

# Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2011

## Übungsblatt Nr. 4

Musterlösungen

### Aufgabe 1: De-Broglie-Wellenlänge

Für die de-Broglie-Wellenlänge gilt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie  $E_{kin} = E - mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$ :

Neutrino:  $E_{kin} = 1.240 \text{ GeV}$

Elektron:  $E_{kin} = 1.239 \text{ GeV}$

Myon:  $E_{kin} = 1.139 \text{ GeV}$

Proton:  $E_{kin} = 0.617 \text{ GeV}$

Für Photonen gilt:

$$E = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

### Aufgabe 2: Formfaktor

- a) Der Formfaktor ist für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  definiert als

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}/\hbar} d^3r$$

Für die Integration werden hier Kugelkoordinaten verwendet. Dabei wird die  $z$ -Achse ( $\theta = 0$ ) in Richtung von  $\vec{q}$  gewählt, so dass  $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$  ist:

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr \cos \theta / \hbar} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{Subst. } x = \cos \theta) \\ &= -2\pi \int_1^{-1} \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr x / \hbar} r^2 dr dx \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \left[ \frac{\hbar}{iqr} e^{iqr x / \hbar} \right]_{-1}^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \end{aligned} \tag{1}$$

- b) Da das Volumen einer Kugel mit Radius  $R$  gleich  $\frac{4}{3}\pi R^3$  ist, ist die normierte Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel gegeben durch:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung 1 für den Formfaktor:

$$\begin{aligned} F(q) &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr/\hbar) dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \left( \left[ -r \frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{\hbar}{q} \cos(qr/\hbar) dr \right) \\ &= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left[ -r \cos(qr/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qr/\hbar) \right]_0^R \\ &= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left( -R \cos(qR/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qR/\hbar) \right) \\ &= \frac{3\hbar^3}{q^3 R^3} (\sin(qR/\hbar) - qR/\hbar \cdot \cos(qR/\hbar)) \\ &= \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit } x = \frac{qR}{\hbar} \end{aligned}$$

- c)  $F(q=0)$  lässt sich durch Taylorentwicklung von  $\sin x$  und  $\cos x$  berechnen:

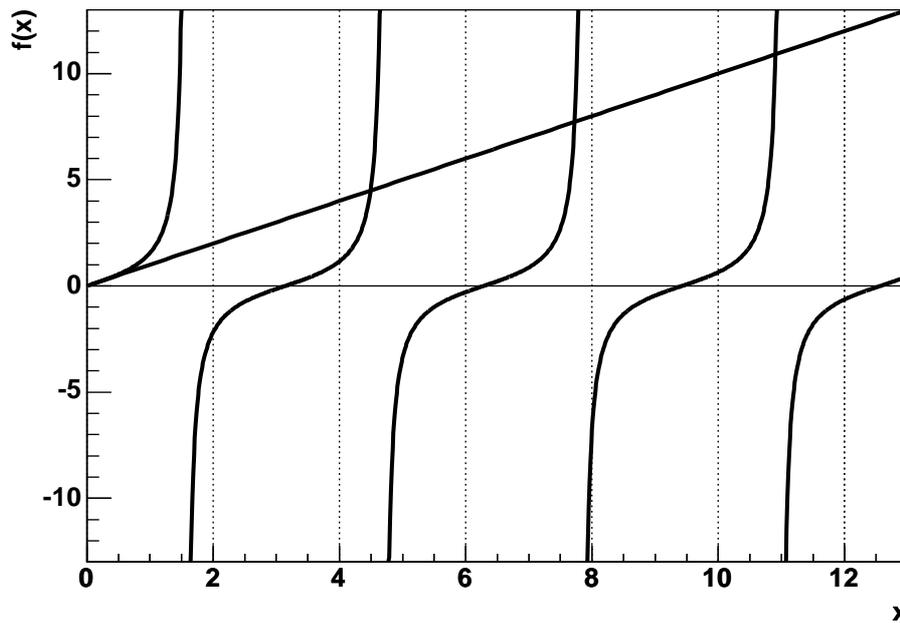
$$\begin{aligned} F(q=0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot \left[ 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right] \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left( -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left( \frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- d) Aus  $F(x) = 0$  folgt:

$$\sin x - x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan x$$

Aus den Schnittpunkten der Funktionen  $f_1(x) = x$  und  $f_2(x) = \tan x$  lassen sich also die Nullstellen von  $F(x)$  bestimmen.

$$f_1(x)=x, f_2(x)=\tan(x)$$



Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \sin x_n} = x_n - 1/x_n + \cot x_n$$

Für die Startwerte 5, 7 und 11 (aus der graphischen Darstellung) ergeben sich nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.493 \\ x_2 &= 7.725 \\ x_3 &= 10.904 \end{aligned}$$

e) Aus  $x = qR/\hbar$  folgt für  $p \gg mc$ :

$$R = \frac{\hbar}{q} \cdot x = \frac{\hbar c}{2pc \sin \theta/2} \cdot x = \frac{\hbar c}{2E \sin \theta/2} \cdot x$$

Da die lokalen Minima des Wirkungsquerschnitts den Nullstellen von  $F(x)$  entsprechen, lässt sich aus ihnen der Radius  $R$  bestimmen.

Für  $^{40}\text{Ca}$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 18^\circ &\Rightarrow R_1 = 3.78 \text{ fm} \\ \theta_2 = 31^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.80 \text{ fm} \\ \theta_3 = 47^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.60 \text{ fm} \end{aligned}$$

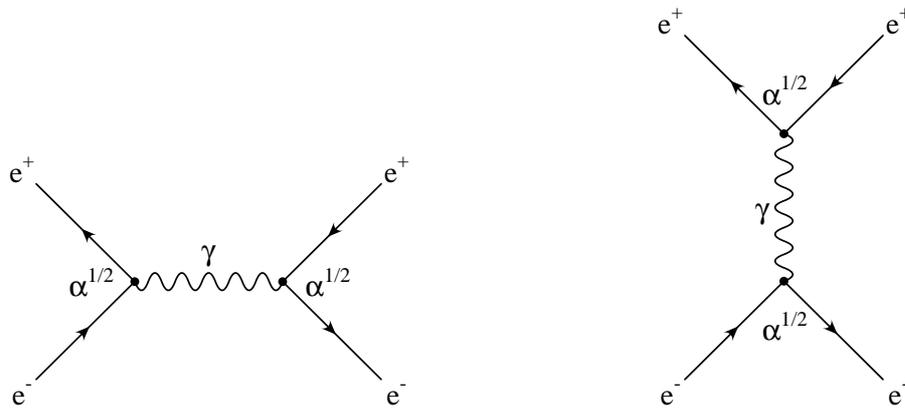
Für  $^{48}\text{Ca}$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 17^\circ &\Rightarrow R_1 = 4.00 \text{ fm} \\ \theta_2 = 30^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.93 \text{ fm} \\ \theta_3 = 45^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.75 \text{ fm} \end{aligned}$$

Als mittleren Radius erhält man  $R = 3.73 \text{ fm}$  für  $^{40}\text{Ca}$  und  $R = 3.89 \text{ fm}$  für  $^{48}\text{Ca}$ .

### Aufgabe 3: Feynman-Diagramme

- a) Es gibt zwei Feynman-Diagramme führender Ordnung in  $\alpha$  für die Reaktion  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  (Zeitachse nach rechts, Ortsachse nach oben):



Bei der Reaktion  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  gibt es nur einen Graphen führender Ordnung in  $\alpha$  und zwar den Annihilationsgraphen analog zum ersten Diagramm.

- b) Die Feynmandiagramme führender Ordnung in  $\alpha_W$  für  $\beta^-$ -Zerfall,  $\beta^+$ -Zerfall und Elektroneneinfang sind:

