

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 1

Musterlösungen

Aufgabe 1: Relativistische Kinematik, Beschleuniger

- a) Die Länge L der Driftröhre muss so gewählt werden, dass die Protonen sie innerhalb einer halben Periodendauer T durchqueren:

$$L = v \cdot T/2 = \frac{v}{2\nu} \quad (1)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Protonen, die sich folgendermaßen aus der Masse m und Gesamtenergie E bzw. der kinetischen Energie E_{kin} berechnen läßt:

$$\begin{aligned} \frac{E}{mc^2} &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{E^2} \\ \Rightarrow v &= c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{kin} + mc^2)^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Gleichung 1 ergibt sich:

E_{kin}	L
1 MeV	3.46 cm
100 MeV	32.1 cm
10 GeV	74.7 cm

Zum Vergleich: Bei einer klassischen Rechnung erhält man bei einer Erhöhung der kinetischen Energie um den Faktor 100 eine Zunahme der Länge um den Faktor 10.

- b) Die Generatorfrequenz ν muss ein ganzzahliges Vielfaches (n) der Umlauffrequenz sein. Unter Verwendung von Gleichung 2 ergibt sich:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2\pi R} = n \cdot \frac{c}{2\pi R} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

Das Magnetfeld muss so gewählt werden, dass die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, bei der gegenüber der klassischen Formel ein zusätzlicher Gammafaktor auftritt:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= evB = \gamma m \frac{v^2}{R} \\ \Rightarrow B &= \frac{\gamma mv}{eR} = \frac{Ev}{c^2 eR} = \frac{E}{ceR} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} \end{aligned}$$

- c) Die Schwerpunktsenergie \sqrt{s} läßt sich aus den Vierervektoren $\mathbf{p}_{1,2} = (E_{1,2}, \vec{p}_{1,2}) = (E_{1,2}, 0, 0, \pm p_{1,2})$ (Strahlachse = z -Achse) der beiden kollidierenden Teilchen berechnen (hier $c=1$):

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2(p_1 \cdot (-p_2)) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 + 2p_1 p_2 \\ &= 2E_1 E_2 + 2\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2)} + m_1^2 + m_2^2 \end{aligned}$$

Für $E_{1,2} \gg m_{1,2}$ können die Massenterme vernachlässigt werden:

$$s = 4E_1 E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} \quad (3)$$

Für $E_1 \gg m_{1,2}$ und $E_2 = m_2$ (Fixed Target) kann folgende Näherung gemacht werden:

$$s = 2E_1 m_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2} \quad (4)$$

Damit erhält man folgende Schwerpunktsenergien:

Beschleuniger	Schwerpunktsenergie \sqrt{s}
LEP 2	206 GeV
KEKB	10.6 GeV
HERA	318 GeV
HERA (Fixed Target)	7.18 GeV
Tevatron	1.96 TeV
LHC (pp)	7 TeV
LHC (PbPb)	$1.15 \cdot 10^3$ TeV

Aus Gleichung 4 folgt für die Strahlenergie, die in einem Fixed-Target-Experiment benötigt würde, um eine Schwerpunktsenergie von $1.15 \cdot 10^3$ TeV zu erreichen:

$$E_1 = \frac{s}{2m_2} = 3.4 \cdot 10^6 \text{ TeV}$$

In Collider-Experimenten können also wesentlich höhere Schwerpunktsenergien erreicht werden als bei Fixed-Target-Experimenten.

Aufgabe 2: Synchrotronstrahlung

Für eine Kreisbewegung gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| &= \frac{v^2}{R} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \frac{c\beta^2}{R} \\ \vec{\beta} \perp \frac{d\vec{\beta}}{dt} &\Rightarrow \left|\beta \times \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \beta \left|\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \frac{c\beta^3}{R}\end{aligned}$$

Damit erhält man für die abgestrahlte Leistung:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \left[\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)^2 - \left(\vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)^2 \right] \\ &= \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \left[\frac{c^2\beta^4}{R^2} - \frac{c^2\beta^6}{R^2} \right] \\ &= \frac{2q^2}{3c} \gamma^6 \frac{c^2\beta^4}{R^2} (1 - \beta^2) \\ &= \frac{2}{3} q^2 \gamma^6 \frac{c\beta^4}{R^2} \frac{1}{\gamma^2} \\ &= \frac{2}{3} q^2 \frac{c\beta^4}{R^2} \gamma^4\end{aligned}$$

Mit der Umlaufzeit $T = 2\pi R/v = 2\pi R/(c\beta)$ und $q = e$ folgt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{dE}{dt} \cdot T \\ &= \frac{4\pi e^2}{3} \frac{\beta^3}{R} \gamma^4 \\ &= \frac{4\pi \cdot 197 \text{ MeV fm}/137}{3} \frac{\beta^3}{R} \gamma^4 \\ &= 6.02 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \cdot \frac{\beta^3}{R[\text{m}]} \cdot \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4\end{aligned}$$

Für Protonen mit $E = 1 \text{ TeV}$ erhält man bei $R = 1 \text{ km}$ einen Energieverlust von $\Delta E = 7.8 \text{ eV}$ pro Umlauf.

Für Elektronen mit $E = 1 \text{ TeV}$ ergibt sich bei gleichem Energieverlust ein Radius von

$$R = 6.02 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \frac{\beta^3}{E[\text{MeV}]} \cdot \left(\frac{\Delta E}{m_e c^2}\right)^4 = 1.1 \cdot 10^{16} \text{ m} = 1.2 \text{ Lj}$$

An diesem Wert wird deutlich, weshalb der nächste e^+e^- -Collider (ILC) als Linearbeschleuniger gebaut werden soll.

Aufgabe 3: Čerenkov-Detektoren

a) An der Schwelle gilt:

$$\begin{aligned}
 1 &= \beta n = \frac{p}{E} n = \frac{np}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} &= np \\
 \Rightarrow p^2 + m^2 &= n^2 p^2 \\
 \Rightarrow p &= \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Also sind die Schwellenimpulse $p_\pi = 200$ MeV und $p_K = 706$ MeV.

Für den Winkel θ , unter dem das Čerenkovlicht abgestrahlt wird, gilt:

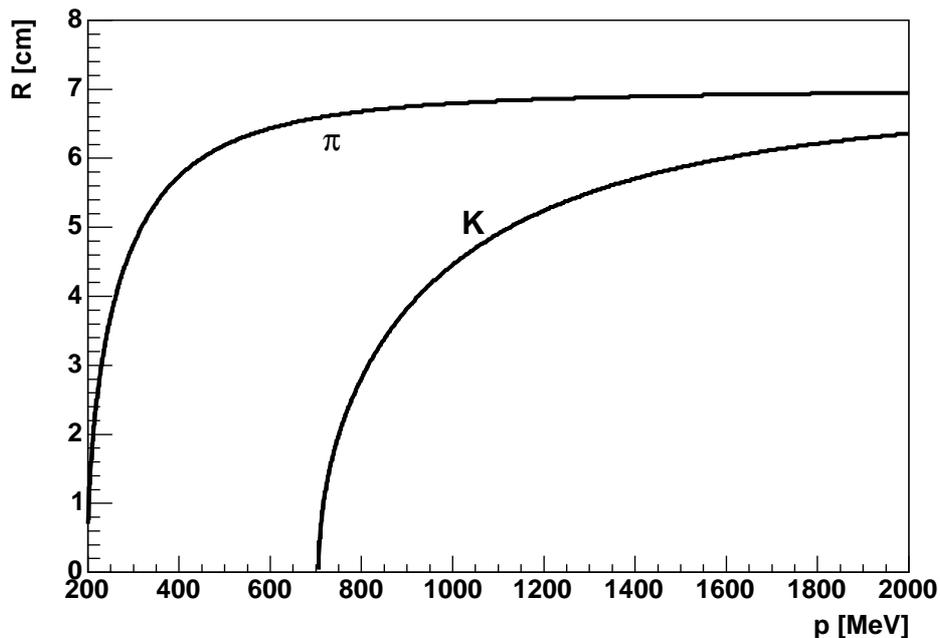
$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{E}{np} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{np}$$

Als Ringradius R ergibt sich:

$$R = L_0 \tan \theta = L_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = L_0 \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = L_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = L_0 \sqrt{\frac{n^2 p^2}{p^2 + m^2} - 1}$$

Dabei ist $L_0 = L + d/2 = 10$ cm (Dicke $d = 1$ cm).

Cherekovringe



Anhand des Bildes kann diskutiert werden, in welchen Bereich Pionen und Kaonen getrennt werden können.

- b) Für $\mu = 1$ ist der Brechungsindex gegeben durch $n = \sqrt{\epsilon}$. Daraus folgt an der Schwelle:

$$\sqrt{\epsilon} = n = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}}$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon - 1 = \frac{E^2}{E^2 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{E^2 - m^2}$$

Als Druck p erhält man aus der Suszeptibilität $\chi_0 = n^2 - 1$ bei Normaldruck p_0 :

$$p = \frac{\chi}{\chi_0} \cdot p_0 = \frac{m^2}{(E^2 - m^2)(n^2 - 1)} \cdot p_0 \quad (5)$$

Für Pionen ergibt sich $p = 0.96$ bar.

Aus Gleichung 5 folgt:

$$E^2 - m^2 = \frac{m^2}{n^2 - 1} \frac{p_0}{p} \Rightarrow E = m \sqrt{\frac{p_0}{(n^2 - 1)p} + 1}$$

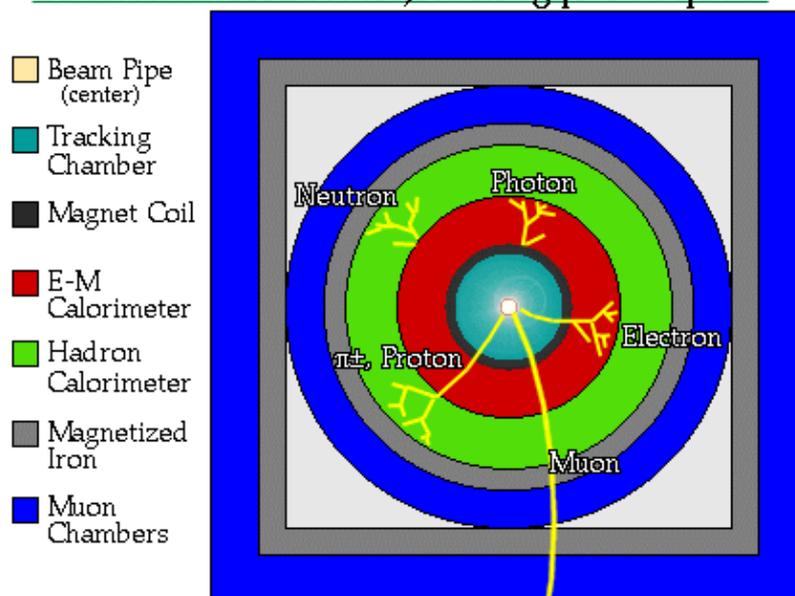
Für Kaonen ergibt sich $E = 17.7$ GeV.

Aufgabe 4: Detektorkonzept

Das Ziel der in der Teilchenphysik eingesetzten Detektoren ist es, eine möglichst vollständige Rekonstruktion von Ereignissen durchzuführen.

Die Detektoren sind im Wesentlichen nach dem in dem Bild gezeigten Schema aufgebaut.

A detector cross-section, showing particle paths



Folgende Detektoren können betrachtet werden:

- Halbleiterdetektor: Nachweis geladener Teilchen, sehr gute Ortsauflösung, aber relativ viel Materie (Vielfachstreuung, Energieverlust), Rekonstruktion von Spurparametern (Impuls) und insbesondere von Vertices (\rightarrow neutrale Teilchen), evtl. Teilchenidentifikation durch dE/dx , nahe am Strahlrohr
- Driftkammer, TPC: Nachweis geladener Teilchen, großes Volumen, viele Messpunkte, wenig Materie, Rekonstruktion von Spurparametern (Impuls) und evtl. von Vertices/Kinks, Teilchenidentifikation durch dE/dx
- Flugzeitdetektor (time-of-flight, ToF): Teilchenidentifikation von geladenen Teilchen, innerhalb von Magnet/Kalorimeter (Materie), ausserhalb der Spurkammer (großes Δt)
- Übergangsstrahlungsdetektor: Identifikation von Elektronen, innerhalb von Magnet/Kalorimeter
- Čerenkovdetektor: Teilchenidentifikation, innerhalb von Magnet/Kalorimeter
- Magnet: Impulsmessung von geladenen Teilchen durch Krümmung, innerhalb oder ausserhalb des Kalorimeters
- Elektromagnetisches Kalorimeter: Nachweis von Elektronen und Photonen, Energiemessung, vor had. Kalorimeter
- Hadronisches Kalorimeter: Nachweis von geladenen Hadronen und Neutronen, Energiemessung, zusammen mit el.Kal.: Rekonstruktion von Jets, (Nachweis von Myonen)
- Eisenjoch: Rückführung des magnetischen Flusses, Abschirmung von Hadronen
- Myonsystem: Nachweis von Myonen, ausserhalb der anderen Komponenten
- ...

Wenn das Schwerpunktssystem gleich dem Laborsystem ist, ist der Detektor in der Regel symmetrisch in Strahlrichtung. Wenn es einen Boost in eine Richtung gibt, wie es insbesondere bei Fixed-Target-Experimenten der Fall ist, ist der Detektor meist asymmetrisch aufgebaut.