$\rho_e = \rho_p = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = 8.055 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$$

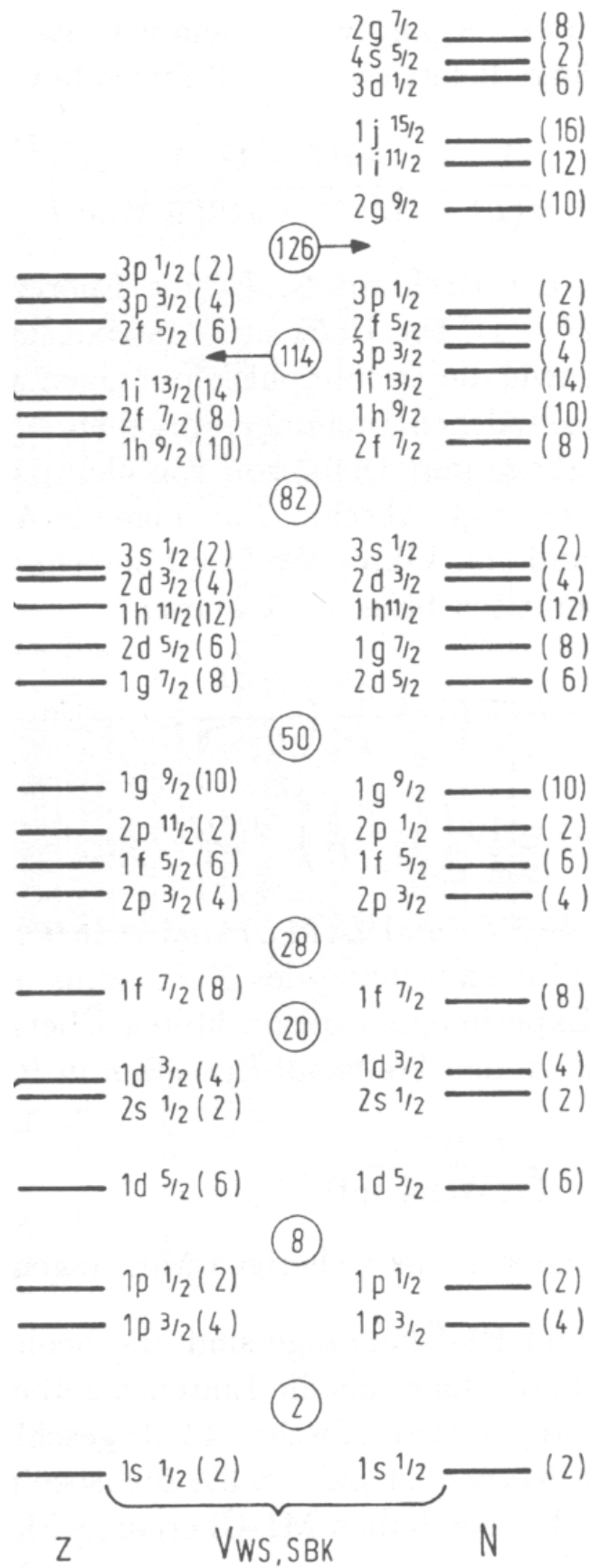
$$\rho_e/\rho_n = 5.37 \times 10^{-3}.$$

Der Anteil der Elektronen und Protonen in solch einem Neutronenstern beträgt ca. 0,5%.

(Vernachlässigt man die Massendifferenz zwischen Protonen und Neutronen, so sollte man zum gleichen Ergebnis kommen.)

Aufgabe 2: Schalenmodell

- a) Auf der nächsten Seite ist die Anordnung der Energieniveaus angegeben, wie sie vom Schalenmodell vorhergesagt wird. Entnehmen Sie diesem Schema die Werte für den Spin und die Parität J^P der folgenden Kerne und geben Sie diese Werte an:
 ^3He , ^5He , ^7Li , ^8Be , ^{13}C , ^{17}F , ^{31}P , ^{114}Sn , ^{209}Pb .
- b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Neutronenschalen $1p_{1/2}$ und $1d_{5/2}$ für Kerne mit $A \approx 16$ aus der gesamten Bindungsenergie von ^{15}O (111.9556 MeV), ^{16}O (127.6193 MeV), und ^{17}O (131.7627 MeV).
- c) Wie interpretieren sie den Unterschied der Bindungsenergie von ^{17}O und ^{17}F (128.2196 MeV)? Schätzen Sie den Radius dieser Kerne ab: Vergleichen Sie dazu die Ergebnisse aus der Annahme homogen geladener Kugeln mit denen aus der Beziehung $r = 1.21 \text{ fm} A^{1/3}$.



Lösung:

- a) Die Eigenschaften der Kerne sind in der unten stehenden Tabelle angegeben. Zuerst notieren wir die Werte für A , Z und N der Kerne und zählen ab, in welchem Niveau das letzte ungepaarte Nukleon ist. Dann können wir die Schalenkonfiguration des einzelnen Nukleons angeben, seinen Bahndrehimpuls und seine Quantenzahlen J^P .

Kern	A	N	Z	Konfiguration	L	J^P
${}^3\text{He}$	3	1	2	n: $1s_{1/2}$	0	$1/2^+$
${}^5\text{He}$	5	3	2	n: $1p_{3/2}$	1	$3/2^-$
${}^7\text{Li}$	7	4	3	p: $1p_{3/2}$	1	$3/2^-$
${}^8\text{Be}$	8	4	4	gg-Kern		0^+
${}^{13}\text{C}$	13	7	6	n: $1p_{1/2}$	1	$1/2^-$
${}^{17}\text{F}$	17	8	9	p: $1d_{5/2}$	2	$5/2^+$
${}^{31}\text{P}$	31	16	15	p: $2s_{1/2}$	0	$1/2^+$
${}^{114}\text{Sn}$	114	64	50	gg-Kern		0^+
${}^{209}\text{Pb}$	209	127	82	n: $2g_{9/2}$	4	$9/2^+$

- b) Man kann den ${}^{17}\text{O}$ -Kern als einen ${}^{16}\text{O}$ -Rumpf mit einem zusätzlichen Nukleon in der $1f_{5/2}$ -Schale betrachten. Die Energie dieses Niveaus ist also gleich $B({}^{16}\text{O}) - B({}^{17}\text{O})$. Die $1p_{1/2}$ -Schale im ${}^{15}\text{O}$ -Kern liegt entsprechend bei einer Energie von $B({}^{15}\text{O}) - B({}^{16}\text{O})$. Die Differenz der beiden Energieniveaus kann man oben ablesen.

$$\begin{aligned} E(1f_{5/2}) - E(1p_{1/2}) &= 2B({}^{16}\text{O}) - B({}^{15}\text{O}) - B({}^{17}\text{O}) \\ &= 11.5203 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- c) Die Bindungsenergie der beiden Kerne unterscheidet sich deutlich, obwohl sie nur Spiegelkerne sind. Im Schalenmodell haben sie den selben Rumpf, der einzige Unterschied ist das äusserste Valenznukleon. Dies ist ein Proton im ${}^{17}\text{F}$ und ein Neutron im ${}^{17}\text{O}$.

Für homogen geladene Kugeln erhalten wir den selben Ausdruck, den wir schon in der WEIZSÄCKER-Massenformel für den COULOMB-Term hatten. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{5} \frac{16\hbar\alpha c}{\Delta E_{\text{Bind}}} \\ &= \frac{3}{5} \frac{16\hbar\alpha c}{3.5431 \text{ MeV}} \\ &= 3.9066 \text{ fm.} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist viel größer als 3.1113 fm. , was wir aus der Gleichung $r = 1.21 \text{ fm} A^{1/3}$ erhalten. Das zusätzliche Nukleon hat also einen größeren Radius als die anderen Nukleonen. Aufgrund der größeren COULOMB-Abstoßung der Protonen ist der Potentialtopf bei Fluor flacher als beim Sauerstoff.

Aufgabe 3: Deuteron Wellenfunktion

Näherungsweise kann das Potential von Proton und Neutron im Deuteron durch ein zentralsymmetrisches Kastenpotential der Tiefe $-V_0$ und Radius $r_0 \approx 1.4$ fm beschrieben werden:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung für den Grundzustand ($l = 0$) des Deuterons:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0 \quad \psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0$$

Was muss hier als Masse m eingesetzt werden? Lösen Sie die Gleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$ unter den Randbedingungen $u(r = 0) = 0$ und $u(r \rightarrow \infty) = 0$ und benutzen Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion und deren Ableitung, um die Tiefe des Potentials abzuschätzen. Gehen Sie von der Näherung aus, dass die Bindungsenergie $B = 2.25$ MeV viel kleiner als V_0 ist. Ist diese Näherung gerechtfertigt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Nukleonen bei einem Radius $r < r_0$ aufhalten?

Lösung:

Die Masse m ist die reduzierte Masse also die halbe Nukleonmasse:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_p/2$$

Für $r < r_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u &= 0 \quad (E + V_0 > 0, u(r = 0) = 0) \\ \Rightarrow u_1(r) &= A_1 \sin kr \quad \text{mit } k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \end{aligned}$$

Für $r > r_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}Eu &= 0 \quad (E < 0 \text{ da gebundener Zustand, } u(r \rightarrow \infty) = 0) \\ \Rightarrow u_2(r) &= A_2 e^{-\kappa r} \quad \text{mit } \kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar \end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ und $\frac{d}{dr}u_1(r_0) = \frac{d}{dr}u_2(r_0)$ folgt

$$\begin{aligned} A_1 \sin kr_0 &= A_2 e^{-\kappa r_0} \\ A_1 k \cos kr_0 &= -A_2 \kappa e^{-\kappa r_0} \end{aligned}$$

Durch Division der zweiten durch die erste Gleichung erhält man:

$$k \cot kr_0 = -\kappa$$

Da die Wellenfunktion im Grundzustand keine Knoten hat, muss $kr_0 < \pi$ sein. Wenn die Bindungsenergie $B = -E$ viel kleiner als V_0 ist, so ist auch $\kappa \ll k$. Daraus folgt

$$\cot kr_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad kr_0 \approx \frac{\pi}{2}$$

Einsetzen von k ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \cdot r_0 &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow 2m(-B + V_0) &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{4r_0^2} \\ \Rightarrow V_0 = B + \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mr_0^2} &\approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mr_0^2} \\ \Rightarrow V_0 = 54.5 \text{ MeV} \quad \text{bzw.} \quad V_0 &\approx 52.2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $B \ll V_0$ gerechtfertigt.

Die Wahrscheinlichkeit P , dass sich die Nukleonen in einem Volumen V , das durch die Radien r_a und r_b begrenzt ist, aufhalten, ist gegeben durch:

$$P = \int_V \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) d^3r = 4\pi \int_{r_a}^{r_b} \psi^*(r)\psi(r) r^2 dr = \int_{r_a}^{r_b} u^2(r) dr$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sind also:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{r_0} u_1^2(r) dr = A_1^2 \int_0^{r_0} \sin^2 kr dr \quad \text{Subst: } r = \frac{x}{k}, \quad kr_0 = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{A_1^2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{A_1^2}{k} \frac{\pi}{4} \\ P_2 &= \int_{r_0}^{\infty} u_2^2(r) dr = A_2^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\kappa r} dr = A_2^2 \left[-\frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{A_2^2}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ kann mit der Näherung $kr_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Beziehung zwischen den Normierungen A_1 und A_2 hergestellt werden:

$$\begin{aligned} u_1(r_0) &= A_1 \sin kr_0 = A_1 \\ &= u_2(r_0) = A_2 e^{-\kappa r_0} \\ \Rightarrow A_2 &= A_1 e^{\kappa r_0} \end{aligned}$$

Daraus folgt für P_2 :

$$P_2 = \frac{A_1^2 e^{2\kappa r_0}}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} = \frac{A_1^2}{2\kappa}$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, gilt:

$$1 = P_1 + P_2 = A_1^2 \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right) \quad \Rightarrow \quad A_1^2 = \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right)^{-1}$$

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit P_1 , dass sich die Nukleonen innerhalb des Radius des Kastenpotentials aufhalten:

$$P_1 = \frac{\pi}{4k \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi\kappa}} = 0.25$$

Obwohl Proton und Neutron ein gebundenes System bilden, halten sie sich also überwiegend ausserhalb des bindenden Potentialtopfes auf.

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 04

Bearbeitung bis 20.05.2010

Aufgabe 1: N–N Potenzial

- a) Betrachten Sie ein System aus zwei Nukleonen in einer relativen S Welle ($L = 0$). Welches sind die möglichen Spin/Isospin Zustände?
- b) Weshalb ist kein gebundener Zustand für $S = 0$ einer beliebigen Kombination mit zwei Nukleonen bekannt (nn,pn,pp)?
- c) Warum ist es aber dann möglich ein gebundenes System von p und n im Zustand $S = 1$ zu beobachten?

Lösung:

- a) Spins mit $s = 1/2$ können zu $S = -1, 0, +1$ koppeln. Die Isospins von Proton und Neutron sind (Nomenklatur: (I, I_3)) $(1/2, +1/2)$ und $(1/2, -1/2)$. Daraus können die folgenden Zustände für die verschiedenen Konfigurationen geformt werden:

Konfiguration	I	I_3	Teilchen
Singlet	0	0	(n,p)
Triplet	1	-1	(n,n)
		0	(n,p)
		+1	(p,p)

- b) Der anziehende Teil des N–N Potential ist nicht stark genug, um einen gebundenen Zustand mit $S = 0$ zu erzeugen.
- c) Ein gebundener Zustand kann für $S = 1$ durch ein anziehendes Zentralpotential gemeinsam mit dem Tensoranteil der starken Wechselwirkung und dem Spin–Spin Anteil erreicht werden. Damit erhalten wir das Deuteron.

Korrespondierende Vorlesungsfolien: V04 – Folie 13-20

Aufgabe 2: Kernfusion in der Sonne und der Gamow-Peak

Die Lösung dieser Aufgabe wird gerade noch überarbeitet und muss nachgereicht werden.

Aufgabe 3: Strukturfunktion

Skizzieren Sie die Strukturfunktion des Protons $F_2(x)$ für ein festes Q^2 unter der Annahme, dass das Proton

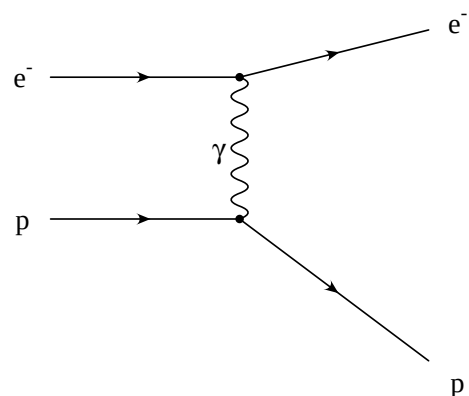
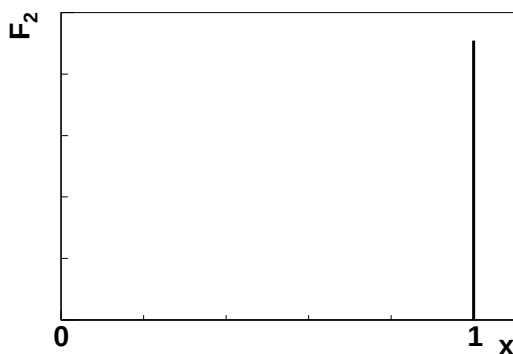
- a) ein einziges elementares Teilchen ist
- b) aus drei nicht wechselwirkenden Valenzquarks besteht
- c) aus drei wechselwirkenden Valenzquarks besteht
- d) aus Valenz- und Seequarks sowie Gluonen besteht.

Zeichnen Sie zu jedem der vier Fälle ein Feynmandiagramm der ep -Streuung.

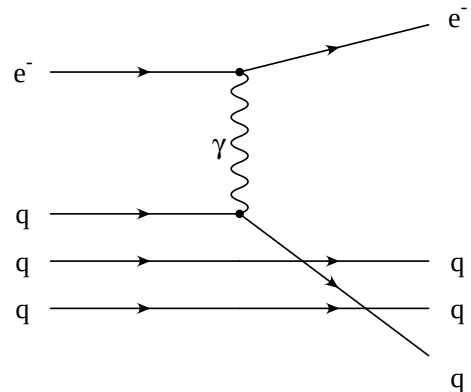
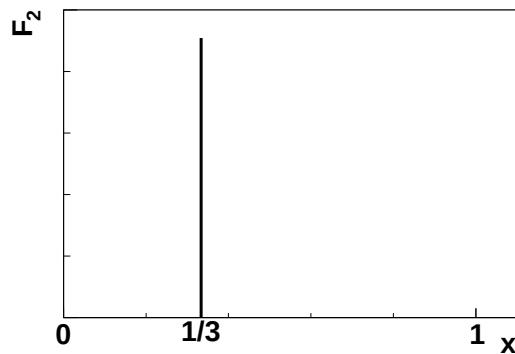
Lösung:

Die Strukturfunktion $F_2(x)$ ist durch die Impulsdichteverteilung der Partonen, an denen gestreut wird, bestimmt.

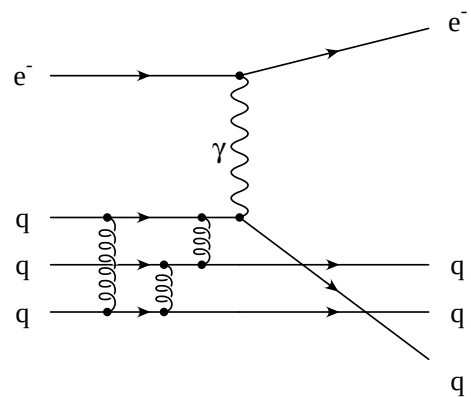
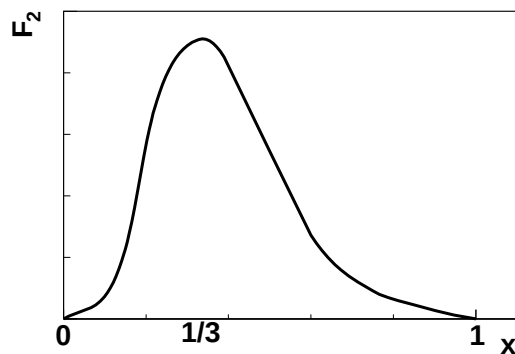
- a) Wenn das Proton ein elementares Teilchen ist, hat es keine Struktur und das an der Reaktion teilnehmende "Parton" trägt den gesamten Impuls des Protons, d.h. F_2 ist eine Deltafunktion bei $x = 1$.



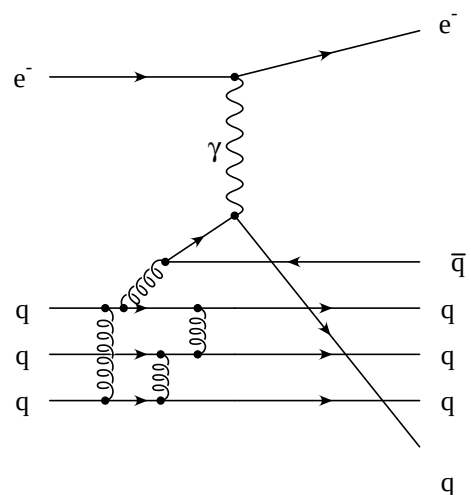
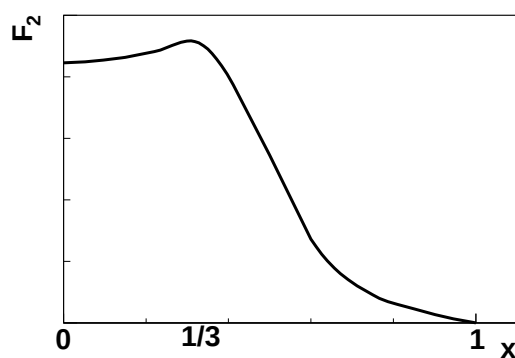
- b) Bei drei nicht wechselwirkenden Partonen trägt jedes davon jeweils ein Drittel des Protonimpulses.



- c) Durch die Wechselwirkung unter den Partonen wird die Impulsverteilung um $x = 1/3$ herum verschmiert.



- d) Dadurch, dass die Seequarks hinzukommen, die in der Regel einen kleinen Impulsanteil haben, gibt es einen zusätzlichen Beitrag zu F_2 bei kleinen x .



Korrespondierende Vorlesungsfolien: V08 – Folie 17

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 05

Bearbeitung bis 27.05.2010

Aufgabe 1: Tunneleffekt und α -Zerfall

Betrachten Sie die Streuung einer ebenen Welle der Energie E (eindimensional, in positive x -Richtung) an einer rechteckigen Potentialbarriere.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{Bereich I,} & -\infty < x < 0 \\ U(> E) & \text{Bereich II,} & 0 \leq x \leq b, \text{ und} \\ 0 & \text{Bereich III,} & b < x < \infty. \end{cases}$$

- a) Geben Sie die Schrödingergleichung für das angegebene Potential an. Beschreiben Sie die Lösungen für die drei verschiedenen Bereiche (Amplituden A und B für einlaufende und reflektierte Welle). Veranschaulichen Sie Ihre Lösung an einer Skizze.
- b) Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen der Potentialregionen an. Wie würden Sie den Transmissionsfaktor definieren?
- c) Nach einigen Rechnungen (welche an dieser Stelle nicht durchgeführt werden müssen) findet man zwischen A_I und A_{III} die Beziehung:

$$A_I = A_{III} e^{ik_I b} \left(\cosh(ik_{II} b) + \underbrace{\frac{i}{2} \left(\frac{ik_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{ik_{II}} \right)}_{\text{In der Ordnung von 1}} \sinh(ik_{II} b) \right),$$

dabei ist k_I die Wellenzahl im Bereich I und k_{II} die Wellenzahl im Bereich II, diese ist rein imaginär. Verwenden Sie die Gleichungen welche exponential- und hyperbolische Funktionen in Beziehung setzen, sowie die Tatsache, dass die Breite der Barriere groß im Vergleich zur de-Broglie Wellenlänge ist, um die Gleichung für den Transmissionsfaktor herzuleiten

$$T = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} b \sqrt{2m(U - E)}\right).$$

- d) Wie würden Sie den Transmissionskoeffizienten aus obiger Gleichung beschreiben für den Fall einer Coulombbarriere. Geben Sie eine kurze Beschreibung mit Skizze an.

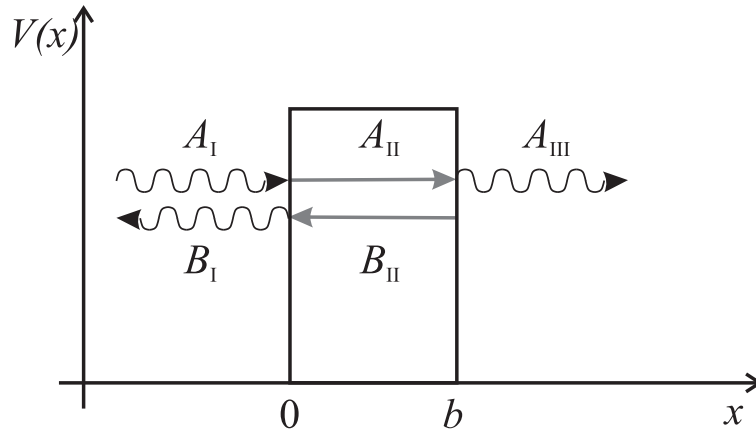
Lösung:

a) Die Schrödingergleichung für ein gegebenes Potential $V(x)$ ist

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right) \psi(x) = E \psi(x)$$

im stationären Fall.

Der Fall einlaufender/transmittierter und reflektierter Wellen ist wie im Bild unten gezeigt:



Wir haben eine einlaufende Welle der Amplitude A_I mit der Energie E . Die Potentialbarriere der Höhe U ist höher als E . Ein Teil der Welle wird an der Barriere reflektiert, diese Welle hat die Amplitude B_I . Die gesamte Welle welche in Bereich I besteht ist eine Überlagerung aus einlaufender und reflektierter Welle.

Da die Potentialbarriere höher ist als die Energie der einlaufenden Welle ist der Wellenvektor innerhalb der Barriere rein imaginär. Die Amplitude in Propagationsrichtung der einlaufenden Welle ist A_{II} . Am Übergang zwischen Bereich II und III wird die Welle teilweise mit der Amplitude B_{II} reflektiert und teilweise mit A_{III} transmittiert.

Klassisch ist keine Transmission in den Bereich III möglich wenn die Potentialbarriere höher als die Energie der Welle ist, Quantenmechanisch wird die Welle jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit transmittiert.

Darum gilt für die Wellenfunktionen:

$$\begin{aligned} \psi_I &= A_I \exp(ik_I x) + B_I \exp(-ik_I x) & \text{mit } k_I &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \\ \psi_{II} &= A_{II} \exp(ik_{II} x) + B_{II} \exp(-ik_{II} x) & \text{mit } k_{II} &= \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}, \\ \psi_{III} &= A_{III} \exp(ik_{III} x) & \text{mit } k_{III} &= k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \end{aligned}$$

Der Wellenvektor in Region II ist — wie oben schon erwähnt — rein imaginär. Damit lässt sich $\kappa_{\text{II}} = ik_{\text{II}}$ als reale Größe schreiben. Die Wellenvektoren in Bereich I und III sind identisch, da das Teilchen dort dasselbe Potential spürt.

- b) Die Randbedingungen stellen sicher, dass die Welle an den Grenzen stetig ist. Darum müssen wir fordern, dass die Funktion und ihre erste Ableitung an diesen Stellen stetig ist.

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(0) &= \psi_{\text{II}}, & \psi_{\text{II}}(b) &= \psi_{\text{III}}(b) \\ \psi'_{\text{I}}(0) &= \psi'_{\text{II}}, & \psi'_{\text{II}}(b) &= \psi'_{\text{III}}(b)\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Bedingungen

$$\begin{aligned}A_{\text{I}} + B_{\text{I}} &= A_{\text{II}} + B_{\text{II}} \\ ik_{\text{I}}(A_{\text{I}} - B_{\text{I}}) &= \kappa_{\text{II}}(A_{\text{II}} - B_{\text{II}}) \\ A_{\text{III}} \exp(ik_{\text{I}}b) &= A_{\text{II}} \exp(\kappa_{\text{II}}b) + B_{\text{II}} \exp(-\kappa_{\text{II}}b) \\ ik_{\text{I}}A_{\text{III}} \exp(ik_{\text{I}}b) &= \kappa_{\text{II}}(A_{\text{II}} \exp(\kappa_{\text{II}}b) - B_{\text{II}} \exp(-\kappa_{\text{II}}b))\end{aligned}$$

für die Amplituden.

Der Transmissionsfaktor lässt sich durch die einlaufende Stromdichte $\vec{j}_{\text{in}}$ und die Stromdichte hinter der Potentialbarriere $\vec{j}_{\text{out}}$ definieren als

$$\begin{aligned}T &= \frac{|\vec{j}_{\text{out}}|}{|\vec{j}_{\text{in}}|} \\ &= \frac{|\psi_{\text{out}}|^2}{|\psi_{\text{in}}|^2} \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}}.\end{aligned}$$

In unserem Fall ist die einfallende Wellenfunktion gegeben durch $\psi_{\text{in}} = \psi_{\text{I}}$ und die auslaufende durch $\psi_{\text{out}} = \psi_{\text{III}}$. Die Wellengeschwindigkeiten in Region I und III sind gleich, analog zu ihren Wellenvektoren spüren sie das gleiche Potential $v_{\text{out}} = v_{\text{in}}$. Das Ergebnis ist ein Transmissionsfaktor von

$$\begin{aligned}T &= \frac{|\psi_{\text{III}}|^2}{|\psi_{\text{I}}|^2} \\ &= \frac{|\psi_{\text{III}}\psi_{\text{III}}^*|}{|\psi_{\text{I}}\psi_{\text{I}}^*|} \\ &= \frac{|A_{\text{III}}|^2}{|A_{\text{I}}|^2},\end{aligned}$$

Das Verhältnis der quadratischen Amplituden in Region I und III.

- c) Ist die Beziehung zwischen den zwei Amplituden A_{I} und A_{III} gegeben wie in der Übung, dann können wir eine einfache Gleichung für den Transmissionsfaktor

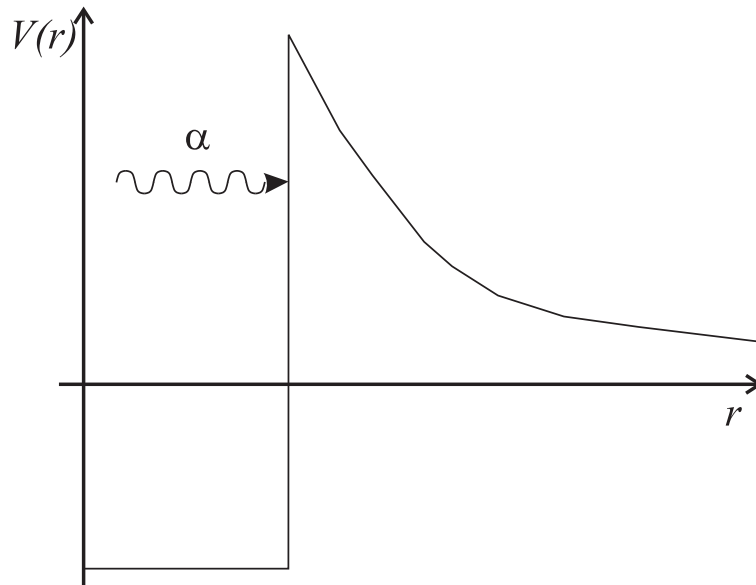
ableiten, indem wir die Beziehung zwischen hyperbolischen Funktionen und der Exponentialfunktion anwenden.

$$\begin{aligned}
 A_I &= A_{III} e^{ik_I b} \left(\cosh(ik_{II} b) + \underbrace{\frac{i}{2} \left(\frac{ik_{II}}{k_I} - \frac{k_I}{ik_{II}} \right)}_{\text{Ordnung von 1}} \sinh(ik_{II} b) \right) \\
 &= A_{III} e^{ik_I b} \left(\frac{1}{2} (e^{\kappa_{II} b} + e^{-\kappa_{II} b}) + \frac{1}{2} (e^{\kappa_{II} b} - e^{-\kappa_{II} b}) \right) \\
 &= A_{III} e^{ik_I b} \left(\frac{1}{2} e^{\kappa_{II} b} + \frac{1}{2} e^{\kappa_{II} b} \right) \\
 &= A_{III} e^{ik_I b} e^{\kappa_{II} b}
 \end{aligned}$$

Nun verwenden wir, was wir in Teilaufgabe b) über den Transmissionsfaktor hergeleitet haben

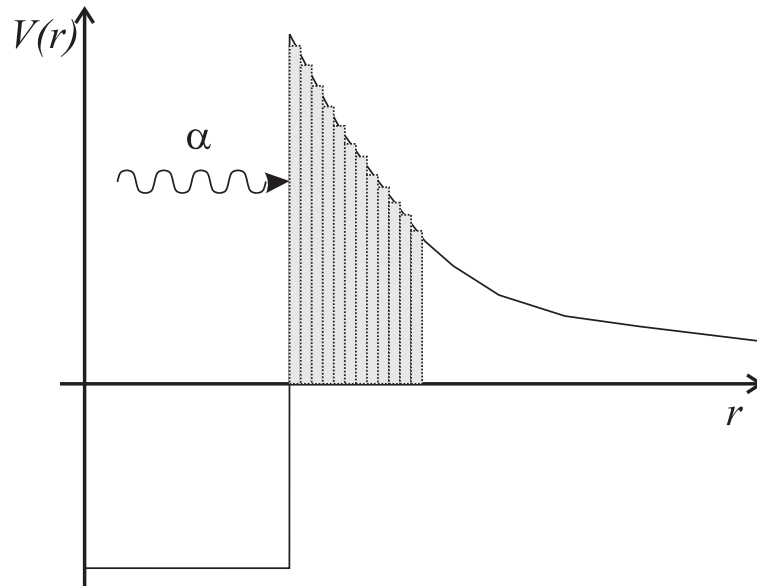
$$\begin{aligned}
 T &= \frac{A_{III} A_{III}^*}{A_I A_I^*} \\
 &= \frac{1}{e^{ik_I b} e^{\kappa_{II} b} e^{ik_I b} e^{\kappa_{II} b}} \\
 &= e^{-2\kappa_{II} b} \\
 &= e^{-\frac{2b}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)}}
 \end{aligned}$$

- d) Betrachtet man den α Zerfall eines Atomkerns, dann ist die Annahme eines Rechteckpotentials eine zu starke Vereinfachung. Ein realistischeres Potential wäre:



Es besteht aus zwei überlappenden Teilen: Das Potential innerhalb des Kerns, welches einen Potentialtopf darstellt, und das Coulombpotential, welches groß für geringe Abstände ist und für $r \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Wollen wir dieses Problem lösen, können wir das Potential in Bereiche unterteilen. Innerhalb dieser Bereiche nähern wir das Potential jeweils durch ein Rechteck an. Lassen wir nun die Breite dieser Bereiche gegen 0 gehen und integrieren über alle, sollten wir ein vernünftiges Ergebnis erhalten.



Damit erhält man ein Ergebnis, bei welchem man im Exponenten des Transmissionsfaktors integriert

$$T = \exp(-2 \int_R^{R'} k dr).$$

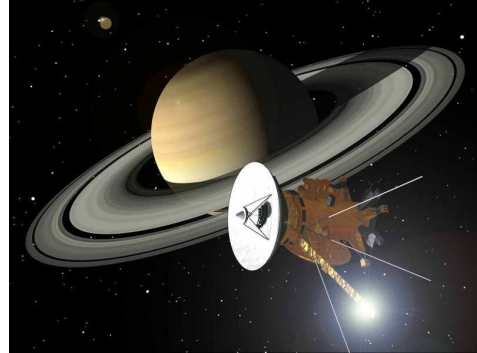
Berücksichtigt man die Radialsymmetrie, erhält man verschiedene Partialwellen in der Gleichung. Die Wellenzahl ist gegeben durch

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \left(V(r) \frac{(l+1)\hbar}{2mr} - E \right)}.$$

Danach war aber nicht explizit gefragt.

Aufgabe 2: Die Radioisotopengeneratoren der Raumsonde Cassini

Die Raumsonde Cassini startete 1997 und erreichte ihr Ziel Saturn im Jahr 2004. Aufgrund der großen Entfernung zur Sonne ist die photovoltaische Stromerzeugung nicht möglich. Stattdessen werden drei Radioisotopengeneratoren eingesetzt, welche insgesamt 32.8 kg Plutoniumdioxid (PuO_2) enthalten. Das verwendete Plutonium besteht hauptsächlich aus dem Isotop ^{238}Pu mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 87.7 \text{ a}$ und einer Energie der α -Teilchen von $E_\alpha = 5.593 \text{ MeV}$.



Die entstehende Wärme wird durch einen thermoelektrischen Generator in elektrische Energie umgewandelt. Die Umwandlungseffizienz ist hierbei $\varepsilon \approx 8 \%$.

- Berechnen Sie die Aktivität des Plutoniums in den Generatoren zu Beginn beim Start im Jahre 1997 und am geplanten Ende der Primärmission nach 11 Jahren.
- Berechnen Sie die elektrische Leistung, die zu Beginn und 11 Jahre später produziert wird.
- Schätzen Sie die benötigte Fläche für Solarzellen ab, die notwendig wären, um dieselbe elektrische Leistung zur Verfügung zu stellen. Solarzellen in der Weltraumtechnik erreichen einen Wirkungsgrad von $\varepsilon \approx 25 \%$.

Lösung:

- a) Wir wissen dass die Zerfallsrate mit der Halbwertszeit zusammenhängt über:

$$\begin{aligned} N(T_{1/2}) &= \frac{1}{2} N_0 \\ &= N_0 \exp(-\lambda T_{1/2}), \end{aligned}$$

daraus erhalten wir $\lambda T_{1/2} = \ln 2$, in unserem Fall ist die Zerfallsrate (normiert auf einen Kern) $\lambda = 2.50 \cdot 10^{-10} / \text{s}$.

Die Aktivität einer Substanz im Verhältnis zur Zahl der radioaktiven Kerne in der Probe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \lambda N \\ &= \lambda N_A \frac{m}{M_{\text{mol}}(\text{PuO}_2)} \\ \text{mit } M_{\text{mol}}(\text{PuO}_2) &\approx M_{\text{mol}}(\text{Pu}) + 2M_{\text{mol}}(\text{O}) = 270.05 \frac{\text{g}}{\text{mol}}. \end{aligned}$$

Mit den oben angegebenen Werten haben die Generatoren eine Aktivität von $A_0 = 1.83 \cdot 10^{16}/\text{s}$ beim Start. Zu einem späteren Zeitpunkt ist die Aktivität gegeben durch

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \exp(-\lambda t) \\ &= A_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right) \end{aligned}$$

Nach 11 Jahren ist sie auf $A_0 = 1.68 \cdot 10^{16}/\text{s}$ gefallen.

- b) Um die Leistung zu bestimmen muss man die Energie die durch α -Teilchen pro Zeitintervall Δt emittiert wird bestimmen. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{E_{\text{tot}}(t)}{\Delta t} \\ &= A(t) \cdot E_\alpha. \end{aligned}$$

Die erzeugte Leistung ist $P_0 = 16399 \text{ W}$ und $P(11 \text{ a}) = 15055 \text{ W}$. Mit einer Effizienz von $\varepsilon = 8 \%$ ist die elektrische Leistung $P_0^{\text{el}} = 1311 \text{ W}$ und $P^{\text{el}}(11 \text{ a}) = 1204 \text{ W}$.

Zur Diskussion im Tutorium: Die tatsächlichen erwarteten Werte für die Cassini-Sonde sind $P_0^{\text{el}} = 855 \text{ W}$ und $P^{\text{el}}(11 \text{ a}) = 633 \text{ W}$. Mögliche Ursachen für die Abweichung sind:

- Eine Mischung mit anderen Plutoniumisotopen längerer Halbwertszeit (z. B. $T_{1/2}({}^{239}\text{Pu}) = 24110 \text{ a}$).
 - Zeit zwischen Isotopenproduktion und Start.
 - Abnahme der Effizienz.
 - Hitzeverluste.
 - Verlust von α -Teilchen.
- c) Solarzellen die in Satelliten verwendet werden erreichen Effizienzen von bis zu $\varepsilon_{\text{sc}} = 25 \%$. Die Solarkonstante ist $q_{\text{S}} = 1367 \text{ W/m}^2$. Der mittlere Abstand der Erde zur Sonne ist $R_{\text{ES}} = 1 \text{ AU}$, der mittlere Abstand des Saturn zur Sonne ist $R_{\text{SaS}} = 9.5 \text{ AU}$.

Nimmt man senkrechten Einfall der Sonnenstrahlung an (durch Ausrichten der Solarzellen), dann wäre die produzierte elektrische Leistung pro Fläche

$$P^{\text{el}}/A = \varepsilon_{\text{sc}} q_{\text{S}} \frac{R_{\text{ES}}^2}{R_{\text{SaS}}^2} = 3.8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (1)$$

Um eine vergleichbare elektrische Leistung zu erhalten wie mit dem Radioisotopengenerator wären mehr als 300 m^2 Solarzellen nötig.

Aufgabe 3: Thorium-Zerfallskette

Eine Probe Erz enthält 86.7 g ^{232}Th und 17.7 g ^{208}Pb . Berechnen sie das Alter der Probe unter der Annahme, dass sie ursprünglich kein ^{208}Pb enthielt.

Lösung:

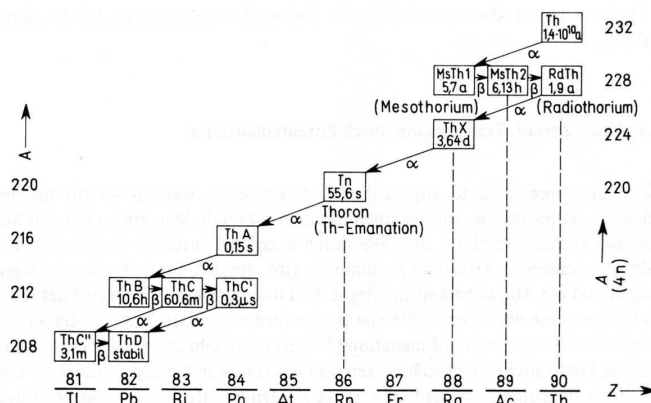
In der ^{232}Th Zerfallskette haben alle sekundären Zerfälle abgesehen vom ^{232}Th Zerfall vernachlässigbare Halbwertszeiten. Das Verhältnis von $N(t)/N_0$ ist mit $N(t) \propto m(t) = 86.7 \text{ g}$ und $m_0 = m(^{232}\text{Th}) + m(^{208}\text{Pb}) \cdot 232/208$ gegeben als

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{m(t)}{m_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\ln 2 \frac{t}{T_{1/2}}}. \quad (2)$$

Dies ergibt für das Alter

$$t = -\frac{1}{\ln 2} T_{1/2} \ln \frac{m(t)}{m_0}. \quad (3)$$

das Verhältnis $m(t)/m_0 = 86.7/(86.7 + 17.7 \cdot 232/208) = 86.7/112.0 = 0.814$. Das Alter der Erzprobe ist damit $4.14 \cdot 10^9$ Jahre.



Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 06

Bearbeitung bis 10.06.2010

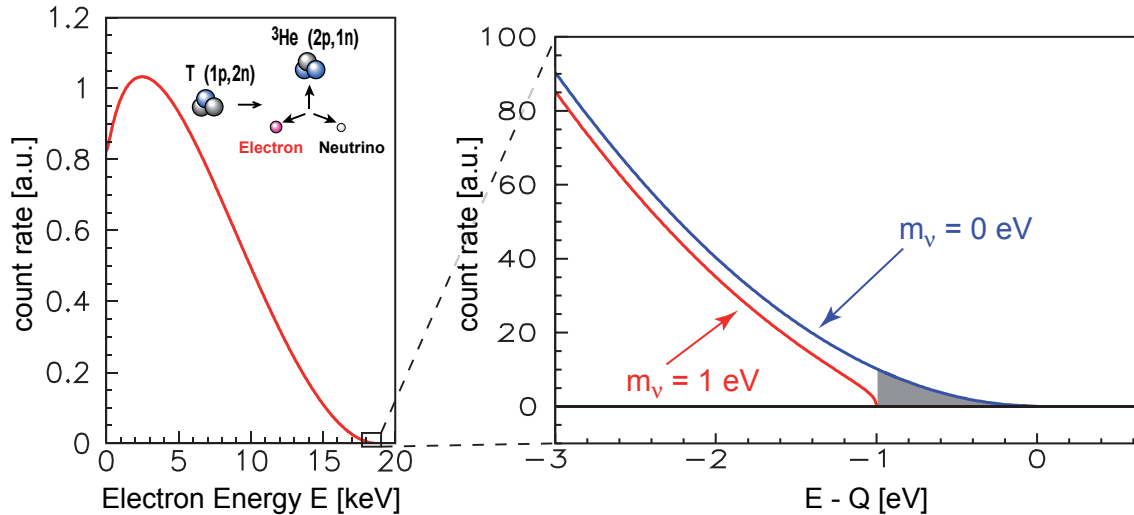
Aufgabe 1: Das β -Spektrum und Fermis Goldene Regel

Die Form des β -Spektrum ist gegeben durch

$$\frac{d^2N}{dt dE} = C \cdot |M_{\text{had}}^2| \cdot F(E, Z+1) \cdot p_e \cdot \underbrace{(E + m_e c^2)}_{= E_{e, \text{ges}}} \cdot E_\nu \cdot \underbrace{\sqrt{E_\nu^2 - m_{\nu_e}^2 c^4}}_{= p_\nu} \cdot \underbrace{\Theta(E_\nu - m_{\nu_e} c^2)}_{\rightarrow E_\nu > m_{\nu_e} c^2 !},$$

wobei alle konstanten Vorfaktoren zur Vereinfachung in C zusammengefasst wurden. Des Weiteren ist $E_\nu = Q - E$ die Maximalenergie der Neutrinos und $F(E, Z+1)$ die Fermifunktion, die die Coulomb-Wechselwirkung des emittierten Elektrons mit dem Kernladung berücksichtigt. Vorsicht: E stellt die kinetische Energie der emittierten Elektronen dar, wogegen E_ν die Gesamtenergie der Neutrinos beschreibt. Dieser Ausdruck kann mittels Fermis Goldener Regel hergeleitet werden.

- (a) Wie ist die Anzahl von verschiedenen Zuständen dn in einem Volumen V im Impulsraum zwischen p und $p + dp$? Diese Anzahl lässt sich aus dem Fermigas Modell herleiten.
- (b) Die Masse des Kerns ist groß im Vergleich zur Masse des emittierten Leptons. Der Rückstoßimpuls wird dadurch immer vom Kern ausgeglichen, sodass die Richtung von emittiertem Elektron und Neutrino in guter Näherung unkorreliert sind. Daher kann die allgemeine Zustandsdichte als Produkt von zwei unabhängigen Dichte für Elektronen und Neutrinos betrachtet werden. Leiten Sie den Ausdruck für die Zustandsdichte $\rho(E)$ in Fermis Goldener Regel her. Verwenden Sie dazu $E_\nu = Q - E$ um alle Energien und Impulse durch Terme der kinetischer Energie und Masse des Elektrons auszudrücken.
- (c) Das Übergangsmatrixelement $|M|$ kann in einen leptonischen Teil M_{lep} und einen hadronischen Teil M_{had} getrennt werden. Leiten sie einen Ausdruck für das β -Spektrum unter Verwendung von $F(E, Z+1) = V^2 \cdot |M_{\text{lep}}^2|$ her. Der leptonische Teil resultiert aus der Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Leptonen innerhalb des Kerns aufhalten: $1/V$ für die Neutrinos und $1/V \cdot F(E, Z+1)$ für die Elektronen.



(d) **Zur Diskussion im Tutorium:** Zur direkten Bestimmung der Neutrinomasse wird das Elektronen-Spektrum von β -Strahlern wie Tritium oder Rhenium untersucht.

- (i) Betrachten Sie die Observable der ν -Masse und ihre Abhängigkeit.
- (ii) Um welchen Faktor müssen systematische und statistische Fehler reduziert werden, wenn die Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung verbessert werden soll?
- (ii) In welchen Bereich des Spektrums hat die Neutrinomasse den größten Einfluss auf dessen Verlauf?
- (iv) Wie groß ist der Anteil von Elektronen in einem 1 eV breiten Energieintervall unterhalb des Endpunktes? Welche Rate erwartet man also in diesem Energiebereich, wenn die β -Quelle eine Aktivität von 10^{11} Bq hat. Verwenden Sie für $Q = 18,6$ keV und nehmen Sie an, dass das Matrixelement $|M_{\text{had}}|$ unabhängig von der Energie ist.

Lösung:

Definitionen nach Otten, Weinheimer [2]

Zerfallsenergie Q Die Freisetzungüberschussenergie (release surplus energy) Q wird auf die kinetische Energie des β Teilchen E , die Gesamtenergie des Neutrinos E_ν , die Rückstoßenergie E_{rec} des Tochterkerns sowie die Anregung des Tochterkerns in einen Endzustand V_j aufgeteilt.

$$Q = E + E_\nu + E_{\text{rec}} + V_j \quad (1)$$

Endpunktenergie E_0 Die Endpunktsenergie ist die Energie an der das Spektrum endet, falls der Tochterkern im Grundzustand erzeugt wird ($V_j = V_0 = 0$)

$$E_0 = Q - E_{\text{rec}} \quad (2)$$

Gesamtenergie des Elektrons $E_{e,ges}$ Die Gesamtenergie des Elektrons beträgt
 $E_{e,ges} = E + m_e c^4$

Im folgenden wollen wir zur Vereinfachung sowohl die Rückstoßenergie E_{rec} als auch das Endzustandsspektrum V_j vernachlässigen.

- (a) Die Anzahl unterschiedlicher Zustände dn in einem Volumen V mit Impulsen zwischen p und $p + dp$ bei einer gegebenen Energie E_{ges} lautet

$$dn = \frac{4\pi V p^2 dp}{h^3} = \frac{4\pi V p E_{ges} dE_{ges}}{h^3 c^2}. \quad (3)$$

(Verwende $p = 1/c \cdot \sqrt{E_{ges}^2 - m^2 c^4}$ und $dp/dE_{ges} = E_{ges}/c \cdot (E_{ges}^2 - m^2 c^4)^{-1/2}$, dadurch wird $dp = E_{ges}/c \cdot (E_{ges}^2 - m^2 c^4)^{-1/2} dE_{ges}$.) Die Zustandsdichte pro Energieintervall beträgt

$$\frac{dn}{dE_{ges}} = \frac{V p E_{ges}}{2\pi^2 \hbar^3 c^2}. \quad (4)$$

- (b) Die Dichte $\rho(E)$ für unabhängige Neutrino- und Elektronenzustandsdichte ist

$$\rho(E) = \frac{dn_e}{dE_{e,ges}} \cdot \frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V^2 p_e E_{e,ges} p_\nu E_\nu}{4\pi^4 \hbar^6 c^4}. \quad (5)$$

(Verwende, dass das Differential der kinetischen Energie E gleich den Differentialen der Gesamtenergien $E_{e,ges}$ und E_ν ist.) Mit $E_\nu = Q - E$ und $p_\nu = \sqrt{(E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4)}/c^2 = \sqrt{((Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4)}/c^2$ wird die Dichte $\rho(E)$

$$\rho(E) = p_{e,ges} E_{e,ges} \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot (Q - E) \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (6)$$

- (c) Fermis Goldene Regel lautet

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} |M^2| \rho(E). \quad (7)$$

Aus Gleichung (6) und $|M^2| = A |M_{lep}^2| |M_{had}^2|$ erhält man

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} A |M_{lep}^2| |M_{had}^2| p_e E_{e,ges} \sqrt{(Q - E)^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot (Q - E) \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (8)$$

Die Verwendung von $|M_{lep}^2| = 1/V^2 \cdot F(E, Z + 1)$ und $E_\nu = Q - E$ führt zu

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = \frac{2\pi}{\hbar} A \cdot F(E, Z + 1) \cdot |M_{had}^2| p_e E_e \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot \frac{E_\nu}{4\pi^4 \hbar^6 c^5}. \quad (9)$$

Alle Konstanten werden in A' zusammengefasst. Mit $\Theta(E_\nu - m_\nu c^2)$ kann die Bedingung erfüllt werden, dass $\sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \geq 0$ und $E_{e,ges} = m_e c^2 + E$ gilt. Die Form des β -Spektrums ist damit gegeben als

$$\frac{d^2 N}{dt dE} = A' \cdot F(E, Z + 1) \cdot |M_{had}^2| p_e \cdot (m_e c^2 + E) \cdot \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \cdot E_\nu \cdot \Theta(E_\nu - m_\nu c^2). \quad (10)$$

(d) **Diskussion im Tutorium**

- (i) Die Observable in der Neutrinomassenmessung mittels β -Spektrum ist m_ν^2 .
- (ii) Eine Verringerung der systematischen und statistischen Fehler um zwei Größenordnungen (z.B. 100) führt zu einer Verbesserung der Sensitivität auf die Neutrinomasse um eine Größenordnung (z.B. 10). Der Grund dafür ist das die Observable m_ν^2 ist und nicht m_ν .
- (ii) Wie im Bild gezeigt hat die Neutrinomasse nur einen deutlichen Einfluss am Endpunkt des Spektrums.
- (iv) Der Anteil der Elektronen im 1 eV breiten Intervall unterhalb des Endpunkts (in diesem vereinfachenden Fall ist $E_0 = Q$) kann wie folgt abgeschätzt werden.

$$\delta = \left(\frac{\Delta E}{E_0} \right)^3 \quad (11)$$

$$= \left(\frac{1 \text{ eV}}{18600 \text{ eV}} \right)^3 \quad (12)$$

$$= 1.6 \cdot 10^{-13} \quad (13)$$

Verwende Näherung aus Vorlesung 10 Seite 17 für die Zählrate $N(E)$:

$$N(E) \propto (E_0 - E)^2 \text{ für große } E, \text{ bzw.} \quad (14)$$

$$\propto (Q - E)^2 \text{ in aktueller Notation.} \quad (15)$$

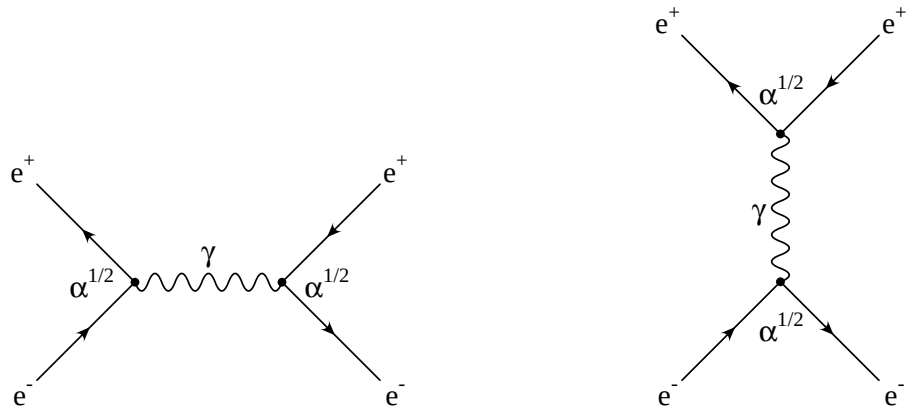
(Näherung ergibt sich auch aus Taylor-Entwicklung des Spektrums um $m_\nu = 0$.) Damit erhalten wir eine Rate in diesem Energiebereich von $n = \delta \cdot A = 1.6 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{11} \text{ Bq} = 0.016 \frac{1}{s}$. Dies sind also ca. 1300 Ereignisse am Tag.

Aufgabe 2: Feynman-Diagramme

- a) Zeichnen Sie alle Feynman-Diagramme für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ bei denen genau ein Photon ausgetauscht wird. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ betrachtet?
- b) Zeichnen Sie jeweils ein Feynman-Diagramm für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang. Beachten Sie dabei, dass das ausgetauschte W -Boson an Vertices mit Nukleonen und an Vertices mit Leptonen koppelt. Vertices mit Nukleonen und Leptonen gleichzeitig kommen nicht vor.

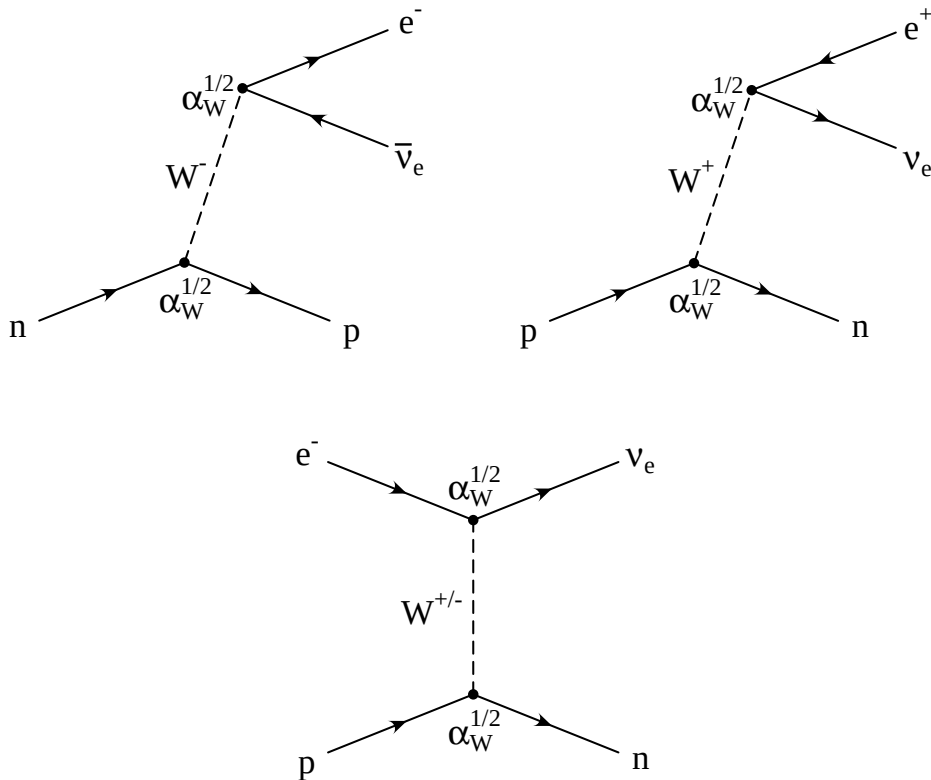
Lösung:

- a) Es gibt zwei Feynman-Diagramme führender Ordnung in α für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Zeitachse nach rechts, Ortsachse nach oben):



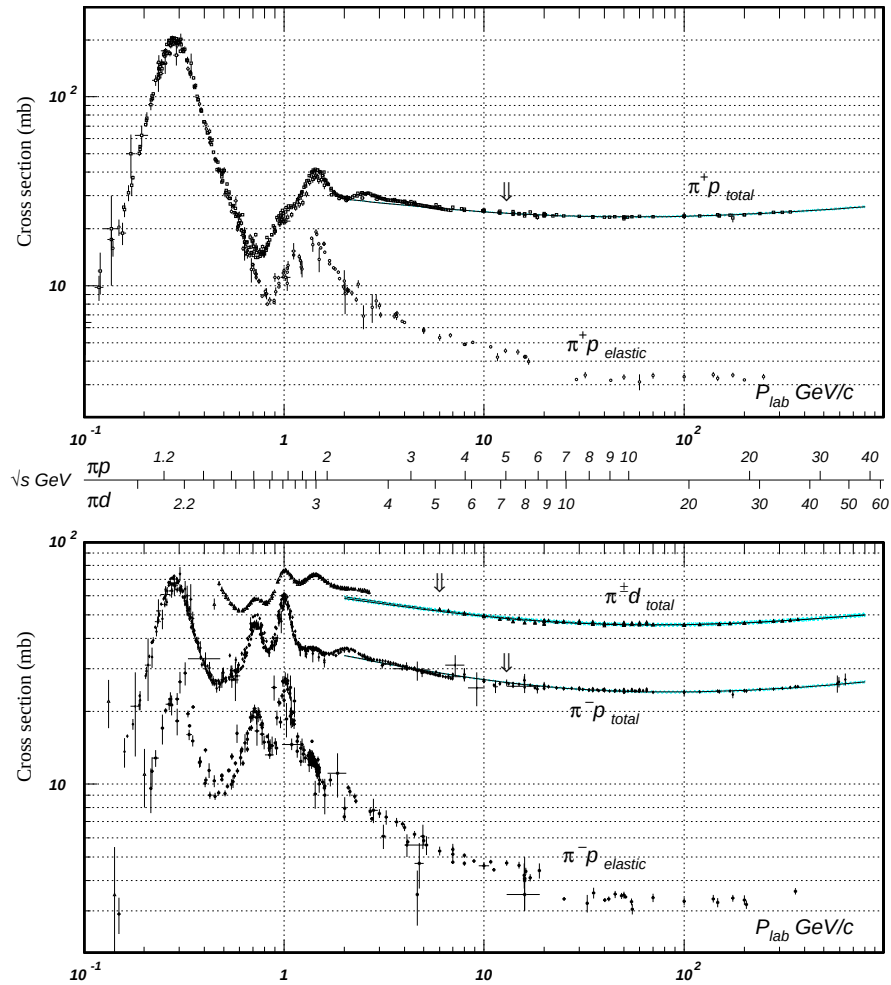
Bei der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ gibt es nur einen Graphen führender Ordnung in α und zwar den Annihilationsgraphen analog zum ersten Diagramm.

- b) Die Feynmandiagramme führender Ordnung in α_W für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang sind:



Aufgabe 3: Isospin

Der Isospin ist eine Größe welche bei Prozessen der Starken Wechselwirkung erhalten ist und analog zum Spin behandelt wird. Betrachten Sie die Maxima der Wirkungsquerschnitte für die verschiedenen möglichen Reaktionen der Pionenstreuung. Die Maxima entsprechen den Anregungen der $\Delta(1232)$ -Resonanz (siehe Schaubilder unten, aus [1]). Es gibt vier verschiedene Ladungszustände der Resonanz, während Pionen mit drei verschiedenen Ladungen auftreten.



- a) Ergänzen Sie die Werte des Isospins I und I_3 in der unten stehenden Tabelle, da diese für die weiteren Teilaufgaben gebraucht werden, und schätzen Sie die Wirkungsquerschnitte der Δ -Resonanz Peaks (bei $\sqrt{s} = 1232$ MeV) aus dem Plot ab.

Teilchen	I	I_3
Proton p		
Neutron n		
π^-		
π^0		
π^+		
Δ^-		
Δ^0		
Δ^+		
Δ^{++}		

Kanal	elastisch/total	Wirkungsquerschnitt
$p\pi^+$	total	
$p\pi^+$	elastisch	
$p\pi^-$	total	
$p\pi^-$	elastisch	

- b) Geben Sie alle möglichen Reaktionen für die vier verschiedenen Wirkungsquerschnitte $\pi p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ an, sowie die Quantenzahlen I , I_3 für die Anfangs-, Zwischen- und Endzustände.
- c) Verwenden Sie die unten angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten (CG) um die relativen Höhen der vier Wirkungsquerschnitte theoretisch zu berechnen. (Zur Erinnerung: $\sigma \sim CG^2(\text{anfangs} \rightarrow \text{zwischen}) \cdot CG^2(\text{zwischen} \rightarrow \text{end})$!)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$1 \times 1/2$	$\begin{matrix} 3/2 \\ +3/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/2 & 1/2 \\ +1/2 & +1/2 \end{matrix}$	
$+1 \quad +1/2$	1	$+1/2 \quad +1/2$	
$+1 \quad -1/2$	$\begin{matrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{matrix}$	
$0 \quad +1/2$	$\begin{matrix} 0 & -1/2 \\ -1 & +1/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3/2 \\ -3/2 \end{matrix}$
	$-1 \quad -1/2$	1	

Notation:	$\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$
$m_1 \quad m_2$	
$m_1 \quad m_2$	Coefficients
$\cdot \quad \cdot$	
$\cdot \quad \cdot$	
$\cdot \quad \cdot$	

Clebsch–Gordan-Koeffizienten für Isospins 1 und 1/2 im Anfangszustand (aus [1]).

Lösung:

- a) Ergänzen Sie die Werte des Isospins I und I_3 in der unten stehenden Tabelle, da diese für die weiteren Teilaufgaben gebraucht werden, und schätzen Sie die Wirkungsquerschnitte der Δ -Resonanz Peaks aus dem Plot ab.

Die dritte Komponente des Isospins ist direkt mit der Ladung des Teilchens verknüpft. Die verschiedenen I_3 Komponenten müssen also um 1 unterschiedlich sein. Die totalen und elastischen Wirkungsquerschnitte sind aus den Plots ersichtlich, wir müssen die Wirkungsquerschnitte an ihren Maxima der Δ -Resonanz abtragen. Damit erhalten wir die folgende Tabelle:

Teilchen	I	I_3
Proton p	1/2	1/2
Neutron n	1/2	-1/2
π^-	1	-1
π^0	1	0
π^+	1	1
Δ^-	3/2	-3/2
Δ^0	3/2	-1/2
Δ^+	3/2	1/2
Δ^{++}	3/2	3/2

Kanal	elastisch/total	Wirkungsquerschnitt [mb]
$p\pi^+$	total	200
$p\pi^+$	elastisch	200
$p\pi^-$	total	70
$p\pi^-$	elastisch	23

- b) Geben Sie alle möglichen Reaktionen für die vier verschiedenen Wirkungsquerschnitte $\pi p \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$ an, sowie die Quantenzahlen I, I_3 für die Anfangs-, Zwischen- und Endzustände.

Wir müssen alle verschiedenen Reaktionen welche in den Streuprozessen auftreten betrachten. Im elastischen Fall sind die Teilchen im Anfangs- und Endzustand identisch.

$$\pi^+ p_{(\text{el.})} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p \quad (16)$$

$$\pi^- p_{(\text{el.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \quad (17)$$

Die Art der Δ -Resonanz im Zwischenzustand ist durch Ladungserhaltung gegeben.

Der totale Wirkungsquerschnitt im Fall $\pi^+ p$ ist identisch zum elastischen Wirkungsquerschnitt, da es keine andere Möglichkeit gibt, die Ladungen auf das Proton und das Pion zu verteilen.

$$\pi^+ p_{(\text{tot.})} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p \quad (18)$$

$$(19)$$

Als letzter Fall bleibt der totale Wirkungsquerschnitt für $\pi^- p$, dabei ist

$$\pi^- p_{(\text{tot.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \quad (20)$$

$$\text{or } \rightarrow \pi^0 n \quad (21)$$

Die Isospins werden im nächsten Teil der Übung angegeben.

- c) Verwenden Sie die unten angegebenen Clebsch–Gordan Koeffizienten (CG) um die relativen Höhen der vier Wirkungsquerschnitte theoretisch zu berechnen. (Zur Erinnerung: $\sigma \sim \text{CG}^2(\text{anfangs} \rightarrow \text{zwischen}) \cdot \text{CG}^2(\text{zwischen} \rightarrow \text{end})$!)

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:	J	J	...
	M	M	...
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
.	.		
.	.		

from [1]

Die Clebsch–Gordan Koeffizienten in der Tabelle sind für das spezifische Problem eines Isospin 1/2 Teilchens (das Nukleon) und eines Isospin 1 Teilchens (das Pion) gegeben. Der Zwischenzustand besitzt Isospin 3/2. Im Folgenden werden die Reaktionen mit den Quantenzahlen der Teilchen in Klammern (I, I_3) und den Clebsch–Gordan Koeffizienten angegeben.

$$\pi^+ p_{\text{(el.)}} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$$

$$\mathrm{CG}^2((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \cdot \mathrm{CG}^2((\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\pi^- p_{(\text{el.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p$$

$$\text{CG}^2((1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})) \cdot \text{CG}^2((\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow (1, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$\pi^+ p_{(tot.)} \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$$

$$\text{CG}^2((1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})) \cdot \text{CG}^2((\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \rightarrow (1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\pi^- p_{(\text{tot.})} \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p \text{ or } \pi^0 n$$

$$\begin{aligned} & \text{CG}^2((1, -1), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \rightarrow (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2})) \cdot \text{CG}^2((\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) \rightarrow (1, -1), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) \\ & + \text{CG}^2((1, -1), (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \rightarrow (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2})) \cdot \text{CG}^2((\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}) \rightarrow (1, 0), (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})) \\ & = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Wirkungsquerschnitte sich verhalten sollten wie

$$\sigma_{\text{tot.}}(\pi^+p) : \sigma_{\text{el.}}(\pi^+p) : \sigma_{\text{tot.}}(\pi^-p) : \sigma_{\text{el.}}(\pi^-p) = 9 : 9 : 3 : 1, \quad (22)$$

was von den experimentellen Wirkungsquerschnitten erfüllt wird.

$$\sigma_{tot.}(\pi^+p) : \sigma_{el.}(\pi^+p) : \sigma_{tot.}(\pi^-p) : \sigma_{el.}(\pi^-p) = 200 \text{ mb} : 200 \text{ mb} : 70 \text{ mb} : 22 \text{ mb}. \quad (23)$$

Literatur

- [1] S.Eidelman *et al.*, Phys. Lett. B **592** (2004) 1.
- [2] E.W.Otten und C.Weinheimer, Rep. Prog. Phys. **71** (2008) 086201

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 07

Bearbeitung bis 17.06.2010

Aufgabe 1: Energieverlust und Bethe–Bloch–Gleichung

Die BETHE–BLOCH–Gleichung beschreibt den Energieverlust schwerer Teilchen auf ihrem Weg durch Materie. Vernachlässigt man die Dichte- und Schalenkorrektur, ist sie gegeben durch:

$$S = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} N_A \frac{Z}{A} \rho \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right]. \quad (1)$$

β ist die Geschwindigkeit normiert auf die Lichtgeschwindigkeit $\beta = v/c$, ze die Ladung des Teilchens, Ze die Kernladung des Materials, durch welches das Teilchen sich bewegt, ρ dessen Dichte, I das mittlere Anregungspotential der Atome und $T_{\max}$ der maximale Energietransfer bei einem einzelnen Stoß. Für ein einfallendes Teilchen der Masse $M \gg m_e$ ist $T_{\max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$.

- In welcher Weise ist der Energieverlust nichtrelativistischer Teilchen von der Energie abhängig?
- Vergleichen Sie den Energieverlust von Elektronen, Pionen, Kaonen und Protonen der selben kinetischen Energie von 2 GeV beim Durchdringen eines Aluminiumabsorbers von 1 cm Dicke.
($m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, $m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2$, $m_K = 493.68 \text{ MeV}/c^2$, $m_p = 938.27 \text{ MeV}/c^2$, $M_{\text{mol,Al}} = 26.98 \text{ g/mol}$, $Z_{\text{Al}} = 13$, $\rho = 2.7 \text{ g/cm}^3$, $I = 16 \cdot Z^{0.9} \text{ eV}$)
- Vergleichen Sie den Energieverlust von nichtrelativistischen Pionen, Kaonen, Protonen, Deuteronen ($m_d \approx 2m_p$) und α - Teilchen ($m_\alpha \approx 4m_p$) der selben kinetischen Energie (z. B. 10 MeV).
- Lässt sich die BETHE–BLOCH–Formel auch für den Durchgang von Elektronen durch Materie verwenden? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

a) Für nichtrelativistische Teilchen gilt:

$$\begin{aligned}
S = -\frac{dE}{dx} &= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e v^2 T_{\max}}{I^2 (1 - v^2/c^2)} \right) - \beta^2 \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{v^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e v^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left(1 - \underbrace{\frac{v^2}{c^2}}_{\approx 0} \right)}_{\approx 1} - \underbrace{\beta^2}_{\approx 0} \right] \\
&= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{v^2} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e v^2 T_{\max}}{I^2} \right).
\end{aligned}$$

Für $T_{\max}$ gilt im Allgemeinen (M = Teilchenmasse):

$$T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 M^2}{M^2 + m_e^2 + 2\gamma M m_e}$$

Für alle Teilchen außer Elektronen und Positronen und für nicht zu hohe Teilchenenergien gilt die Näherung:

$$T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

b) In dieser Übung nehmen wir einfach die Bethe–Bloch–Gleichung und betrachten den Energieverlust ΔE des Teilchens über die Strecke $\Delta x = 1$ cm in Aluminium. Unter der Annahme, dass der Energieverlust in dem dünnen Absorber vernachlässigbar klein ist ($\beta, \gamma \approx \text{const.}$), lautet die Gleichung dann

$$-\Delta E = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right] \Delta x.$$

Zuerst berechnen wir die Konstanten. Alle betrachteten Teilchen haben die Ladung $z = 1$. Die Ladung des Aluminiumkerns ist $Z = 13$. Die benötigten Massen und Dichten sind in der Aufgabe angegeben. Mit $I = 16Z^{0.9} = 160.9$ eV, $A = M_{\text{mol,Al}} = 26.98$ g/mol, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ /mol und $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm erhalten wir:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4}{m_e c^2} N_A = 0.3071 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{mol}} \quad (PDG) \\
n &= \rho \frac{Z}{A} = 1.301 \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} \\
-\Delta E &= K \cdot n \cdot \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right] \Delta x.
\end{aligned}$$

Für alle Teilchen außer Elektronen kann man mit der Näherung für T_{max} weiter vereinfachen:

$$-\Delta E = K \cdot n \cdot \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2}{I} \right) + \ln \left(\beta^2 \gamma^2 \right) - \beta^2 \right] \Delta x.$$

mit $\ln(2m_e c^2/I) = 8.76$. Die folgende Tabelle zeigt die Teilchen, ihre Gesamtenergie und ihren Impuls sowie ihre Geschwindigkeit β und die entsprechende Größe γ .

particle	$E/[\text{GeV}]$	$ \vec{p} [\text{GeV}/c]$	β	γ^2	γ
e^-	2.00051	2.00051	1	$1.53 \cdot 10^7$	3915
$\pi^\pm$	2.13957	2.1350	0.998	235	15.3
$K^\pm$	2.4937	2.444	0.980	25.5	5.05
p	2.93827	2.784	0.948	9.80	3.13

Setzt man die obigen Werte und die Strecke $\Delta x = 1 \text{ cm}$ ein, erhält man

particle	$\Delta E [\text{MeV}]$
e^-	9.70
$\pi^\pm$	5.30
$K^\pm$	4.57
p	4.46

Diese Werte wurden mit einigen Näherung berechnet, möglicherweise weichen andere Ergebnisse geringfügig ab. Der Energieverlust der Teilchen hängt von β ab, jedoch nicht von ihrer Masse. Je schwerer das Teilchen ist, desto geringer ist sein Energieverlust, da bei schwere Teilchen bei gleicher kinetischer Energie langsamer sind.

- c) Im nichtrelativistischen Fall ist die Energie $E = mv^2/2$ und der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, mit der Masse m des Teilchens und seiner Geschwindigkeit v . In diesem Fall ist die Bethe–Bloch–Gleichung

$$\begin{aligned} S &= -\frac{dE}{dx} \\ &= \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e} \rho \frac{N_A Z}{A} \frac{1}{v^2} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e v^2 T_{\max}}{I^2} \right) \end{aligned}$$

wie in a. berechnet.

Die relevanten Größen sind für die verschiedenen Teilchen aufgelistet:

particle	z	$v [\text{m/s}]$
$\pi^\pm$	± 1	$1.08 \cdot 10^8$
$K^\pm$	± 1	$5.95 \cdot 10^7$
p	+1	$4.34 \cdot 10^7$
d	+1	$3.08 \cdot 10^7$
α	+2	$2.19 \cdot 10^7$

Setzt man diese Werte in die Gleichung ein erhält man den Energieverlust pro Meter, den das Teilchen beim Durchqueren von Aluminium zurücklegt.

particle	β	$\frac{\Delta E}{\Delta x} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$ (Bethe-Bloch)	$\frac{\Delta E}{\Delta x} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$ (Appr.)
$\pi^\pm$	0.36	20.74	20.72
$K^\pm$	0.198	56.046	56.038
p	0.145	93.066	93.062
d	0.103	158.789	159.791
α	0.073	1058	1058

Je schwerer das Teilchen ist, desto mehr Energie verliert es im nichtrelativistischen Fall beim durchqueren des Mediums mit der gleichen kinetischen Energie $E = mv^2/2$. Der Energieverlust ist proportional zum Quadrat der Ladung.

- d) Die Bethe-Bloch-Gleichung alleine kann nicht verwendet werden um Elektronen zu beschreiben. Diese verlieren nicht nur durch Ionisation Energie, sondern auch durch Bremsstrahlungsprozesse. Das Elektron, strahlt Photonen ab, während es im Feld des Kerns gebremst wird. Dieser Prozess hängt stark vom Material ab und ist ungefähr proportional zur Energie und steigt quadratisch mit der Kernladung / der Zahl der Elektronen im Medium an. Jenseits der kritischen Energie von ca. 600 MeV/Z ist die Bremsstrahlung der dominante Prozess für den Energieverlust von Elektronen.

Aufgabe 2: Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Die Wechselwirkung zwischen Photonen und Materie kann mittels verschiedener Prozesse stattfinden: Neben elastischer Streuung und photonuklearen Reaktionen sind die wichtigsten Prozesse der Photoelektrische Effekt, Comptonstreuung und Paarerzeugung.

a) **Photoelektrischer Effekt:**

- Der Photoelektrische Effekt kann nur bei gebundenen Elektronen stattfinden. Zeigen Sie, dass freie Elektronen keine Photonen absorbieren können.

b) **Comptonstreuung:**

- Leiten Sie die Gleichung für die Differenz der Wellenlängen eines Photons vor und nach der Comptonstreuung her

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

dabei ist θ der Streuwinkel, λ die Wellenlänge vor und λ' nach der Streuung, m_e die Masse des Elektrons, und h das Plank'sche Wirkungsquantum.

- In welchem der folgenden Fälle verliert das Photon prozentual gesehen die meiste Energie?
 - (a) Einfache Comptonstreuung mit $\theta = 180^\circ$?
 - (b) Zweifache Comptonstreuung, jeweils mit $\theta = 90^\circ$?
 - (c) Dreifache Comptonstreuung, jeweils mit $\theta = 60^\circ$?

c) **Paarerzeugung:**

- Wozu benötigt man das Coulombfeld eines Kerns bei der Paarerzeugung?

Lösung:

In dieser Übung sollen drei wichtige Wechselwirkungsprozesse hochenergetischer Photonen mit Materie betrachtet werden: Der photoelektrische Effekt, Comptonstreuung und Paarerzeugung.

a) **Photoelektrischer Effekt:**

- Der Photoelektrische Effekt oder die Absorption eines Photons durch ein Elektron kann nicht an freien Elektronen stattfinden, da Energie und Impulserhaltung dabei nicht erfüllt sind. Vor dem Zusammentreffen von Photon und Elektron (frei und in Ruhe) sind die Vierervektoren

$$p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ E_\gamma/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ and } p_e = \begin{pmatrix} m_e c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

unter der Annahme, dass sich das Photon in x Richtung bewegt. Nach der Absorption existiert das Photon nicht mehr und der Impuls des Elektrons ist

$$p'_e = \begin{pmatrix} E'_e/c \\ p'_{e,x} \\ p'_{e,y} \\ p'_{e,z} \end{pmatrix}.$$

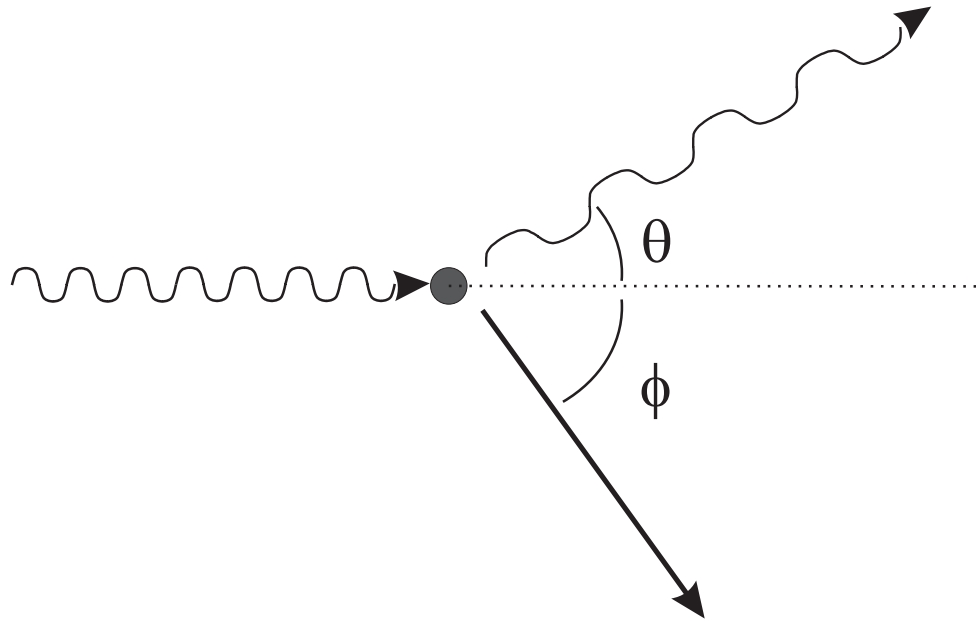
Für $p_\gamma + p'_e = p'_e$ ist es direkt ersichtlich, dass die dritte und vierte Komponente von p'_e Null sein müssen. Man erhält zwei Gleichungen

$$E_\gamma + m_e c^2 = E'_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + \vec{p}'_e{}^2 c^2} \text{ and } E_\gamma = p'_{e,x} c.$$

Ersetzt man in der oberen Gleichung E_γ durch $p'_{e,x} c$ und quadriert sie, so folgt $m_e p'_{e,x} = 0$. Dies wäre nur der Fall, wenn die Elektronenmasse Null ist, da aufgrund der Impulserhaltung der Elektronenimpuls nach dem Stoß nicht Null sein kann.

b) **Comptonstreuung:**

- Im Fall der Comptonstreuung trifft ein Photon ein gebundenes Elektron und schleudert es aus dem Atom. Bei diesem Prozess verliert das Photon Energie und hat also danach eine größere Wellenlänge



Aus der Energieerhaltung erhält man

$$E_\gamma + E_e = h\nu + m_e c^2 = E'_\gamma + E'_e = h\nu' + E'_e,$$

während aus Impulserhaltung und der geometrischen Beziehung der Impulse gilt:

$$p_e^2 = p_\gamma^2 + p_\gamma'^2 - 2p_\gamma p_\gamma' \cos \theta.$$

Hier ist der Impuls oder die Energie des Elektrons uninteressant, wir wollen die Abhängigkeit des Energieverlustes des Photons vom Streuwinkel wissen. Zusätzlich verwenden wir

$$E_e'^2 - p_e'^2 c^2 = m_e^2 c^4.$$

Substituiert man hier die Ausdrücke für E_e und p_e , so erhält man

$$(h\nu - h\nu' + m_e c^2)^2 - (h\nu)^2 - (h\nu')^2 + 2h^2 \nu \nu' \cos \theta = m_e^2 c^4.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
h^2\nu^2 + h^2\nu'^2 + m_e^2c^4 - 2h^2\nu\nu' + 2h\nu m_e c^2 - 2h\nu' m_e c^2 - h^2\nu^2 - h^2\nu'^2 \\
+ 2h^2\nu\nu' \cos \theta &= m_e^2c^4 \\
\Rightarrow m_e c^2(\nu - \nu') &= h\nu\nu'(1 - \cos \theta) \\
\Rightarrow \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} &= \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos \theta) \\
\Rightarrow \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) \\
\Rightarrow \lambda' - \lambda &= \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

- Der erste interessante Fakt ist, dass die Wellenlängendifferenz nicht von der ursprünglichen Wellenlänge abhängt. Der einzige Faktor, den man betrachten muss ist $\sin^2(\theta/2)$. Das Ergebnis dieser Funktion muss noch mit der doppelten Comptonwellenlänge $\lambda_C = h/(m_e c)$ und der Zahl der Streuprozesse multipliziert werden.
 - (a) Einfache Comptonstreuung mit $\theta = 180^\circ$: $\sin^2(\theta/2) = 1 \Rightarrow \sim 1$ (ein Prozess).
 - (b) Zweifache Comptonstreuung mit jeweils $\theta = 90^\circ$: $\sin^2(\theta/2) = 0.5 \Rightarrow \sim 1$ (zwei Prozesse).
 - (c) Dreifache Comptonstreuung mit jeweils $\theta = 60^\circ$: $\sin^2(\theta/2) = 0.25 \Rightarrow \sim 0.75$ (drei Prozesse).

Die tatsächlichen Werte für die drei Fälle sind (a) 4.852 pm, (b) 2×2.436 pm = 4.872 pm, und (c) 3×1.213 pm = 3.639 pm.

Hatte das Photon vor diesen drei Fällen die selbe Energie, so verliert das Photon bei der Dreifachstreuung am wenigsten Energie. Energie und Wellenlänge hängen über $E = h\nu = hc/\lambda$ und $E' = h\nu' = hc/\lambda'$ zusammen. Die Wellenlänge des gestreuten Photons ist $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Je größer λ' und $\Delta\lambda$ sind, desto geringer ist die Energie des gestreuten Photons E' . In unserem Fall bedeutet das, dass der Energieverlust am größten für die Fälle (a) und (b) ist.

c) **Paarerzeugung:**

- Dass die Paarerzeugung nur im Coulombfeld möglich ist kann analog zum ersten Teil der Aufgabe gezeigt werden: Wir betrachten die Impulsvektoren eines Photons, welches bei der Produktion eines Elektron-Positron Paares vernichtet wird.

Die Vierervektoren sind

$$\vec{p}_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ E_\gamma/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ p_{1,x} + p_{2,x} \\ p_{1,y} + p_{2,y} \\ p_{1,z} + p_{2,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1/c + E_2/c \\ p_{1,x} + p_{2,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da jede einzelne Komponente des Viererimpulses erhalten ist haben die Impulse in y und z Richtung den gleichen Betrag und umgekehrte Vorzeichen. Deswegen muss man die folgenden beiden Gleichungen gleichzeitig erfüllen:

$$\begin{aligned} E_\gamma/c &= E_1/c + E_2/c \\ &= \sqrt{m_e^2 c^2 + p_{1,x}^2} + \sqrt{m_e^2 c^2 + p_{2,x}^2} \text{ and} \\ E_\gamma/c &= p_{1,x} + p_{2,x}, \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn die Masse des Elektrons und des Positrons null sind.

Aufgabe 3: Identifikation geladener Teilchen

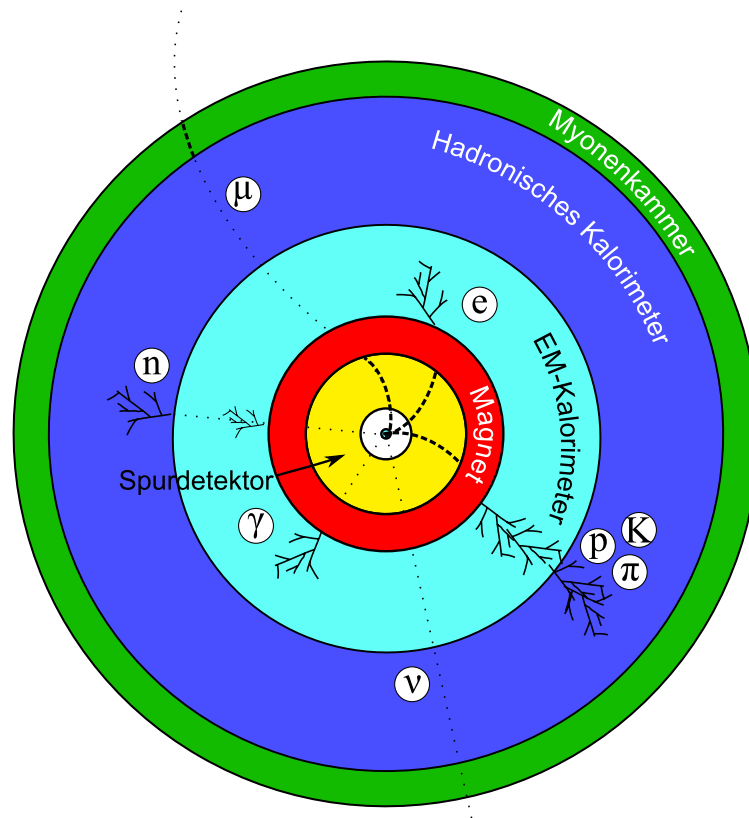
In einem Experiment erwartet man die Entstehung von $e^\pm$, $\mu^\pm$, $\pi^\pm$, $K^\pm$ und Protonen mit Impulsen bis zu 1 GeV.

- Wie würden Sie diese Arten von Teilchen identifizieren? Schlagen Sie Detektoren vor und erläutern Sie die Vor- und Nachteile verschiedener experimenteller Aufbauten.
- Welche Detektorarten würden Sie zur Bestimmung der Teilchenimpulse verwenden? Was sind die Vor- und Nachteile?

Lösung:

- Allgemeiner Aufbau eines Detektor zur Teilchenidentifikation, Energie- und Impulsmessung**

In der untenstehenden Skizze ist ein allgemeiner Aufbau für einen Detektor in der Teilchenphysik gezeigt. Der Detektor ist senkrecht zur Strahlachse aufgeschnitten und die Wechselwirkungen in den entsprechenden Detektorelementen angedeutet.



In folgender Tabelle werden die Wechselwirkungen von verschiedenen Teilchen in den einzelnen Detektorbereichen aufgelistet. Dabei handelt es sich um Energiedeposition in Kalorimetern, sowie Spurerzeugung durch Ionisation in Spurdetektor und Myonenkammer (im Prinzip auch ein Spurdetektor). Desweiteren kann der Impuls und die Ladung anhand der Krümmung der Spur im Magnetfeld gemessen werden.

	$e^{\pm}$	$\mu^{\pm}$	gel. Hadr. ($p^{\pm}, \pi^{\pm}, \dots$)	ungel. Hadr. ($n, \pi^0, \dots$)	γ	ν .
Spur in Spurdetektor	Ja	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein
Energiedep. in EM-Kal.	Ja	Nein	Ja	z.T.	Ja	Nein
Energiedep. in Hadr.-Kal.	Nein	Nein	Ja	Ja	Nein	Nein
Spur in Myonenkammer	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein

b) Teilchenidentifikation

Die Identität der Elementarteilchen ist im Allgemeinen durch ihre Masse und Ladung festgelegt. Das Ladungsvorzeichen lässt sich durch die Ablenkung im Magnetfeld einfach bestimmen.

Die in der Aufgabenstellung gegebenen Teilchen sind $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$, $\pi^{\pm}$, $K^{\pm}$ sowie Protonen mit Impuls bis zu 1 GeV.

$e^{\pm}$ Elektronen (Positronen) hinterlassen im Spurdetektor durch Ionization

eine Spur und erzeugen im elektromagnetischen Kalorimeter einen charakteristischen Schauer.

$\mu^\pm$ Myonen lassen sich durch ihre außerordentliche Durchdringungskraft von Materie identifizieren. Sie geben ihre Energie vor allem durch Ionisation in Spurdetektoren ab. Schirmt man alle anderen Teilchen durch dicke Eisenplatten ab, so kann man Myonen nachweisen, wenn dahinter eine weitere Spurkammer aufgestellt wird. Aufgrund der höheren Masse verglichen zu Elektronen, strahlen Myonen nur bedingt Bremsstrahlung ab und führen daher nicht zu Schauern in den Kalorimetern $(m_e/m_\mu)^2 \approx 2.3 \cdot 10^{-5}$.

$\pi^\pm, K^\pm, p^\pm$ Geladene Hadronen sind am schwierigsten zu unterscheiden. Folgende Detektoren können verwendet werden:

- Bei Impulsen bis 1 GeV kann die Flugzeit zwischen zwei Ionisationsdetektoren gemessen werden. Aus der Geschwindigkeit bei gegebenen Impuls kann dann auf die Masse geschlossen werden.
- Eine weitere Methode ist die Messung des Ionisationsverlustes $\frac{dE}{dx}$ die hängt bei kleinen Energien von $\propto \frac{1}{\beta^2}$ ab (siehe Bethe-Bloch-Formel).
- Cerenkov Licht wird emittiert, falls sich ein Teilchen mit höherer Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit in dem durchquerten Medium bewegt (vgl. Überschall). Die asymmetrische Polarisierung in dem Medium führt zu einem kontinuierlich Photonspektrum, welches eine *photonische Schockwelle* erzeugen. Der Öffnungswinkel $\cos \Theta = \frac{1}{\beta \cdot n}$ kann als Teilchendiskrimination eingesetzt werden.

Für den Spurdetektor gibt es verschiedene Ausführungen. Erste Systeme waren *Blasenkammern*, *Funkenkammern* und *Streamer-kammern*, die die Spuren optisch sichtbar gemacht haben und dann fotografiert wurden. Da diese Technik sehr aufwendig und langsam ist wird es nur noch in weniger speziellen Experimenten eingesetzt (siehe OPERA im LNGS zur Messungen von $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ Oszillationen).

Des weiteren gibt es gasgefüllte *Proportionalkammern*, in denen viele dünne Drähte parallel im Abstand von wenigen mm gespannt sind. Die Drähte liegen auf Hochspannung und können so die Primärionization des einfliegenden Teilchen verstärken und ertauflgelöst messen. Ein ähnliches Messprinzip verfolgen *Driftkammern* mit größeren Abständen (cm). Hier wird die Ortsauflösung über die Driftzeit zu den Drähten bestimmt. Die mögliche Auflösung liegt im Bereich von etwas unter einem Millimeter.

Zuletzt gibt es noch *Siliziumstreifen/Siliziumpixeldetektoren*. Hier werden beim Durchgang von Teilchen Elektron-Lochpaare erzeugt, wofür in Silizium pro Paar nur 3,6 eV gebraucht werden. Mittels angelegter Spannung können die Ladungsträger gesammelt und ausgelesen werden. Die Detektoren zeichnen sich durch ihre gute Ortsauflösung aus ($O(10 \mu m)$)

c) Impulsmessung

- Eine Möglichkeit sind Magnetspektrometer. Hier wird in einem Spurdetektor der Krümmungsradius der Teilchenbahn im Magnetfeld gemessen (Lorentzkraft!). Höhere Genauigkeit wird erreicht, wenn man die Teilchenbahn direkt vor und hinter dem Magneten misst. Die Erzeugung starker Magnetfeld über eine hohe Auflösung ist natürlicherweise sehr energieaufwendig.
- In Absorptionsdetektoren kann die Teilchenenergie gemessen werden. In Sampling-Kalorimetern reiht man alternierend Ebenen aus Absorbermaterial (z.B. Eisen, Uran) und Nachweismaterial (z.B. Szintillator) auf. Für hochrelativistische Teilchen sind Energie und Impulsmessung äquivalent. Die Genauigkeit eines Magnetspektrometers nimmt linear mit dem Impuls ab (Krümmungsradius!), wobei die Genauigkeit von Kalorimetern mit $\frac{1}{\sqrt{E}}$ zunimmt. Daher bietet sich die indirekte Impulsmessung bei Energie ab 50-100 GeV mittels Kalorimetern an.

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 08

Bearbeitung bis 24.06.2010 Abgabedatum

Aufgabe 1: Teilchendetektoren

Wenn ein geladenes Teilchen in einem Szintillator Energie verliert, geschieht dies meist durch Anregung der Atome bzw. Moleküle des Szintillators. Ein Großteil der angeregten Elektronen gibt beim Übergang ins Grundniveau diese Energie über strahlungslose Rotation und Vibrationsübergänge an die Umgebung ab. Nur wenige Prozent emittieren ein Photon im sichtbaren oder nahen Ultraviolett-Bereich. In Plastiksintillatoren wird im Mittel ein Photon pro 100 eV Energieverlust emittiert. Für eine bestimmte Szintillatorgeometrie erreichen nur 6% dieser Photonen die Photokathode des Photomultipliers, mit dem sie nachgewiesen werden, der Rest wird im Szintillator oder den Wänden absorbiert. Die Photokathode hat eine Quantenausbeute von 30%, d.h. nur 30% der auftreffenden Photonen erzeugen ein Photoelektron, das im Photomultiplier verstärkt wird. In einem Argon-gefüllten Gaszählrohr werden 25 eV pro Ionisierung gebraucht. In einem Halbleiterdetektor wird im Mittel eine Energie von 3,6 eV (Si) benötigt, um ein Elektron-Loch-Paar zu erzeugen. Für die beiden letzten Detektoren nehmen wir an, dass 100 % der Ladungsträger nachgewiesen werden.

- a) Wie groß ist der statistische Anteil der relativen Energieauflösung σ_E/E eines Detektors für einen Energieverluste des Teilchens von 100 keV, 5 MeV und 20 MeV? Berechnen Sie die Anzahl der nachgewiesenen Photonen, Ionisationen und Elektron-Loch-Paare. Gehen Sie bei der Berechnung von einer Poissonverteilung aus.
- b) Wie dick müssen diese drei Detektorarten sein, damit sie diese Energieverluste messen, wenn Teilchen im minimalionisierenden Energiebereich ($\gamma \approx 3-4$) den Detektor durchqueren? Verwenden Sie die Bethe-Bloch-Gleichung mit $\rho_{\text{szint}} \approx 1.2 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{Si}} = 2.33 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{Ar}} = 1-3 \text{ mg/cm}^3$ (siehe auch Aufgabe 1 vom 7. Übungsblatt).

Lösung:

Solution 28

Die Form des Energiespektrums, das mit einem Detektor gemessen wird, wird hauptsächlich von zwei Größen beeinflusst:

- der Höhe des Energieverlustes eines geladenen Teilchens im aktiven Detektormaterial
- der Energieauflösung des Detektors.

Der Energieverlust von durchgehenden Teilchen folgt bei dünnen Detektoren einer Landauverteilung und nähert sich für dickere Detektoren einer Gaussverteilung an. Im Grenzfall deponiert ein Teilchen seine gesamte Energie im Detektor. Ein Beispiel für den letzten Fall wären z.B. Comptonelektronen und Photoelektronen (nicht bei Plastiksintillatoren!), die im Szintillatormaterial selbst durch Gammas erzeugt werden. Die Detektorantwort auf einen monoenergetischen Energieverlust wird durch die Poissonstatistik beschrieben (Energieauflösung). Durch Faltung des Energieverlustspektrums mit der energieabhängigen Energieauflösungsfunktion erhält man das gemessene Spektrum des Detektors.

- a) In einem Detektor aus Szintillator und Photomultiplier bedeutet ein nachgewiesenes Photon des Szintillationslichtes, dass das Photon ein Photoelektron (PE) aus der Photokathode des Photomultipliers herausgeschlagen hat. Dieses Elektron wird in der Dynodenkette verstärkt und als Anodenpuls in der nachgeschalteten Elektronik nachgewiesen. Die mittlere Anzahl der PE ist proportional zum Energieverlust des primären Teilchens im Szintillator. Da die Erzeugung und der Nachweis eines einzelnen PE unabhängig von den anderen PE ist, kann die statistische Schwankung σ_N der Anzahl N der PE bei monoenergetischem Energieverlust mit der Poisson-Statistik beschrieben werden. In der Poisson-Statistik ist der Fehler einer Zählrate N gleich der Wurzel der Zählrate $\sigma_N = \sqrt{N}$. Der relative Fehler wird dadurch

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{\sigma_N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Uns interessieren bei unseren Messungen die relativen Fehler. Laut Aufgabenbeschreibung sollen Energien von 100 keV, 5 MeV, und 20 MeV nachgewiesen werden. Aus den verschiedenen Energien, die notwendig sind, um die Detektormaterialien im Fall des Szintillators, der Halbleiter sowie des Gasdetektors anzuregen, können wir die Anzahl der Prozesse bei gegebener Energie berechnen. Daraus können wir dann die relative Energieauflösung bestimmen, wodurch wir folgende Ergebnisse erhalten.

Prozess	ΔE [MeV]	E_{Prozess} [eV]	N	ΔN	$\sigma(\Delta E)/\Delta E$	$\sigma(\Delta E)$ [MeV]
Szintillator	0.1	100/0.02=5000	20	4.5	0.223	0.022
	5		1000	31	0.031	0.155
	20		4000	63	0.016	0.32
Halbleiter	0.1	3.6	$2.77 \cdot 10^4$	167	$6.0 \cdot 10^{-3}$	0.0006
	5		$1.39 \cdot 10^6$	1179	$8.5 \cdot 10^{-4}$	0.004
	20		$5.56 \cdot 10^6$	2357	$4.24 \cdot 10^{-4}$	0.008
Gas	0.1	25	$4 \cdot 10^3$	63.2	0.016	0.0016
	5		$2 \cdot 10^5$	447	$2.23 \cdot 10^{-3}$	0.011
	20		$8 \cdot 10^5$	894	$1.12 \cdot 10^{-3}$	0.022

b) Die Bethe–Bloch Gleichung ist gegeben als

$$S = -\frac{dE}{dx} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} N_A \frac{Z}{A} \rho \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - \beta^2 \right]. \quad (1)$$

Wir können folgende Vereinfachungen annehmen:

$$\begin{aligned} z^2 &= 1, \\ \gamma &= 3 - 4 \Rightarrow \gamma^2 \approx 10, \\ \beta^2 &= 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 0.9 \Rightarrow \beta \approx 0.95, \\ B &= \frac{2m_e c^2}{I} \approx 10^4, \\ T_{\max} &\approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

Die molare Masse A und die Kernladung Z für Silizium beträgt $A(\text{Si}) = 28,1 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{Si}) = 14$ und für Argon $A(\text{Ar}) = 39,9 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{Ar}) = 18$. Beim Plastiksintillator nehmen wir an, dass er hauptsächlich aus Polymerketten besteht mit einzelnen CH_2 -Gliedern. Diese Glieder haben $A(\text{CH}_2) = 12 + 2 = 14 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $Z(\text{CH}_2) = 6 + 2$. Als grobe Schätzung gilt allgemein: $Z/A \approx 1/2$ bzw. $Z/A \approx 1/2 \text{ mol/g}$, wenn wie in diesem Fall A als molare Masse gesehen wird.

Damit erhalten wir:

$$K = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e c^2} N_A = 0.3071 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{mol}}.$$

Damit wird die Formel zu

$$S = -\frac{dE}{dx} = k\rho \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln(B\beta^2\gamma^2) - \beta^2 \right]$$

Damit erhalten wir folgende Werte für den Energieverlust ΔE über eine Distanz Δx in den verschiedenen Medien. Als Energiewerte für die minimalionisierenden Teilchen sind aus Teilaufgabe a) 100 keV, 5 MeV und 20 MeV gegeben.

Detektor	$\rho \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right]$	$Z/A \left[\frac{\text{mol}}{\text{g}} \right]$	$\Delta E/\Delta x \left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}} \right]$	$\Delta s / 100 \text{ keV}$	$\Delta s / 5 \text{ MeV}$	$\Delta s / 20 \text{ MeV}$
Szintillator	1,2	0,57	1,12	0,080 cm	4,46 cm	17,83 cm
Silizium	2,33	0,498	2,18	0,053 cm	2,27 cm	10,51 cm
Argon	0,002	0,45	0,00148	67,8 cm	3390 cm	1355 cm

Aufgabe 2: Čerenkovdetektor

- a) Ein RICH-Detektor (Ring Imaging Cherenkov detector) hat einen 1 cm dicken Radiator, der mit flüssigem Freon (Brechungsindex $n = 1.22$) gefüllt ist. Der Abstand L zwischen dem Radiator und dem Photodetektor ist 9.5 cm. Wie groß sind die Schwellenimpulse oberhalb derer Pionen bzw. Kaonen Čerenkovlicht erzeugen? Berechnen Sie die Größe der Ringradien auf dem Photodetektor für Licht aus der Mitte des Radiators als Funktion des Impulses und stellen Sie diese Funktion im Bereich vom Pion-Schwellenimpuls bis 2 GeV graphisch dar.
- b) Ein mit CO_2 gefüllter Čerenkovzähler soll zum Nachweis von π -Mesonen eingesetzt werden. Man beachte, dass die Suszeptibilität $\chi = \epsilon - 1$ proportional zum Druck ist. Bei Normaldruck ist der Brechungsindex $n = 1.00041$. Wie hoch muss der Druck sein, um Pionen oberhalb einer Energie von 5 GeV nachzuweisen? Ab welcher Energie erzeugen bei diesem Druck auch Kaonen Čerenkovlicht im Detektor?

Lösung:

- a) An der Schwelle gilt:

$$\begin{aligned}
 1 &= \beta n = \frac{p}{E} n = \frac{np}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} &= np \\
 \Rightarrow p^2 + m^2 &= n^2 p^2 \\
 \Rightarrow p &= \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Also sind die Schwellenimpulse $p_\pi = 200 \text{ MeV}$ und $p_K = 706 \text{ MeV}$.

Für den Winkel θ , unter dem das Čerenkovlicht abgestrahlt wird, gilt:

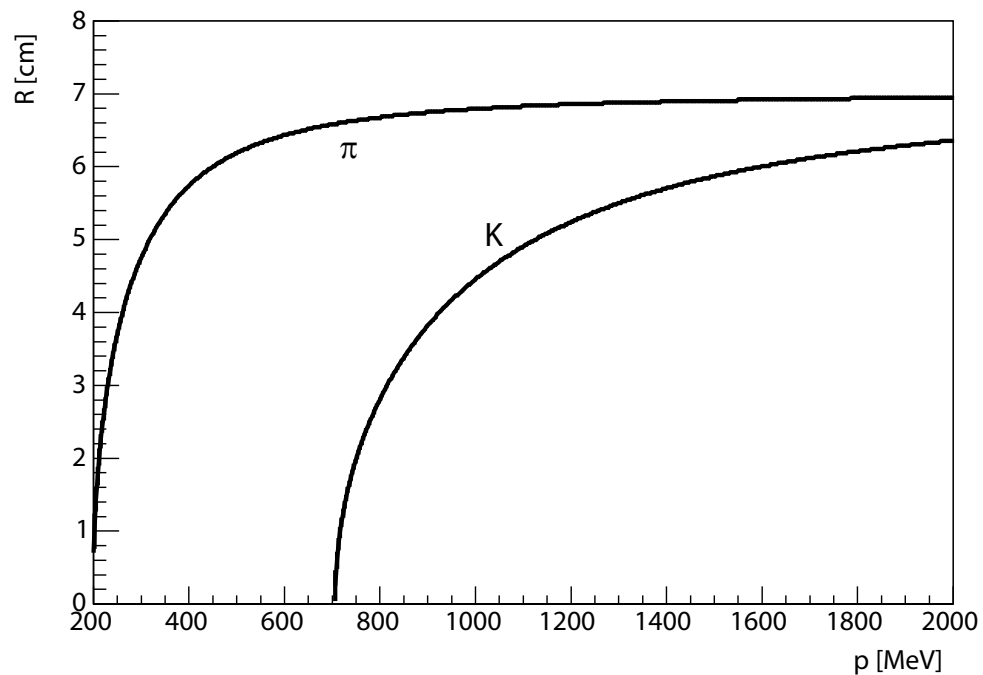
$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{E}{np} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{np}$$

Als Ringradius R ergibt sich:

$$R = L_0 \tan \theta = L_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = L_0 \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = L_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = L_0 \sqrt{\frac{n^2 p^2}{p^2 + m^2} - 1}$$

Dabei ist $L_0 = L + d/2 = 10 \text{ cm}$ (Dicke $d = 1 \text{ cm}$).

Cherekovringe



Anhand des Bildes kann diskutiert werden, in welchen Bereich Pionen und Kaonen getrennt werden können.

- b) Für $\mu = 1$ ist der Brechungsindex gegeben durch $n = \sqrt{\epsilon}$. Daraus folgt an der Schwelle:

$$\sqrt{\epsilon} = n = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}}$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon - 1 = \frac{E^2}{E^2 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{E^2 - m^2}$$

Als Druck P (Großbuchstabe zur Vermeidung von Verwechslungen mit dem Impuls p) erhält man aus der Suszeptibilität $\chi_0 = n^2 - 1$ bei Normaldruck P_0 :

$$P = \frac{\chi}{\chi_0} \cdot P_0 = \frac{m^2}{(E^2 - m^2)(n^2 - 1)} \cdot P_0 \quad (2)$$

Für Pionen ergibt sich $P = 0.96$ bar.

Aus Gleichung 2 folgt:

$$E^2 - m^2 = \frac{m^2}{n^2 - 1} \frac{P_0}{P} \quad \Rightarrow \quad E = m \sqrt{\frac{P_0}{(n^2 - 1)P} + 1}$$

Für Kaonen ergibt sich bei diesem Druck eine Schwellwertenergie von $E = 17.7$ GeV.

Aufgabe 3: Beschleuniger

- a) Ein Linearbeschleuniger für Protonen wird mit einer konstanten Frequenz von $\nu = 200$ MHz betrieben. Welche Länge muss die Driftröhre an dem Ort haben, an dem die Protonen eine kinetische Energie von 1 MeV, 100 MeV, 10 GeV haben?
- b) Bei einem Synchrotron müssen die Generatorfrequenz und das Magnetfeld an die Energie der relativistisch beschleunigten Teilchen angepasst werden, um sie auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius R zu halten. Wie hängen die Frequenz und das Magnetfeld von der Energie der Teilchen (Masse m , Ladung e) ab?
- c) Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie von Teilchenreaktionen an folgenden Beschleunigern:

Beschleuniger	Teilchen	Energien
LEP 2	e^+e^-	$E_{e^+} = E_{e^-} = 103$ GeV
PEP-II	e^+e^-	$E_{e^+} = 3.1$ GeV, $E_{e^-} = 9$ GeV
HERA	ep ep	$E_e = 27.5$ GeV, $E_p = 920$ GeV $E_e = 27.5$ GeV, p in Ruhe
Tevatron	$p\bar{p}$	$E_p = E_{\bar{p}} = 980$ GeV
LHC	pp $^{208}_{82}\text{Pb } ^{208}_{82}\text{Pb}$ (Kerne)	$E_p = 7$ TeV $E = 2.76$ TeV pro Nukleon

Welche Näherung kann man bei diesen Energien machen?

- d) Wie hoch müßte die Energie eines Protons aus der kosmischen Strahlung sein, wenn in einer Reaktion mit einem stationären Proton in der Atmosphäre dieselbe Schwerpunktsenergie erreicht werden soll wie bei pp-Kollisionen bei LHC?

Lösung:

- a) Die Länge L der Driftröhre muss so gewählt werden, dass die Protonen sie innerhalb einer halben Periodendauer T durchqueren:

$$L = v \cdot T/2 = \frac{v}{2\nu} \quad (3)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Protonen, die sich folgendermaßen aus der Masse m und Gesamtenergie E bzw. der kinetischen Energie E_{kin} berechnen

läßt:

$$\begin{aligned}
\frac{E}{mc^2} &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\
\Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{E^2} \\
\Rightarrow v &= c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{kin} + mc^2)^2}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Mit Gleichung 3 ergibt sich:

E_{kin}	L
1 MeV	3.46 cm
100 MeV	32.1 cm
10 GeV	74.7 cm

Zum Vergleich: Bei einer klassischen Rechnung erhält man bei einer Erhöhung der kinetischen Energie um den Faktor 100 eine Zunahme der Länge um den Faktor 10.

- b) Die Generatorfrequenz ν muss ein ganzzahliges Vielfaches (n) der Umlauffrequenz sein. Unter Verwendung von Gleichung 4 ergibt sich:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2\pi R} = n \cdot \frac{c}{2\pi R} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

Das Magnetfeld muss so gewählt werden, dass die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, bei der gegenüber der klassischen Formel ein zusätzlicher Gammafaktor auftritt:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= evB = \gamma m \frac{v^2}{R} \\
\Rightarrow B &= \frac{\gamma m v}{eR} = \frac{Ev}{c^2 eR} = \frac{E}{ceR} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}
\end{aligned}$$

- c) Die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ läßt sich aus den Vierervektoren $\mathbf{p}_{1,2} = (E_{1,2}, \vec{p}_{1,2}) = (E_{1,2}, 0, 0, \pm p_{1,2})$ (Strahlachse = z -Achse) der beiden kollidierenden Teilchen berechnen (hier $c=1$):

$$\begin{aligned}
s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\
&= \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2^2 \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2(p_1 \cdot (-p_2)) \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 + 2p_1 p_2 \\
&= 2E_1 E_2 + 2\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2)} + m_1^2 + m_2^2
\end{aligned}$$

Für $E_{1,2} \gg m_{1,2}$ können die Massenterme vernachlässigt werden:

$$s = 4E_1 E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} \quad (5)$$

Für $E_1 \gg m_{1,2}$ und $E_2 = m_2$ (Fixed Target) kann folgende Näherung gemacht werden:

$$s = 2E_1 m_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2} \quad (6)$$

Damit erhält man folgende Schwerpunktsenergien:

Beschleuniger	Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$
LEP 2	206 GeV
PEP-II	10.6 GeV
HERA	318 GeV
HERA (Fixed Target)	7.18 GeV
Tevatron	1.96 TeV
LHC (pp)	14 TeV
LHC (PbPb)	$1.12 \cdot 10^3$ TeV (n=207)

Aus Gleichung 6 folgt für die Energie eines Protons ($m_p \approx 1$ GeV) der kosmischen Strahlung, die benötigt würde, um eine Schwerpunktsenergie von 14 TeV zu erreichen (entspricht einem Fixed-Target-Experiment):

$$E_1 = \frac{s}{2m_2} = 2.0 \cdot 10^{17} \text{ eV}$$

Experimente, wie z.B. das Auger-Experiment, haben Luftschauer von Teilchen der kosmischen Strahlung mit Primärenergien bis 10^{20} eV nachgewiesen. In Collider-Experimenten können also wesentlich höhere Schwerpunktsenergien erreicht werden als bei Fixed-Target-Experimenten.

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

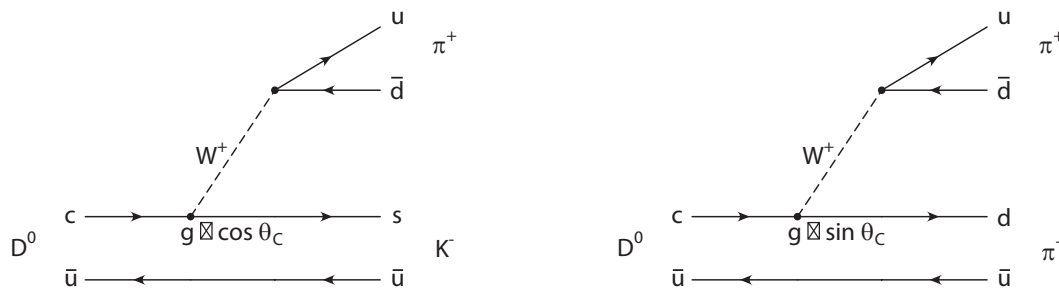
Übungsblatt Nr. 9

Bearbeitung bis 01.07.2010 Abgabedatum

Aufgabe 1: D^0 -Zerfall

Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für die Zerfälle des D^0 -Mesons (Quarkzusammensetzung $c\bar{u}$) in $K^-\pi^+$ bzw. $\pi^-\pi^+$. Schätzen Sie die Größenordnung des Verhältnisses der partiellen Breiten $\Gamma(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)/\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^-\pi^+)$ ab.

Lösung:



Der Zerfall in zwei Pionen ist Cabibbo-unterdrückt. Näherungsweise erwartet man:

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow K^-\pi^+)}{\Gamma(D^0 \rightarrow \pi^-\pi^+)} \approx \frac{\cos^2 \theta_C}{\sin^2 \theta_C} = \frac{1}{\tan^2 \theta_C} \approx 20$$

Aufgabe 2: K^0 -Erzeugung

Mit einem π^- -Strahl, der auf ein stationäres Protontarget geschossen wird, sollen durch starke Wechselwirkung neutrale K -Mesonen erzeugt werden. In einem gewissen Bereich des Pion-Impulses können nur K^0 -Mesonen jedoch keine $\bar{K}^0$ -Mesonen erzeugt werden.

- Welchen Impuls müssen die Pionen mindestens haben, um K^0 -Mesonen erzeugen zu können, und wie sieht in diesem Fall die Reaktionsgleichung aus?
- Ab welchem Pion-Impuls können auch $\bar{K}^0$ -Mesonen erzeugt werden und über welche Reaktion?

Lösung:

- a) Im Anfangszustand ist die Baryonenzahl $B = 1$ und die Strangeness $S = 0$. Da beide Größen in der starken Wechselwirkung erhalten bleiben und das K^0 -Meson $B = 0$ und $S = +1$ hat, muss mindestens noch ein weiteres Teilchen mit $B = 1$ und $S = -1$ erzeugt werden. Dies ist durch folgende Reaktion erfüllt:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \rightarrow \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}]$$

Wie in Aufgabe 3c aus Blatt 8 ergibt sich aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2 \\ &= \mathbf{p}_p^2 + 2\mathbf{p}_p\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_\pi^2 \\ &= m_p^2 + m_\pi^2 + 2(E_p E_\pi - \vec{p}_p \vec{p}_\pi) \quad \vec{p}_p = 0 \\ &= m_p^2 + m_\pi^2 + 2E_p E_\pi \\ &= m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p E_\pi \\ &= m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} \end{aligned}$$

mit $\sqrt{s} = m_\Lambda + m_{K^0}$ der minimale Pion-Impuls:

$$p_\pi = \sqrt{\frac{(s - m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4m_p^2}} - m_\pi = 899 \text{ MeV}$$

- b) Das $\bar{K}^0$ -Meson hat $B = 0$ und $S = -1$. Da Baryonen keine Antiquarks und somit auch keine $\bar{s}$ -Quarks mit $S = +1$ enthalten, gibt es kein Teilchen mit $B = 1$ und $S = +1$. Um $\bar{K}^0$ -Mesonen zu erzeugen, müssen also neben dem $\bar{K}^0$ mindestens zwei weitere Teilchen erzeugt werden, damit Baryonenzahl und Strangeness erhalten sind. Folgende Reaktion erfüllt die Erhaltungssätze:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \rightarrow n[udd] + K^0[d\bar{s}] + \bar{K}^0[\bar{d}s]$$

Analog zu Teil a) ergibt sich mit $\sqrt{s} = m_n + 2m_{K^0}$ als minimaler Impuls des Pions:

$$p_\pi = 1509 \text{ MeV}$$

Aufgabe 3: Teilchenreaktionen

Begründen Sie, weshalb folgende Reaktionen nicht erlaubt, bzw. stark unterdrückt sind:

- a) $p + \pi^+ \rightarrow K^+ + \Lambda^0$
- b) $p \rightarrow n + \pi^+$
- c) $\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$

- d) $J/\psi \rightarrow \gamma + \gamma$
- e) $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$
- f) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$

Geben Sie die Art der (dominierenden) Wechselwirkung folgender Reaktionen an:

- g) $p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$
- h) $\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \gamma$
- i) $n + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + p$
- j) $J/\psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
- k) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$
- l) $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$
- m) $\nu_e + p \rightarrow e^- + \pi^+ + p$
- n) $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
- o) $\bar{\Delta}^0 \rightarrow \bar{n} + \pi^0$

Geben Sie außerdem für alle Reaktionen die Quarkzusammensetzung der beteiligten Hadronen an.

Lösung:

- a) $p[uud] + \pi^+[u\bar{d}] \rightarrow K^+[u\bar{s}] + \Lambda^0[uds]$
Ladung nicht erhalten
- b) $p[uud] \rightarrow n[udd] + \pi^+[u\bar{d}]$
Energie nicht erhalten ($m_p < m_n + m_\pi$)
- c) $\Lambda^0[uds] \rightarrow \pi^+[u\bar{d}] + e^- + \bar{\nu}_e$
Baryonenzahl nicht erhalten
- d) $J/\psi[c\bar{c}] \rightarrow \gamma + \gamma$
 C -Parität nicht erhalten. η_c ist der 1^1S_0 Zustand von $[c\bar{c}]$, d.h. $J=0$ und J/ψ ist der 1^3S_1 Zustand, d.h. $J=1$. Die Eigenwerte der Parität sind wie folgt zu berechnen $C = (-1)^J$. Somit ergibt sich für $C(\eta_c) = +1$ und $C(J/\psi) = -1$. Dadurch kann nur η_c in zwei γ 's zerfallen und J/ψ in drei γ 's, da $C(\gamma) = -1$.
- e) $\nu_\mu + p[uud] \rightarrow \mu^+ + n[udd]$
Leptonenzahl nicht erhalten

- f) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$
Energie- und Impulserhaltung nicht erfüllt (für freie e^-)
- g) $p[uud] + K^-[\bar{u}s] \rightarrow \Sigma^+[uus] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^+[u\bar{d}] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)
- h) $\bar{\Sigma}^0[\bar{u}^\uparrow \bar{d}^\uparrow \bar{s}^\downarrow] \rightarrow \bar{\Lambda}^0[\bar{u}^\uparrow \bar{d}^\downarrow \bar{s}^\uparrow] + \gamma$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)
- i) $n[udd] + p[uud] \rightarrow \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}] + p[uud]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)
- j) $J/\psi[c\bar{c}] \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung ($\gg Z^0$ -Beitrag)
- k) $K^-[\bar{u}s] \rightarrow \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Schwache Wechselwirkung (Änderung der Strangeness)
- l) $\tau^- \rightarrow \pi^-[\bar{u}d] + \nu_\tau$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino)
- m) $\nu_e + p[uud] \rightarrow e^- + \pi^+[u\bar{d}] + p[uud]$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino). Hinweis: Zwei W -Bosonen sind für die Reaktion notwendig.
- n) $\pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}] \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)
- o) $\bar{\Delta}^0[\bar{u}^\downarrow \bar{d}^\downarrow \bar{d}^\downarrow] \rightarrow \bar{n}[\bar{u}^\uparrow \bar{d}^\downarrow \bar{d}^\downarrow] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)

Aufgabe 4: $SU(2)$ -Symmetrie

Die Darstellung von Spins in einem Spin-1/2-System durch zweidimensionale Spinoren kann analog auf das Isospindublett aus u - und d -Quark übertragen werden:

$$\begin{aligned} u\text{-Quark} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Isospin up}) \\ d\text{-Quark} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Isospin down}) \end{aligned}$$

Durch eine $SU(2)$ -Transformation kann z.B. ein u -Quark in ein d -Quark umgewandelt werden oder umgekehrt. Da der Isospin in der starken Wechselwirkung erhalten ist, hat eine solche Transformation keine Auswirkungen auf diese Wechselwirkung.

Dies gilt für alle möglichen $SU(2)$ -Transformationen im dreidimensionalen Isospinraum. Diese Transformationen U , die $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ und $\det U = 1$ erfüllen müssen, sind durch folgende Formel gegeben:

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}i\theta\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}\right) = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin \frac{\theta}{2}$$

Dabei ist $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix, θ der Drehwinkel, $\hat{\mathbf{n}}$ ein dreidimensionaler Einheitsvektor, der die Drehachse im Isospinraum angibt, und $\boldsymbol{\tau}$ ein Vektor von drei 2×2 -Matrizen:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch eine solche $SU(2)$ -Transformation wird ein beliebiger Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ mit der Isospin-up-Komponente u und der Isospin-down-Komponente d überführt in einen im Isospinraum gedrehten Isospinor $\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie die Matrizen U_1 , U_2 und U_3 für die Rotation um die drei Achsen im Isospinraum ($n_1 = (1, 0, 0)$, $n_2 = (0, 1, 0)$, $n_3 = (0, 0, 1)$) und wenden Sie diese auf den Isospinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ an.
- b) Zeigen Sie, dass für Antiquarks dieselben Transformationsmatrizen U verwendet werden können, wenn man das Isospindublett als $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$ definiert¹:

$$\begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

Wenden Sie dazu die Ladungskonjugation ($u \rightarrow \bar{u}$, $d \rightarrow \bar{d}$ und komplex konjugieren) auf den um U_1 , U_2 bzw. U_3 gedrehten Spinor $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ aus dem vorigen Aufgabenteil an, und vergleichen Sie diese Spinoren mit den um U_1 , U_2 bzw. U_3 gedrehten Spinoren $\begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$.

- c) Zeigen Sie, dass das ω -Meson ($\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$) ein Isospin-Singulett ist, indem Sie die Invarianz unter Rotation um jede der drei Achsen zeigen. Was ändert sich an der Argumentation, wenn man statt des ω -Mesons die η -Mesonen betrachtet? Wie wirken sich Isospin-Transformationen auf das ϕ -Meson aus?

¹Bei der Ladungskonjugation ändern die additiven Quatenzzahlen ihr Vorzeichen, d.h. $I_3(\bar{u}) = -1/2$ (Isospin down) und $I_3(\bar{d}) = +1/2$ (Isospin up)

- d) Drehen Sie das π^+ -Meson ($u\bar{d}$) im Isospinraum um 90° bzw. 180° einmal um die erste und einmal um die zweite Achse ($U_1(90^\circ)\pi^+$, $U_1(180^\circ)\pi^+$, $U_2(90^\circ)\pi^+$, $U_2(180^\circ)\pi^+$). Welche Zustände erhalten Sie?

Lösung:

- a) Die Transformationsmatrizen für die Rotation um die drei Achsen sind:

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\tau_1 \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ U_2 &= \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\tau_2 \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ U_3 &= \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i\tau_3 \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Angewendet auf einen Isospinor erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} u + i \sin \frac{\theta}{2} d \\ i \sin \frac{\theta}{2} u + \cos \frac{\theta}{2} d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} u + \sin \frac{\theta}{2} d \\ -\sin \frac{\theta}{2} u + \cos \frac{\theta}{2} d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} u \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Durch Ladungskonjugation C erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= C \left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} \right] = C \left[U_1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \bar{u} - i \sin \frac{\theta}{2} \bar{d} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= C \left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} \right] = C \left[U_2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \bar{u} + \sin \frac{\theta}{2} \bar{d} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= C \left[\begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} \right] = C \left[U_3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \bar{u} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

U angewendet auf den Antiquark-Isospinor ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= U_1 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} + i \sin \frac{\theta}{2} (-\bar{u}) \\ i \sin \frac{\theta}{2} \bar{d} + \cos \frac{\theta}{2} (-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \\ -[\cos \frac{\theta}{2} \bar{u} - i \sin \frac{\theta}{2} \bar{d}] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= U_2 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} + \sin \frac{\theta}{2} (-\bar{u}) \\ -\sin \frac{\theta}{2} \bar{d} + \cos \frac{\theta}{2} (-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \\ -[\cos \frac{\theta}{2} \bar{u} + \sin \frac{\theta}{2} \bar{d}] \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= U_3 \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{d} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}} (-\bar{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{d} \\ -[e^{-i\frac{\theta}{2}} \bar{u}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man sieht, dass sich dieselben Gleichungen für $\bar{u}'$ und $\bar{d}'$ wie für die ladungskonjugierten gedrehten Quarkzustände ergeben.

- c) Mit den gedrehten Isospinoren aus den beiden vorigen Aufgabenteilen erhält man für das im Isospinraum gedrehte ω -Meson:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \cdot U_1 \omega &= U_1[u\bar{u} + d\bar{d}] = U_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{U}_1 \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{pmatrix} + U_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{U}_1 \begin{pmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{pmatrix} - i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \\
&\quad \left(i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \left(-i \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\cos \frac{\theta}{2} u + i \sin \frac{\theta}{2} d \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \bar{u} - i \sin \frac{\theta}{2} \bar{d} \right) + \\
&\quad \left(i \sin \frac{\theta}{2} u + \cos \frac{\theta}{2} d \right) \left(-i \sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \right) \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} u\bar{u} - i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} u\bar{d} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\bar{u} + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\bar{d} + \\
&\quad \sin^2 \frac{\theta}{2} u\bar{u} + i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} u\bar{d} - i \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\bar{u} + \cos^2 \frac{\theta}{2} d\bar{d} \\
&= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) u\bar{u} + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\bar{d} \\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2} \cdot \omega \\
\sqrt{2} \cdot U_2 \omega &= U_2[u\bar{u} + d\bar{d}] \\
&= \left(\cos \frac{\theta}{2} u - \sin \frac{\theta}{2} d \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} \bar{u} - \sin \frac{\theta}{2} \bar{d} \right) + \\
&\quad \left(\sin \frac{\theta}{2} u + \cos \frac{\theta}{2} d \right) \left(\sin \frac{\theta}{2} \bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \bar{d} \right) \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} u\bar{u} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} u\bar{d} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\bar{u} + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\bar{d} + \\
&\quad \sin^2 \frac{\theta}{2} u\bar{u} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} u\bar{d} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\bar{u} + \cos^2 \frac{\theta}{2} d\bar{d} \\
&= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) u\bar{u} + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\bar{d} \\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2} \cdot \omega \\
\sqrt{2} \cdot U_3 \omega &= U_3[u\bar{u} + d\bar{d}] \\
&= e^{i\frac{\theta}{2}} u e^{-i\frac{\theta}{2}} \bar{u} + e^{-i\frac{\theta}{2}} d e^{i\frac{\theta}{2}} \bar{d} \\
&= u\bar{u} + d\bar{d} = \sqrt{2} \cdot \omega
\end{aligned}$$

Das ω -Meson ist also invariant unter $SU(2)$ -Transformationen im Isospinraum und somit ein Isospin-Singulett.

Bei den η -Mesonen hat man wie beim ω -Meson die Komponente $u\bar{u} + d\bar{d}$, allerdings gibt es hier einen zusätzlichen Anteil $s\bar{s}$. Da das s -Quark (und das

$\bar{s}$ -Quark) keinen Isospin hat, ist es invariant unter Isospintransformationen ($Us = s$, $U\bar{s} = \bar{s}$). Das Transformationsverhalten der η -Mesonen entspricht also dem des ω -Mesons. D.h. auch die η -Mesonen sind Isospin-Singulets.

Das ϕ -Meson besteht nur aus $s\bar{s}$ und ist somit nicht von Isospin-Transformationen betroffen. Es ist also auch ein Isospin-Singulett.

- d) Verwende die $U_{1,2,3}$ Matrizen aus Aufgabenteil a) und dass $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\cos 90^\circ = 0$ und $\sin 90^\circ = 1$. Für die Transformation um 90° um die erste Achse gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + id \\ iu + d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} - i\bar{d}] \end{pmatrix} \\ U_1(90^\circ)\pi^+ &= U_1(90^\circ)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + id)\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(-iu\bar{u} + u\bar{d} + d\bar{u} + id\bar{d}) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ + \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die erste Achse ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} id \\ iu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i\bar{u} \\ -[-i\bar{d}] \end{pmatrix} \\ U_1(180^\circ)\pi^+ &= U_1(180^\circ)u\bar{d} = id(-i\bar{u}) = d\bar{u} = \pi^- \end{aligned}$$

Für die Drehung um 90° um die zweite Achse erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u + d \\ -u + d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\bar{u} + \bar{d} \\ -[\bar{u} + \bar{d}] \end{pmatrix} \\ U_2(90^\circ)\pi^+ &= U_2(90^\circ)u\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + d)\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{d}) = \frac{1}{2}(u\bar{u} + u\bar{d} - d\bar{u} - d\bar{d}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{2}\pi^+ - \frac{1}{2}\pi^- \end{aligned}$$

Die Rotation um 180° um die zweite Achse ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d \\ -u \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \bar{d}' \\ -\bar{u}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\bar{u} \\ -[\bar{d}] \end{pmatrix} \\ U_2(180^\circ)\pi^+ &= U_2(180^\circ)u\bar{d} = (-d)\bar{u} = -d\bar{u} = -\pi^- \end{aligned}$$

Das um 180° gedrehte π^+ ergibt ein π^- (mit Phasenfaktor). Bei der Drehung des π^+ um 90° erhält man eine Überlagerung von π^0 , π^+ und π^- .

Übungen Physik VI (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2010

Übungsblatt Nr. 10

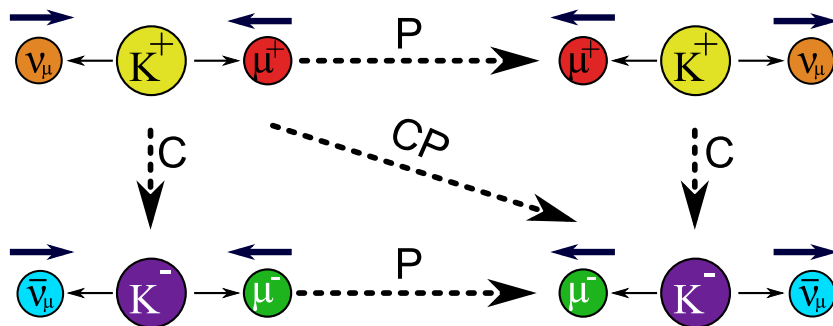
Bearbeitung bis 08.07.2010

Aufgabe 1: Parität und Drehimpuls

Das K^+ -Meson hat Spin 0 und zerfällt hauptsächlich durch die Reaktion $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$. Skizzieren Sie die Richtung des Impulses und des Spins von Myon und Neutrino im Ruhesystem des Kaons. Wenden Sie auf diesen Zerfallsprozess nun jeweils den Paritätsoperator P , den C -Paritätsoperator C sowie die Kombination beider Operatoren CP an und skizzieren Sie die daraus resultierenden Impulse und Spins. Welche dieser drei resultierenden Reaktionen treten nicht auf und warum?

Lösung:

Da das Kaon Spin 0 hat, müssen die Spins von Muon und Neutrino antiparallel sein. Außerdem muss der Spin des Neutrinos antiparallel zu seinem Impuls sein, da es linkshändig und masselos ist. Damit erhält man folgendes Bild für die Impulse $\rightarrow$ (dünner Pfeil) und Spins $\Rightarrow$ (dicker Pfeil):



Der Paritätsoperator ändert die Impulsrichtung der Teilchen, nicht jedoch deren Spinausrichtung. Dadurch erhält man ein rechtshändiges Neutrino, das es laut Standardmodell nicht gibt.

Der C -Operator wandelt Teilchen in ihre Antiteilchen um, ändert die Impulse und Spins aber nicht. Somit hat man ein Antineutrino mit negativer Helizität, was experimentell nicht beobachtet wird.

Die Anwendung von P - und C -Operator zusammen ergibt jedoch wieder eine erlaubte Reaktion.

Aufgabe 2: Parität und Drehimpuls

Die Reaktion $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ verläuft bei einer Schwerpunktsenergie von 1232 MeV praktisch vollständig über die Bildung eines resonanten Zwischenzustandes, der Deltaresonanz $\Delta^{++}(1232)$ (Spin $3/2$, Parität $+1$, Zerfallsbreite 120 MeV).

- a) Bei welchem Impuls des einlaufenden Pions liegt das Maximum der Resonanz, wenn das Proton im Laborsystem ruht? Welche Lebensdauer hat die Deltaresonanz?
- b) Bei welchem Bahndrehimpuls des π^+p -Systems tritt die Resonanz auf?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2 = (m_p + \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2})^2 - p_\pi^2 \\ &= m_p^2 + 2m_p\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} + p_\pi^2 + m_\pi^2 - p_\pi^2 \\ &\Rightarrow 4m_p^2(p_\pi^2 + m_\pi^2) = (s - m_p^2 - m_\pi^2)^2 \\ &\Rightarrow p_\pi = \sqrt{\frac{(s - m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4m_p^2}} - m_\pi = 298.3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Lebensdauer τ ergibt sich aus der Zerfallsbreite Γ :

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = 5.5 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

Diese sehr kurze Lebensdauer zeigt, dass es sich um einen Prozess der starken Wechselwirkung handelt.

- b) Das Pion hat Spin 0 und das Proton Spin $1/2$. Der Gesamtspin S ist also $1/2$. Um auf den Spin $J = L + S = 3/2$ der Deltaresonanz zu kommen, muss der Bahndrehimpuls L entweder 1 oder 2 sein.

Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, wird die Parität betrachtet. Die Parität des $p\pi$ -Systems $P_{p\pi}$ setzt sich zusammen aus der Parität des Proton $P_p = +1$, der Parität des Pion $P_\pi = -1$ und der Bahndrehimpuls-komponente $(-1)^L$:

$$P_{p\pi} = P_p \cdot P_\pi \cdot (-1)^L = (-1)^{L+1}$$

D.h. für $L = 1$ ist $P_{p\pi} = +1$ und für $L = 2$ ist $P_{p\pi} = -1$. Da die Parität in der starken Wechselwirkung erhalten ist und die Deltaresonanz positive Parität hat, muss also $L = 1$ sein.

Aufgabe 3: K^0 -Oszillation

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden am Ort $x = 0$ $N_0 = 10000$ K^0 -Mesonen erzeugt, die sich mit einem Impuls von $p = p_x = 1$ GeV/c durch Vakuum bewegen. Durch Prozesse zweiter Ordnung der schwachen Wechselwirkung wird aus dem reinen K^0 -Strahl für Zeiten $t > 0$ eine Mischung aus K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen. Im Folgenden soll die CP-Verletzung vernachlässigt werden, d.h. $|K_S^0\rangle \equiv |K_1^0\rangle$ und $|K_L^0\rangle \equiv |K_2^0\rangle$.

- a) Zeigen Sie, dass die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen als Funktion der Zeit t im Kaon-Ruhesystem gegeben ist durch ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} N_{K_S^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\ N_{K_L^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\ N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} [e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t}] \\ N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} [e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t}] \end{aligned}$$

mit

$$\Delta m = |m_S - m_L| \quad , \quad \Gamma_{S/L} = \frac{1}{\tau_{S/L}} \quad , \quad \Gamma = \frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2}$$

Dabei ist $m_{S/L}$ die Masse und $\tau_{S/L}$ die Lebensdauer von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen. Verwenden Sie für die Herleitung folgenden Ansatz für die Wellenfunktion von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen

$$|K_{S/L}^0\rangle(t) = A_{S/L} \cdot e^{-im_{S/L}t} \cdot e^{-\Gamma_{S/L}t/2}$$

mit $A_{S/L}$ als konstantem Normierungs- und Phasenfaktor. Es gilt die Beziehungen $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$ und $|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$. (Tippfehler: Im Aufgabenblatt waren die Indizes L und S vertauscht !)

- b) Stellen Sie die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen graphisch dar für das Zeitintervall von 0 bis $2 \cdot 10^{-9}$ s. Welcher Strecke entspricht dieser Zeitraum? Verwenden Sie $\Delta m = 5.3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.

Lösung:

- a) Für die Wellenfunktion von K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen folgt mit dem Ansatz aus der Aufgabenstellung und den Beziehungen $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$ und

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle):$$

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} + A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2}) \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_S^0\rangle - |K_L^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} - A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2}) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Anzahl von K^0 - bzw. $\bar{K}^0$ -Mesonen:

$$\begin{aligned} N_{K^0}(t) &= \langle K^0 | K^0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\ &\quad + A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2}) \\ &= \frac{1}{2} (A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\ &\quad + [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}) \\ N_{\bar{K}^0}(t) &= \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\ &\quad - [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}) \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $N_{K^0} = N_0$ und $N_{\bar{K}^0} = 0$:

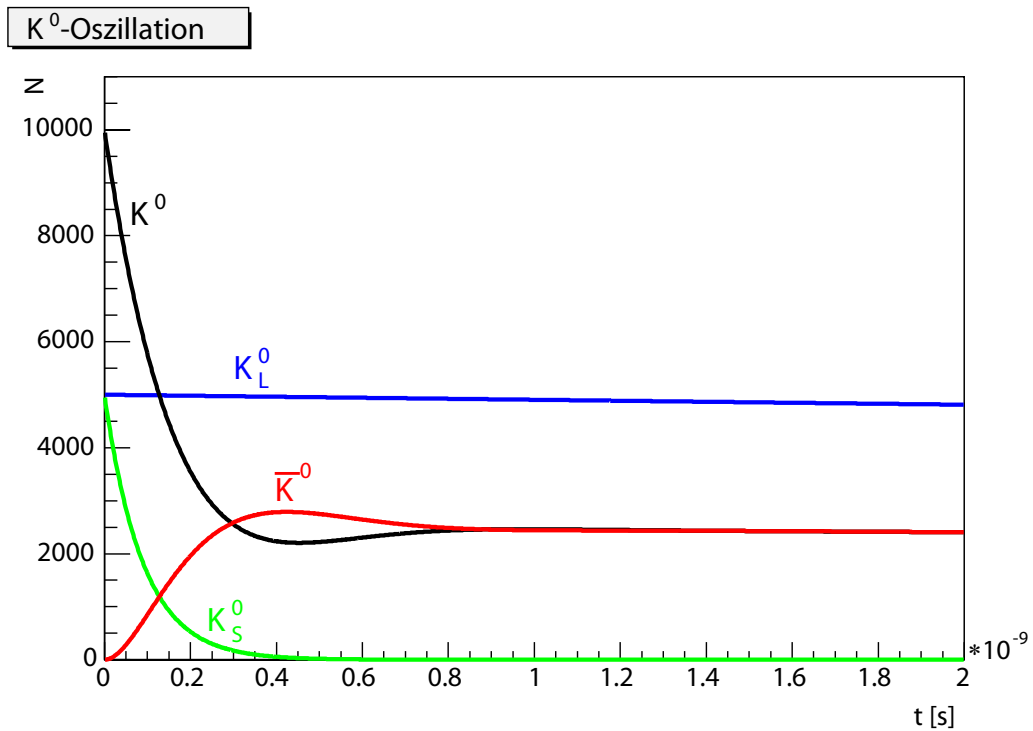
$$\begin{aligned} 0 &= N_{\bar{K}^0}(t=0) = \frac{1}{2} (A_S^* A_S + A_L^* A_L - [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\ &= \frac{1}{2} (A_S - A_L)^* \cdot (A_S - A_L) = \frac{1}{2} |A_S - A_L|^2 \\ &\Rightarrow A_L = A_S \\ N_0 &= N_{K^0}(t=0) = \frac{1}{2} (A_S^* A_S + A_L^* A_L + [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\ &= \frac{1}{2} (A_S + A_L)^* \cdot (A_S + A_L) = \frac{1}{2} |A_S + A_L|^2 = \frac{1}{2} |2A_S|^2 \\ &\Rightarrow A_S = A_L = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \cdot e^{i\phi} \end{aligned}$$

Die Phase ϕ kann willkürlich gewählt werden. Als Anzahl der verschiedenen

neutralen Kaonen erhält man:

$$\begin{aligned}
 N_{K_S^0}(t) &= \langle K_S^0 | K_S^0 \rangle = A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} \\
 &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\
 N_{K_L^0}(t) &= \langle K_L^0 | K_L^0 \rangle = A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
 &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\
 N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}) \\
 &= \frac{N_0}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t}) \\
 N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}) \\
 &= \frac{N_0}{4} (e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t})
 \end{aligned}$$

b) Mit $\tau_S = 0.89 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ und $\tau_L = 5.17 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ erhält man:



Für die Strecke x , die in einer Zeit von $t = 2 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ zurückgelegt wird, gilt (t ist die Zeit im Ruhesystem des Kaons !):

$$x = v\gamma t = \beta\gamma ct = \frac{p}{mc} ct = 120.5 \text{ cm}$$

Aufgabe 4: Leptonisches Verzweigungsverhältnis im Pionenzерfall

Beim Pionenzерfall über die schwache Wechselwirkung wird eine maximale Verletzung der Parität beobachtet, d.h. es werden nur linkshändige Neutrinos bzw. rechtshändige Antineutrinos erzeugt.

- a) Betrachten Sie den Pionenzерfall im Ruhesystem:

$$\begin{array}{ll} \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu & \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e & \pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \end{array}$$

Berechnen Sie die Impulse von μ , ν_μ und e und ν_e , sowie die zugehörigen Energien E_μ , E_e und die relativistischen Geschwindigkeiten β_μ bzw. β_e .

- b) Bestimmen Sie nun das Verzweigungsverhältnis R zwischen den beiden möglichen Zerfallskanälen in μ und e . Betrachten Sie dazu nur das Verhältnis der Phasenräume

$$R_\phi = \frac{\phi_e}{\phi_\mu} \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{dN}{dE_0} \propto p^2 \frac{dp}{dE_0}.$$

Welcher Zerfallskanal ist demnach bevorzugt?

- c) Beachten Sie nun die Linkshändigkeit der Leptonen. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss das geladene Lepton rechtshändig emittiert werden, es hat demnach die „falsche“ Helizität. Die Wahrscheinlichkeit ein solches rechtshändiges und nicht masseloses Teilchen zu erzeugen, ist gegeben durch

$$W_{RH} = \frac{1}{2} (1 - \beta).$$

Berechnen Sie nun erneut das Verzweigungsverhältnis R und beziehen Sie die Wahrscheinlichkeit W_{RH} mit ein. Welcher Zerfallskanal ist nun bevorzugt (Annahme: $m_\nu = 0$)? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in der Vorlesung gegebenen experimentellen Wert.

Lösung:

- a) Zuerst berechnen wir die Energien und Impulse sowie $(1 - \beta)$ für die beteiligten Teilchen im Zerfall

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Dabei verwenden wir $m_\nu = 0$ und $p_\nu = p_\mu$ (Zweikörperzerfall). Die Zerfallsenergie ist

$$E_0 = m_\pi c^2 = 139,57 \text{ MeV} = E_\mu + E_\nu$$

Mit $E_\mu = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2}$ und $E_\nu = p_\nu c = p_\mu c$ erhalten wir daraus

$$m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p_\mu^2 c^2} + p_\mu c$$

Damit ergibt sich für den Impuls des Myons (und des Elektrons analog)

$$p_\mu c = \frac{m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{2m_\pi c^2} = \frac{E_0^2 - m_\mu^2 c^4}{2m_\pi c^2}$$

Die Teilchenenergie erhalten wir aus dem Impuls und der Zerfallsenergie über

$$\begin{aligned} E_\mu &= E_0 - E_\nu = m_\pi c^2 - p_\mu c \\ &= \frac{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2m_\pi c^2} \\ &= \frac{E_0^2 + m_\mu^2 c^4}{2E_0} \end{aligned}$$

Aus Energie und Impuls lässt sich dann die Geschwindigkeit berechnen

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} &= \frac{p}{E} \Rightarrow \frac{v}{c_\mu} = \frac{m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4}{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4} \\ 1 - \frac{v}{c} &= \frac{2m_\mu^2 c^4}{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4} \end{aligned}$$

Mit $m_\mu = 105,66 \text{ MeV}$ ergeben sich folgende Werte:

	Myon	Elektron
Impuls	$p_\mu = 29,8 \text{ MeV}$	$p_e = 69,8 \text{ MeV}$
Energie	$E_\mu = 109,8 \text{ MeV}$	$E_e = 69,8 \text{ MeV}$
Geschwindigkeit	$(1 - \frac{v}{c})_\mu = 0,73$	$(1 - \frac{v}{c})_e = 3,12 \cdot 10^{-5}$

- b) Um das Verzweigungsverhältnis der Reaktionen mittels dem Phasenraumvolumen zu bestimmen wenden wir Fermi's Goldene Regel an, unter der Annahme, dass die Matrixelemente für Elektronen und Myonen gleich sind. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Myon (bzw. Elektron) mit einem Impuls im Intervall $p, p + dp$ emittiert wird

$$\frac{dN}{dE_0} = \text{const.} \cdot p^2 \frac{dp}{dE_0}$$

Wir benötigen noch

$$\begin{aligned} p_\mu c &= \frac{E_0^2 - m_\mu^2 c^4}{2m_\pi c^2} \\ \frac{dp_\mu c}{dE_0} &= \frac{2E_0 \cdot 2E_0 - (E_0^2 - m_\mu^2 c^4) \cdot 2}{4E_0^2} \\ &= \frac{E_0^2 + m_\mu^2 c^4}{2E_0^2} \\ &= \frac{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2m_\pi^2 c^4} = \frac{E_\mu}{E_0} \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{dN}{dE_0} = \text{const.} \cdot p^2 \frac{dp}{dE_0} = \text{const.} \cdot \frac{(m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4)(m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4)^2}{8m_\pi^4 c^8}$$

Daraus erhalten wir

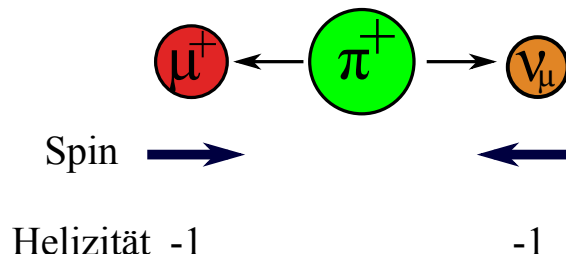
$$\begin{aligned} R_{ph} &= \frac{\pi \rightarrow e\nu}{\pi \rightarrow \mu\nu} = \frac{\left(\frac{dN}{dE_0}\right)_e}{\left(\frac{dN}{dE_0}\right)_\mu} \\ &= \frac{(m_\pi^2 c^4 + m_e^2 c^4)(m_\pi^2 c^4 - m_e^2 c^4)^2}{(m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4)(m_\pi^2 c^4 - m_\mu^2 c^4)^2} \end{aligned}$$

und in Zahlen

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dE_0}\right)_e &= \text{const.} \cdot 2,43 \cdot 10^{15} \\ \left(\frac{dN}{dE_0}\right)_\mu &= \text{const.} \cdot 6,98 \cdot 10^{14} \\ R_{ph} &= 3,49 \end{aligned}$$

Damit ist der Elektronenzerfallskanal bevorzugt.

- c) Nun wird noch die Helizität in der schwachen Wechselwirkung berücksichtigt. Dazu eine Skizze vom Zerfall des Pions in Myon und Myonneutrino (der Zerfall in Positron und Elektronneutrino ist analog dazu)



Wegen der Drehimpulserhaltung des Systems gilt

$$\vec{J}_{\mu^+} + \vec{J}_\nu = \vec{J}_{\pi^+} = 0$$

Das Neutrino tritt als Lepton mit negative Helizität (linkshändig) auf. Das μ^+ müsste als Antilepton eine positive Helizität besitzen (rechtshändig). Da das Neutrino (nahezu) masselose ist, erhält es die „richtige“ Parität also $h = -1$. Wegen der Drehimpulserhaltung, muss also das massive μ^+ mit für Antileptonen falscher Helizität von $h = -1$ emittiert werden.

Aus der V-A Theorie gilt (siehe Vorlesung) für die Wahrscheinlichkeit, dass das Myon mit Spin in Flugrichtung (Richtige Helizität für Antileptonen) emittiert wird ist $W_\uparrow = \frac{1}{2}(1 + \beta_\mu)$. Die Wahrscheinlichkeit für die Emission unter

falscher Helizität, also mit Spin entgegen der Flugrichtung ist gegeben als $W_{\downarrow} = \frac{1}{2}(1 - \beta_{\mu})$.

Dies gilt Analog für das Positron wobei hier β_e verwendet wird.

Diese Wahrscheinlichkeit muss nun zu R_{ph} aus der vorherigen Aufgabe dazu gerechnet werden.

$$R = R_{ph} \cdot \frac{W_{\downarrow}(e)}{W_{\downarrow}(\mu)}$$

Aus Aufgabenteil a) erhalten wir $W_{\downarrow}(\mu) = 1 - \frac{v}{c}_{\mu} = 0,73$ und $W_{\downarrow}(e)(1 - \frac{v}{c})_e = 3,12 \cdot 10^{-5}$. Aufgabenteil c) liefert $R_{ph} = 3,49$.

Somit erhalten wir ein Verzweungsverhältnis von (beim Einsetzen von genaueren Werten ggf. leicht anweichendes Ergebnis)

$$\begin{aligned} R &= 3,49 \cdot \frac{3,12 \cdot 10^{-4}}{0,73} \\ &= 1,5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Diese Ergebnis zeigt, dass der Positronenkanal stark unterdrückt und somit das Pion vorwiegend in Myonen zerfällt.

Aufgabe 5: Neutrinos

Neutrinos sind neutrale Elementarteilchen, die eine sehr geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit mit gewöhnlicher Materie haben. Das hat den Vorteil, dass der Neutrino-Nachweis einen Einblick in Bereiche erlaubt, die von Materie verdeckt sind (z.B. in das Innere der Sonne). Da Neutrinos keine Ladung tragen, zeigen sie zudem immer auf ihre Quelle, was Astrophysiker besonders interessiert. Leider hat die geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit den Nachteil, dass es sehr schwierig ist Neutrinos nachzuweisen.

- a) Kernreaktoren sind die stärksten künstlichen Neutrinoquellen auf der Erde. Erstmals wurden Elektronantineutrinos aus dem Savannah River Reaktor über den inversen β -Zerfall $p + \bar{\nu}_e \rightarrow n + e^+$ mit einem ruhenden Proton nachgewiesen. Welche Mindestenergie muss das Neutrino haben, um diese Reaktion zu induzieren?
- b) In Luftschauern werden Neutrinos hauptsächlich über den Zerfall geladener Pionen erzeugt. Zeigen Sie, dass etwa doppelt so viele Myon-Neutrinos wie Elektron-Neutrinos erzeugt werden, also

$$\frac{N(\nu_{\mu})}{N(\nu_e)} \approx 2.$$

Hinweise:

- Das beim Pionzerfall produzierte Myon sei als hinreichend niederenergetisch angenommen, so dass es ebenfalls zerfällt, bevor es die Erdoberfläche erreicht.
 - Unter Myon-Neutrinos seien hier auch Myon-Antineutrinos gezählt, analog bei Elektron-Neutrinos.
- c) Im Jahre 2002 wurde ein über 40 Jahre andauerndes Problem der solaren (d.h. aus der Sonne kommenden) Neutrinos gelöst. Erstmals konnten experimentell Neutrino-Oszillationen nachgewiesen und damit die Messungen der Neutrino-Flüsse in Übereinstimmung mit den Modellen der Funktionsweise der Sonne gebracht werden. Neutrino-Oszillation bedeutet, dass sich verschiedene Neutrino-Sorten ineinander umwandeln können und dass Neutrinos Ruhemasse haben. Berechnen Sie den Fluss solarer Neutrinos auf der Erde (Anzahl der Neutrinos pro cm^2 und Sekunde). *Hinweise:*
- Die Solarkonstante (Strahlungsenergie pro Fläche auf der Erde) ist $S = 1.37 \text{ kW}/m^2$.
 - Pro Reaktionszyklus $4p \rightarrow 4He + 2e^+ + 2\nu_e$ wird in der Sonne im Mittel $Q_\gamma = 26.2 \text{ MeV}$ Strahlungsenergie erzeugt.

Lösung:

- a) Die Mindestenergie E_ν des Neutrinos ist die Differenz der Ruheenergien von Neutron und Positron zum Proton:

$$E_\nu = m_n + m_{e^+} - m_p = 939.6 \text{ MeV} + 0.5 \text{ MeV} - 938.3 \text{ MeV} = 1.8 \text{ MeV}$$

- b) Schauen wir uns die Zerfallsmöglichkeiten der geladenen Pionen einmal an:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Myonen wiederum zerfallen und erhalten insgesamt:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+ \\ \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^-\end{aligned}$$

Wir erhalten also für das Verhältnis:

$$\frac{N(\nu_\mu)}{N(\nu_e)} = 2$$

- c) Zuerst berechnen wir, wie viele Zyklen nötig sind, um die erforderliche Strahlungsenergie, die auf der Erde pro cm^2 und Sekunde gemessen wird, zu erzeugen:

$$N_{zyk} = \frac{S}{Q_\gamma} = \frac{1370 \text{ W m}^{-2}}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 26.2 \cdot 10^6 \text{ W s}} = 33 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Da bei jedem Zyklus im Mittel 2 Neutrinos erzeugt werden erhalten wir für den Fluss der Neutrinos auf der Erde:

$$N_\nu = 2 \cdot N_{zyk} = 66 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}.$$