Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 3

Musterlösungen

Aufgabe 1: Rutherford-Streuung

a) Folgende Werte sind gegeben:

kinetische Energie:	$E_{kin} = 27$ MeV
Stromstärke:	$I_0 = 2$ nA
Ladung der α-Teilchen:	$q = 2e$
Massenbelegung:	$dM/dA = 2$ mg/cm^2
Masse eines Goldkerns:	$m_{\mathrm{Au}} = 197$ u (A = 197, u = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg)
Streuwinkel:	$\theta = 60°$
Abstand des Zählers:	$r = 20$ cm
Aktive Fläche:	$A = 4$ cm^2

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α-Teilchen an Goldatomen ist durch die Rutherford-Streuformel gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E^2 \sin^4 \theta/2}$$

Die Anzahl der Goldatome pro Fläche ist gegeben durch:

$$\frac{dN_{\mathrm{Au}}}{dA} = \frac{1}{m_{\mathrm{Au}}} \frac{dM}{dA}$$

Der vom Zähler abgedeckte Raumwinkel $\Delta\Omega$ ist:

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Aus dem im Zähler registrierten Strom I

$$I = I_0 \cdot \frac{dN_{\mathrm{Au}}}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

ergibt sich folgende Rate:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} = \frac{I_0}{2em_{\mathrm{Au}}} \cdot \frac{dM}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{A}{r^2} = 271 \text{ Hz}$$

b) Es gilt:

$$r_{min}(\theta) = \frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin\theta/2}\right] = R(\alpha) + R(\mathrm{Au}) = r_0 \cdot (A_\alpha^{1/3} + A_{\mathrm{Au}}^{1/3})$$

$$\Rightarrow \quad r_0 = \frac{\frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin\theta/2}\right]}{A_\alpha^{1/3} + A_{\mathrm{Au}}^{1/3}} = 1.7 \text{ fm}$$

$$\Rightarrow \quad R(\mathrm{Au}) = r_0 \cdot A_{\mathrm{Au}}^{1/3} = 9.9 \text{ fm}$$

Aufgabe 2: Weizsäcker-Massenformel

a) Die Weizsäcker-Massenformel lautet (unter Vernachlässigung der Paarungsenergie):

$$M(A,Z) = (A-Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A-2Z)^2}{4A}$$

Das Minimum von $M(A,Z)$ bestimmt die Ladungszahl des stabilsten Isobars. Im Minimum gilt:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial M}{\partial Z} &= -m_n + m_p + m_e + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - a_a \frac{A-2Z}{A} \\
&= -m_n + m_p + m_e - a_a + (2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1})Z \\
\Rightarrow \quad Z &= \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1}} \\
&= \frac{A}{2} \cdot \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{a_a + a_c A^{2/3}}
\end{aligned}$$

Mit $a_a = 93.15$ MeV und $a_c = 0.714$ MeV [Povh] ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{A}{2} \cdot \frac{93.94 \text{ MeV}}{93.15 \text{ MeV} + 0.714 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}} \\
&= \frac{A}{1.98 + 0.0152 \cdot A^{2/3}} \qquad (1)
\end{aligned}$$

b) Bei der symmetrischen Spaltung von $^{238}_{92}\mathrm{U}$ entstehen zwei Tochterkerne mit $A = 119$ und $Z = 46$ ($^{119}\mathrm{Pd}$). Die frei werdende kinetische Energie ist also:

$$E_{kin} = M(A = 238, Z = 92) - 2 \cdot M(A = 119, Z = 46)$$

Da die Massen-, Volumen- und Asymmetrieterme für Mutter- und Tochterkerne gleich sind, ergibt sich E_{kin} aus der Differenz von Oberflächen-, Coulomb- und Paarungsenergie ($E_p = \delta/\sqrt{A}$, $\delta = -11.2$ MeV für $^{238}_{92}\mathrm{U}$ (gg-Kern), $\delta = 0$ für $^{119}_{46}\mathrm{Pd}$ (ug-Kern)):

$$\begin{aligned}
E_{kin} &= a_s(238^{2/3} - 2 \cdot 119^{2/3}) + a_c(92^2 \cdot 238^{-1/3} - 2 \cdot 46^2 \cdot 119^{-1/3}) \\
&\quad +(-11.2 \text{ MeV} \cdot 238^{-1/2} - 2 \cdot 0 \cdot 119^{-1/2}) \\
&= -172.0 \text{ MeV} + 360.9 \text{ MeV} - 0.7 \text{ MeV} \\
&= 188.1 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

(Bei Vernachlässigung der Paarungsenergie ist $E_{kin} = 188.8$ MeV.)

c) Aus Gleichung 1 erhält man $Z = 50.69$ als Position des Minimums. Demnach erfolgen insgesamt 5 β^--Zerfälle von ${}^{119}_{46}$Pd bis ${}^{119}_{51}$Sb ($\Delta Z = 5$). Da die Masse der beim β^--Zerfall erzeugten Elektronen bereits in der Weizsäcker-Massenformel berücksichtigt ist, ergibt sich für die insgesamt freigesetzte kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= M(A=119, Z=46) - M(A=119, Z=51) \\ &= \Delta Z \cdot (m_n - m_p - m_e) + a_c A^{-1/3}(46^2 - 51^2) \\ &\quad + a_a A^{-1} \left[(46 - A/2)^2 - (51 - A/2)^2\right] \\ &= 3.9 \text{ MeV} - 70.4 \text{ MeV} + 86.1 \text{ MeV} \\ &= 19.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0, und da die Volumen- und die Oberflächenenergie sich beim β-Zerfall nicht ändern, tragen nur die Massenterme, der Coulombterm und der Asymmetrieterm zur kinetischen Energie bei.

Bemerkung: In Wirklichkeit endet die β-Zerfallskette nicht bei ${}^{119}_{51}$Sb, sondern schon beim stabilen Isotop ${}^{119}_{50}$Sn. Für diese Kette ergibt sich eine kinetische Energie von $E_{kin} = 19.4$ MeV.

Aufgabe 3: Spiegelkerne

Volumen-, Oberflächen- und Asymmetrieterm sind für ${}^{27}_{14}$Si und ${}^{27}_{13}$Al gleich. Da A ungerade ist, ist die Paarungsenergie 0. Es tragen also nur die Massenterme der Nukleonen und des erzeugten Positrons sowie die Differenz der Coulombenergien $\Delta E_c = E_c(\text{Si}) - E_c(\text{Al})$ zur Zerfallsenergie $E_{kin} = 3.80$ MeV bei:

$$E_{kin} = m_p - m_n - m_e + E_c(\text{Si}) - E_c(\text{Al})$$

(Da hier Kerne und nicht Atome betrachtet werden, tritt der Massenterm für die Hüllenelektronen aus der Weizsäcker-Massenformel nicht auf.) Mit der in der Aufgabe angegebenen Formel für E_c folgt:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= m_p - m_n - m_e + \frac{3}{5} \cdot \frac{(Z_{Si}^2 - Z_{Al}^2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} \\ \Rightarrow \quad R &= \frac{\frac{3}{5} \cdot (Z_{Si}^2 - Z_{Al}^2)\alpha\hbar c}{E_{kin} - m_p + m_n + m_e} = 4.2 \text{ fm} \end{aligned}$$

Damit erhält man als Radiusparameter:

$$r_0 = \frac{R}{A^{1/3}} = 1.4 \text{ fm}$$

Aufgabe 4: ^{14}C-Methode

a) Die Aktivität A zum Zeitpunk t ist bei einer Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ gegeben durch:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

Dabei ist N die Anzahl der ^{14}C-Atome und $N_0 = N(t = 0)$, $A_0 = A(t = 0)$. Auflösen nach t ergibt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)} \qquad (2) \\ &= \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{2 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g}}{0.404 \text{ Bq}} = 1926 \text{ a} \end{aligned}$$

b) Die Anzahl der ^{14}C-Atome zum Zeitpunk t ist:

$$N(t) = A(t)/\lambda = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot A(t)$$

$$\Rightarrow \quad N_0 = \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot 2 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g} = \frac{5730 \cdot 3.156 \cdot 10^7 \text{ s}}{\ln 2} \cdot 0.510 \text{ s}^{-1} = 1.33 \cdot 10^{11}$$

Analog ergibt sich für die Anzahl zum Zeitpunkt der Messung $N = 1.05 \cdot 10^{11}$.

c) Während der Messdauer Δt werden $\Delta N = A\Delta t$ Ereignisse registriert (Näherung: $\Delta t \ll T_{1/2} \Rightarrow A$ konstant). Der statistische Fehler der gemessenen Aktivität σ_A ist demnach:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta N}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta N}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{A}{\Delta t}}$$

Für den relativen statistische Fehler des gemessenen Alters σ_t/t folgt unter Verwendung von Gleichung 2:

$$\frac{\sigma_t}{t} = \left|\frac{\partial t}{\partial A}\right| \frac{\sigma_A}{t} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\sigma_A}{t} = \frac{\sigma_A}{A \ln \frac{A_0}{A}} = \frac{1}{\sqrt{A\Delta t} \ln \frac{A_0}{A}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 A \left(\ln \frac{A_0}{A}\right)^2} = 4.56 \cdot 10^5 \text{ s} = 5.28 \text{ d}$$