

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 5

Musterlösungen

Aufgabe 1: Phasenraum beim β -Zerfall

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die Phasenraumdichte dn_i eines Teilchens i mit Impuls p_i im Volumen V gegeben ist durch

$$dn_i(p_i) = \frac{4\pi p_i^2 dp_i V}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1)$$

Die Gesamtenergie E ist die Summe der Energien von Elektron (bzw. Positron) und (Anti-)Neutrino:

$$E = E_e + E_\nu$$

Für eine beliebige aber fest vorgegebene Elektronenenergie ist $dE_e = 0$, d.h. $dE = dE_\nu$. Daraus folgt für den Phasenraumfaktor:

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{dn_\nu}{dE_\nu} dn_e \quad (2)$$

Mit Gleichung 1 erhält man für die Zustandsdichte der Neutrinos:

$$\frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{dE_\nu} \quad (3)$$

Der Neutrinoimpuls ist bei einer Neutrinomasse m_ν gegeben durch:

$$p_\nu = \frac{1}{c} \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{dp_\nu}{dE_\nu} = \frac{E_\nu}{p_\nu c^2} \quad (5)$$

Einsetzen von Gleichung 4 und 5 in Gleichung 3 ergibt:

$$\frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{p_\nu E_\nu}{c^2} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \cdot E_\nu \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \cdot E_\nu^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2}$$

Daraus folgt mit $E_\nu = E - E_e$ und Gleichung 1 für den Phasenraumfaktor (Gl. 2):

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4\hbar^6 c^3} p_e^2 (E - E_e)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E - E_e}\right)^2} dp_e$$

Für masselose Neutrinos vereinfacht sich die Formel zu:

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} p_e^2 (E - E_e)^2 dp_e$$

Nach Fermis goldener Regel unterscheidet sich das Impulsspektrum für massive Neutrinos also um einen energieabhängigen Faktor von dem Spektrum für masselose Neutrinos:

$$N_{m_\nu > 0}(p_e) dp_e = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E - E_e}\right)^2} \cdot N_{m_\nu = 0}(p_e) dp_e$$

Der Endpunkt des Spektrums hängt von der Neutrinomasse ab. Die maximale Elektronenergie ist $E_e^{max} = E - m_\nu c^2$. Für kleine Elektronenergien unterscheiden sich die Spektren für massive und masselose Neutrinos jedoch kaum. Aus der Abweichung des gemessenen Spektrums von Spektrum für $m_\nu = 0$ im Bereich $E_e \rightarrow E_e^{max}$ kann man also auf die Masse des Neutrinos schliessen.

Aufgabe 2: HERA-Kinematik

a) Der zwischen Elektron und Proton übertragene Viererimpuls ist

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

Daraus folgt für die Virtualität:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -\mathbf{q}^2 \\ &= -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \\ &= -\mathbf{k}^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}' - \mathbf{k}'^2 \\ &= -m_e^2 + 2(E_e E_e' - \vec{p}_e \vec{p}_e') - m_e^2 \\ &= -2m_e^2 + 2(E_e E_e' + p_e p_e' \cos \theta) \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Massen ist $m = 0$ und $p = E$. Dann gilt unter Verwendung von $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 2 E_e E_e' (1 + \cos \theta) \\ &= 4 E_e E_e' \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Für die Inelastizität ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\mathbf{k} - \mathbf{P}\mathbf{k}'}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \\ &= 1 - \frac{\mathbf{P}\mathbf{k}'}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{E_p E'_e - E_p E_e \cos \theta}{E_p E_e + E_p E_e} \\
&= 1 - \frac{E'_e}{2E_e} (1 - \cos \theta) \\
&= 1 - \frac{E'_e}{E_e} \sin^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

Im Ruhesystem des Protons ($\mathbf{P} = (m_p, 0, 0, 0)$) ist $\mathbf{P}\mathbf{q}$ gleich der vom Elektron übertragenen Energie $E_e^* - E_e^{*'}$ multipliziert mit der Protonenmasse m_p und $\mathbf{P}\mathbf{k}$ gleich der Energie des einlaufenden Elektrons E_e^* mal m_p . y ist also der relative Energieverlust des Elektrons im Proton-Ruhesystem.

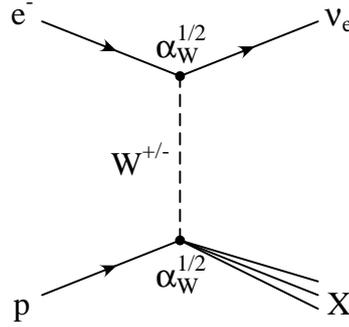
b) Bei Vernachlässigung der Massen gilt:

$$\begin{aligned}
s &= (\mathbf{P} + \mathbf{k})^2 = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{k} + \mathbf{k}^2 = 2\mathbf{P}\mathbf{k} \\
W^2 &= (\mathbf{P} + \mathbf{q})^2 = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = 2\frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}}\mathbf{P}\mathbf{k} - Q^2 = ys - Q^2 \\
x &= \frac{Q^2}{2\mathbf{P}\mathbf{q}} = \frac{Q^2}{2\frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}}\mathbf{P}\mathbf{k}} = \frac{Q^2}{ys}
\end{aligned}$$

c) Um die Energie und den Winkel des gestreuten Elektrons gut messen zu können, braucht man ein elektromagnetisches Kalorimeter mit guter Energie- und Ortsauflösung. Die Akzeptanz des Kalorimeters sollte möglichst groß sein. Einerseits sollen Elektronen bei kleinen Winkeln θ nachgewiesen werden, weil dies großen Werten von Q^2 und somit einer kleinen de-Broglie-Wellenlänge, also einer guten Auflösung entspricht. Andererseits haben die meisten Ereignisse einen großen Elektronwinkel, da der Wirkungsquerschnitt proportional zu $1/Q^4$ ist.

Um das gestreute Elektron von Photonen unterscheiden zu können, ist es hilfreich, eine Spurkammer vor dem Kalorimeter zu haben. Ein hadronisches Kalorimeter kann verwendet werden, um das gestreute Elektron von Hadronen zu unterscheiden.

d) Einerseits kann das gestreute Elektron außerhalb der Akzeptanz des Detektors sein oder das Elektron wird aufgrund einer Ineffizienz des Detektors nicht nachgewiesen. Andererseits kann das einlaufende Elektron mit dem Proton schwach wechselwirken, wobei ein W -Boson ausgetauscht wird und sich das Elektron in ein Neutrino umwandelt. Das Feynman-Diagramm dieses Prozesses entspricht dem für Elektroneneinfang:



Im Detektor wird das Neutrino nicht direkt nachgewiesen. Einen indirekten Nachweis hat man in der Regel dadurch, dass die transversalen Impulse aller rekonstruierten Teilchen im Endzustand sich nicht zu Null aufaddieren (“missing p_T ”), wie es im Anfangszustand der Fall ist.

- e) Falls das Elektron nicht im Detektor nachgewiesen wird, kann die Kinematik auch aus dem Viererimpuls des gestreuten Partons \mathbf{p}'_{parton} und des Protonrests \mathbf{P}'_{rest} rekonstruiert werden. Der Impulsübertrag ist dann gegeben durch:

$$q = (\mathbf{p}'_{parton} + \mathbf{P}'_{rest}) - \mathbf{P} = \mathbf{P}'_X - \mathbf{P} \quad \text{mit } \mathbf{P}'_X := \mathbf{p}'_{parton} + \mathbf{P}'_{rest}$$

Daraus folgt für die Inelastizität (z -Achse = Protonstrahlrichtung):

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathbf{P} \mathbf{q}}{\mathbf{P} \mathbf{k}} \\ &= \frac{\mathbf{P} \mathbf{P}'_X - \mathbf{P} \mathbf{P}}{\mathbf{P} \mathbf{k}} \\ &= \frac{E_p E'_X - E_p p'_{z,X}}{E_p E_e + E_p E_e} \\ &= \frac{E'_X - p'_{z,X}}{2E_e} \end{aligned}$$

Da man jedoch keine einzelnen Partonen beobachten kann, werden stattdessen die Impulse \mathbf{p}_i aller Teilchen i , die aus den Parton “entstehen” (hadronischer Endzustand genannt), aufaddiert:

$$\mathbf{P}'_X = \sum_i \mathbf{p}_i$$

Damit ergibt sich:

$$y = \frac{\sum_i (E_i - p_{z,i})}{2E_e}$$

Diese Formel zusammen mit der Formel

$$Q^2 = \frac{(\sum_i p_{x,i})^2 + (\sum_i p_{y,i})^2}{1 - y}$$

ist unter der Bezeichnung Jaquet-Blondel-Methode bekannt. Wie man an der Formel sieht, ist diese Bestimmung von y robust gegen Teilchen unter kleinem Winkel, die nicht rekonstruiert werden (z.B. Protonrest), weil in diesem Fall $E_i - p_{z,i} \approx 0$ ist.

Aufgabe 3: Bjorken-x und Partonimpulsanteil

Vor der Streuung hat das Parton den Viererimpuls $\xi\mathbf{P}$ und danach den Viererimpuls $\xi\mathbf{P} + \mathbf{q}$. Wenn das Parton die Masse m hat gilt:

$$m^2 = \mathbf{p}_{parton}^2 = (\xi\mathbf{P} + \mathbf{q})^2 = \xi^2\mathbf{P}^2 + 2\xi\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2$$

Mit $x = \frac{Q^2}{2\mathbf{P}\mathbf{q}}$ folgt:

$$\begin{aligned} m^2 &= \xi^2 M^2 + \xi \frac{Q^2}{x} - Q^2 \\ \Rightarrow \xi^2 + \frac{Q^2}{M^2 x} \xi - \frac{Q^2 + m^2}{M^2} &= 0 \\ \Rightarrow \xi &= -\frac{Q^2}{2M^2 x} \pm \sqrt{\left(\frac{Q^2}{2M^2 x}\right)^2 + \frac{Q^2 + m^2}{M^2}} \end{aligned}$$

Da ξ positiv sein muss, kommt nur die Lösung mit dem positiven Vorzeichen in Frage:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Q^2}{2M^2 x} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4M^4 x^2}{Q^4} \frac{Q^2 + m^2}{M^2}} \right] \\ &= \frac{Q^2}{2M^2 x} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4M^2 x^2}{Q^2} \left(1 + \frac{m^2}{Q^2}\right)} \right] \end{aligned}$$

Für tiefinelastische Streuung ($Q^2 \gg M^2$ und $Q^2 \gg m^2$) gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon &:= \frac{4M^2 x^2}{Q^2} \ll 1 \\ \epsilon' &:= \frac{m^2}{Q^2} \ll 1 \end{aligned}$$

Mit der Näherungsformel aus der Aufgabenstellung ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Q^2}{2M^2 x} \left[-1 + 1 + \frac{2M^2 x^2}{Q^2} \left(1 + \frac{m^2}{Q^2} - \frac{M^2 x^2}{Q^2}\right) \right] \\ &= \frac{Q^2}{2M^2 x} \left[\frac{2M^2 x^2}{Q^2} \left(1 + \frac{m^2 - M^2 x^2}{Q^2}\right) \right] \\ &= x \left(1 + \frac{m^2 - M^2 x^2}{Q^2}\right) \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $x = \xi$ für große Q^2 sehr gut erfüllt.