Übungen Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 2 Musterlösungen

Aufgabe 1: Lorentztransformation und Comptonstreuung

Im Folgenden werden Größen im Elektron-Ruhesystem mit einem Stern und Größen des gestreuten Photons mit einem Strich gekennzeichnet. Impulse werden in eine Komponente senkrecht ($p_\perp = |\vec{p}_\perp|$) und eine Komponente parallel ($p_\parallel$) zur Boostrichtung zerlegt. Die positive Richtung ist durch das Photon definiert. Es gilt die Lorentztransformation:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_\parallel^* \\ p_\perp^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \\ p_\perp \end{pmatrix}$$

a) Aus

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e} = 5.38 \cdot 10^4 \quad \beta \approx -1 \text{ (negative Flugrichtung des Elektrons)}$$

folgt für die Lorentztransformation in das Ruhesystem des Elektrons:

$$E_\gamma^* = \gamma E_\gamma - \beta\gamma p_{\gamma\parallel} = \gamma E_\gamma - \beta\gamma E_\gamma = 2\gamma E_\gamma = 259 \text{ keV}$$

b) Für die Energie des gestreuten Photons gilt:

$$\begin{aligned} E_\gamma^{*\prime}(\theta^*) &= \frac{E_\gamma^*}{1 + \frac{E_\gamma^*}{m_e c^2}(1 - \cos\theta^*)} \\ \Rightarrow \quad E_\gamma^{*\prime}(90^\circ) &= 172 \text{ keV} \\ \Rightarrow \quad E_\gamma^{*\prime}(180^\circ) &= 129 \text{ keV} \end{aligned}$$

c) Für die Rücktransformation in das Laborsystem wird in der Transformationsmatrix $-\beta$ durch β ersetzt. Die Energie im Laborsystem ist also:

$$\begin{aligned} E_\gamma' &= \gamma E_\gamma^{*\prime} + \beta\gamma p_{\gamma\parallel}^{*\prime} = \gamma E_\gamma^{*\prime} + \beta\gamma p_\gamma^{*\prime} \cos\theta^* = \gamma E_\gamma^{*\prime}(1 - \cos\theta^*) \\ \Rightarrow \quad E_\gamma'(\theta^* = 90^\circ) &= 9.26 \text{ GeV} \\ \Rightarrow \quad E_\gamma'(\theta^* = 180^\circ) &= 13.85 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Aus den Impulskomponenten

$$\begin{aligned} p'_{\gamma\perp} &= p^{*\prime}_{\gamma\perp} = E^{*\prime}_{\gamma}\sin\theta^* \\ p'_{\gamma\|} &= \beta\gamma E^{*\prime}_{\gamma} + \gamma p^{*\prime}_{\gamma\|} = -\gamma E^{*\prime}_{\gamma}(1-\cos\theta^*) \end{aligned}$$

ergibt sich mit

$$\tan\theta = \frac{p'_{\gamma\perp}}{p'_{\gamma\|}}$$

für $\theta^* = 90°$:

$$\tan\theta = \frac{E^{*\prime}_{\gamma}}{-\gamma E^{*\prime}_{\gamma}} = -\frac{1}{\gamma} \quad\Rightarrow\quad \theta = 180° - 0.001° \approx 180°$$

und für $\theta^* = 180°$:

$$\tan\theta = \frac{0}{p'_{\gamma\|}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \theta = 180°$$

Aufgabe 2: Energieverlust und Vielfachstreuung

a) Für die mittlere Winkelabweichung erhält man:

$$\theta_{rms} = \frac{21\ \mathrm{MeV}/c}{p}\cdot\sqrt{\frac{L}{X_0}} = 4.7\ \mathrm{mrad} = 0.27°$$

Der Energieverlust durch Bremsstrahlung ΔE_{rad} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} &\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0} \\ \Rightarrow\quad & E(x) = E_0\cdot e^{-\frac{x}{X_0}} \\ \Rightarrow\quad & \Delta E_{rad} = E_0 - E(x) = E_0(1-e^{-\frac{x}{X_0}}) = 48.8\ \mathrm{MeV} \end{aligned}$$

Wenn man für $\Delta E \ll E_0$ die Näherung eines konstanten Energieverlusts $dE/dx = -E_0/X_0$ macht, erhält man als Energieverlust $\Delta E_{rad} = -E_0/X_0\cdot x = 50$ MeV.

b) Der Energieverlust durch Ionisation ist gegeben durch die Bethe-Bloch-Formel:

$$-\frac{dE}{dx} = D_e\left(\frac{Z_1}{\beta}\right)^2 Z_2\frac{N_A\rho}{A}\left[\ln\left(\frac{2mc^2\beta^2\gamma^2}{I}\right) - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2}\right]$$

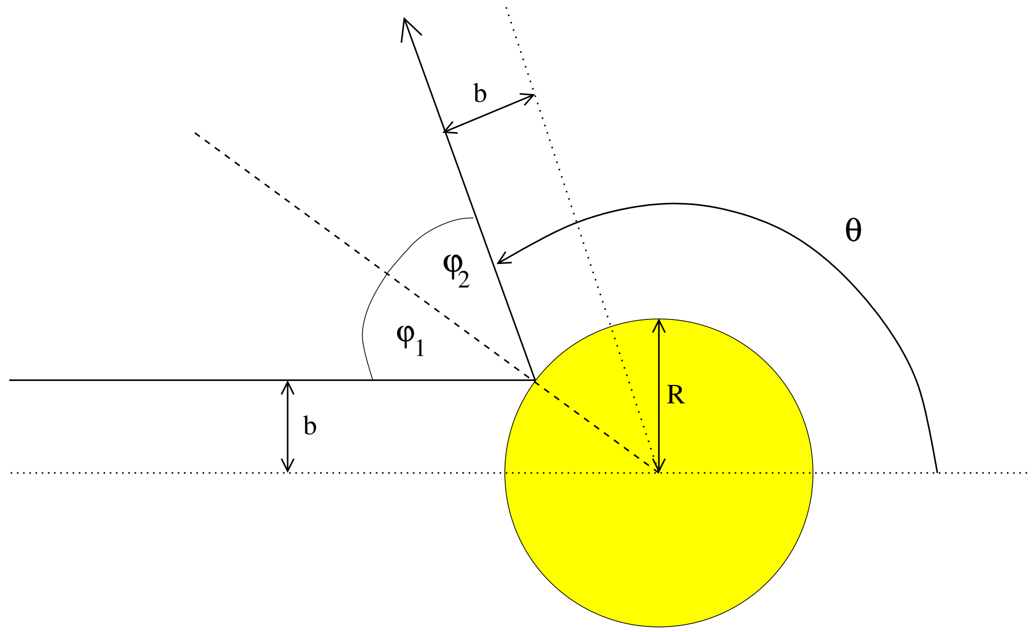
Mit $D_e = 5.1\cdot 10^{-25}$ MeV·cm^2, $Z_1 = 1$, $Z_2 = 82$, $\beta\gamma = p/m_e$, $\beta \approx 1$, $I \approx Z_2\cdot 10$ eV, $\delta = 0$ sowie ρ und A aus dem Aufgabentext erhält man:

$$-\frac{dE}{dx} = 29.4\ \mathrm{MeV/cm}$$

Daraus ergibt sich als Energieverlust durch Ionisation ΔE_{ion}:

$$\Delta E_{ion} = \left|\frac{dE}{dx}\right|\cdot 0.05\cdot X_0 = 0.82\ \mathrm{MeV} \ll \Delta E_{rad}$$

Aufgabe 3: Wirkungsquerschnitt



Der Drehimpuls $L_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1|$ vor dem Stoß muß gleich dem Drehimpuls L_2 nach dem (elastischen) Stoß sein:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Rightarrow \quad p\ R\ \sin\phi_1 &= p\ R\ \sin\phi_2 \\ \Rightarrow \quad \phi_1 &= \phi_2 \ := \phi \end{aligned}$$

Aus der Skizze ist zu sehen, dass $\phi = (\pi - \theta)/2$ ist. Damit ergibt sich für den Stoßparameter b:

$$b = R\ \sin\phi = R\ \sin\frac{\pi-\theta}{2} = R\ \cos\frac{\theta}{2}$$

Die Ableitung nach θ ist:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2}\ \sin\frac{\theta}{2}$$

Die differentielle Fläche, an der die Teilchen mit einem Winkel θ gestreut werden, ist $d\sigma = 2\pi\, b\, db$. Das entsprechende differentielle Raumwinkelelement ist $d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \cdot \left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{R\ \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \cdot \frac{R}{2}\ \sin\frac{\theta}{2}$$

Mit $\sin\theta = 2\ \sin\theta/2\ \cos\theta/2$ ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \tag{1}$$

Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \frac{R^2}{4} \cdot 4\pi = \pi R^2 \tag{2}$$

Dies entspricht der Querschnittsfläche der Kugel.

Aufgabe 4: Luminosität

Die Luminosität eines Speicherrings ist gegeben durch die Anzahlen der Teilchen pro Paket N_1 und N_2, die Fläche A der Wechselwirkungszone sowie die Frequenz ν, mit der die Pakete kollidieren:

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{A} \cdot \nu$$

Hier ist $N_1 = N_2 = 1.2 \cdot 10^{11}$ und $A = \pi r^2$ mit $r = 95\ \mu$m. Die Frequenz ergibt sich aus dem Umfang $U = 26.7$ km, der Anzahl der Pakete $n = 368$ und der Geschwindigkeit der Protonen $v \approx c$:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{U} = \frac{nc}{U}$$

Damit erhält man eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = 2.1 \cdot 10^{32}\ \mathrm{cm^{-2} s^{-1}}$$

Bei dieser Luminosität erwartet man innerhalb einer Zeit von $\Delta t = 1$ d bei einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma = 10$ pb die folgende Anzahl N von Ereignissen:

$$N = \frac{dN}{dt} \cdot \Delta t = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta t = 180$$