

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2011

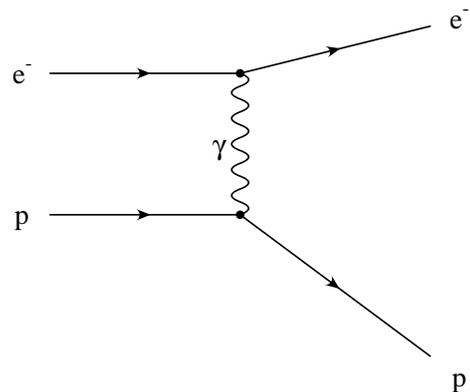
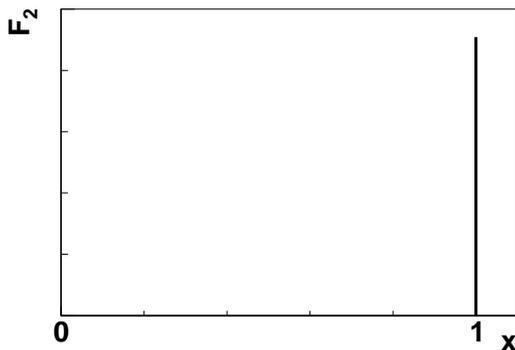
Übungsblatt Nr. 6

Musterlösungen

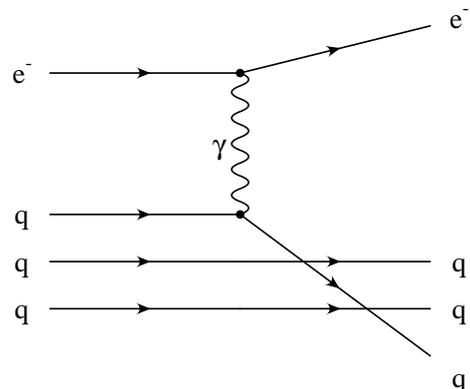
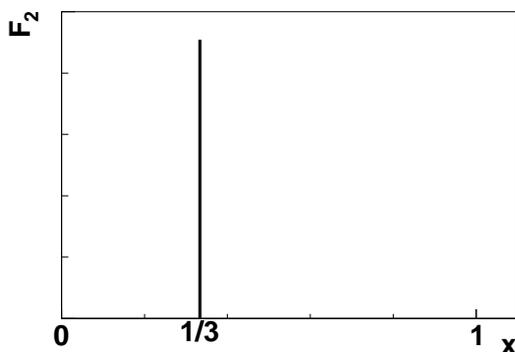
Aufgabe 1: Strukturfunktion

Die Strukturfunktion $F_2(x)$ ist durch die Impulsdichteverteilung der Partonen, an denen gestreut wird, bestimmt.

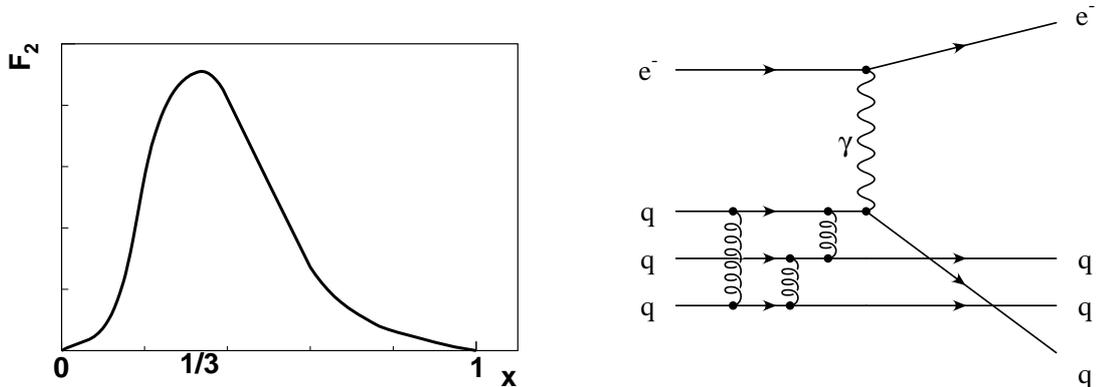
- a) Wenn das Proton ein elementares Teilchen ist, hat es keine Struktur und das an der Reaktion teilnehmende "Parton" trägt den gesamten Impuls des Protons, d.h. F_2 ist eine Deltafunktion bei $x = 1$.



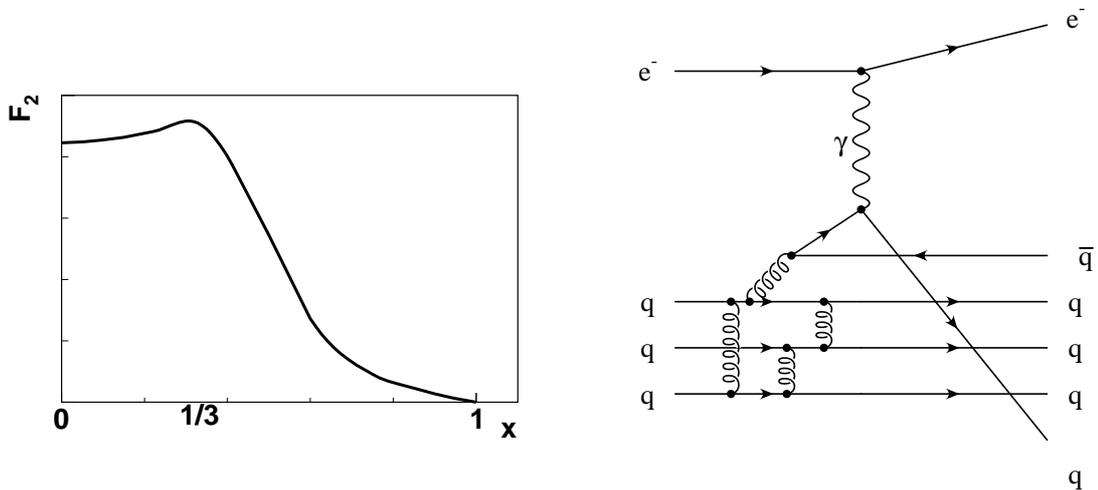
- b) Bei drei nicht wechselwirkenden Partonen trägt jedes davon jeweils ein Drittel des Protonimpulses.



- c) Durch die Wechselwirkung unter den Partonen wird die Impulsverteilung um $x = 1/3$ herum verschmiert.



- d) Dadurch, dass die Seequarks hinzukommen, die in der Regel einen kleinen Impulsanteil haben, gibt es einen zusätzlichen Beitrag zu F_2 bei kleinen x .



Aufgabe 2: Breit-Wigner-Resonanz

In der Nähe der Resonanz ($W \approx m$) ist $W + m \approx 2m$ und $W^2 \approx m^2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) &= \frac{\pi(2J+1)}{W^2} \cdot \frac{4m^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(W^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{W^2[(W+m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
 &\approx \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(2m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(W-m)^2 + \Gamma^2/4]}
 \end{aligned}$$

Mit dieser Formel ergibt sich für Σ_f :

$$\begin{aligned}
\Sigma_f &= \int \sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) dW \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \int \frac{1}{(W-m)^2 + \Gamma^2/4} dW \quad \text{Subst: } x = (W-m) \cdot 2/\Gamma \\
&= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \frac{2}{\Gamma} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= \frac{2\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2\Gamma} [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_f}{\Gamma}
\end{aligned}$$

Für Σ_{tot} folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{tot} &= \Sigma_{had} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{\mu\mu} \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot [\Gamma_{had} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu}] \\
&= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \Gamma_{ee}
\end{aligned}$$

Da das J/ψ -Teilchen den Spin $J = 1$ hat ergibt sich daraus für die partielle Zerfallsbreite in Elektronen:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{tot} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \Gamma_{ee} \\
\Rightarrow \Gamma_{ee} &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \Sigma_{tot}
\end{aligned}$$

Die totale Breite ergibt sich aus:

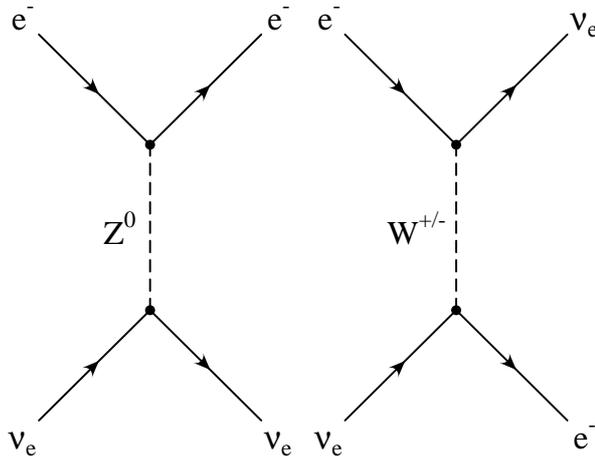
$$\begin{aligned}
\Sigma_{ee} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Gamma} \\
\Rightarrow \Gamma &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Sigma_{ee}} = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}^2}{\Sigma_{ee}}
\end{aligned}$$

Für die partielle Zerfallsbreite Γ_f erhält man:

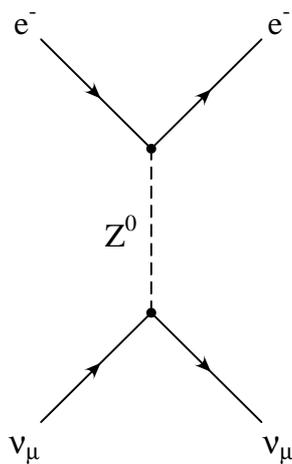
$$\begin{aligned}
\Sigma_f &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot \Gamma_f \\
\Rightarrow \Gamma_f &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma_{ee}} \cdot \Sigma_f = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}}{\Sigma_{ee}} \cdot \Sigma_f
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Neutrino-Streuprozesse

a) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$



b) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$



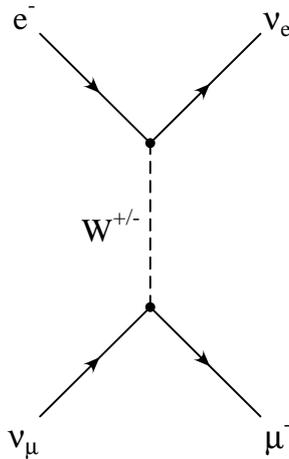
c) $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 1$ und $L_\mu = -1$.

d) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = 2$ und $L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 0$ und $L_\mu = 2$.

e) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$



Aufgabe 4: Kaon-Zerfall und Goldene Regel

Im Ruhesystem des Kaons ist aufgrund der Impulserhaltung $|p_l| = |p_\nu| =: p$. Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\begin{aligned}
 E_0 &:= m_K = E_\nu + E_l = p + \sqrt{p^2 + m_l^2} \\
 \Rightarrow (m_K - p)^2 &= m_K^2 - 2m_K p + p^2 = p^2 + m_l^2 \\
 \Rightarrow p &= \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich für die Energie des Leptons:

$$\begin{aligned}
 E_l &= \sqrt{p^2 + m_l^2} \\
 &= \frac{1}{2m_K} \sqrt{m_K^4 - 2m_K^2 m_l^2 + m_l^4 + 4m_K^2 m_l^2} \\
 &= \frac{1}{2m_K} \sqrt{(m_K^2 + m_l^2)^2} \\
 &= \frac{m_K^2 + m_l^2}{2m_K}
 \end{aligned}$$

Aus Impuls und Energie lässt sich die Geschwindigkeit berechnen:

$$\beta_l = \frac{v_l}{c} = \frac{p}{E_l} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \cdot \frac{2m_K}{m_K^2 + m_l^2} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{m_K^2 + m_l^2}$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Matrixelementquadrate:

$$\frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} = \frac{1 - \beta_e}{1 - \beta_\mu} = \frac{(m_K^2 + m_e^2 - m_K^2 + m_e^2)/(m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 + m_\mu^2 - m_K^2 + m_\mu^2)/(m_K^2 + m_\mu^2)} = \frac{m_e^2 m_K^2 + m_\mu^2}{m_\mu^2 m_K^2 + m_e^2} = 2.45 \cdot 10^{-5}$$

Die Zustandsdichte ist proportional zu $p^2 dp/dE_0$ mit $E_0 = E_\nu + E_l = m_K$. Aus Gleichung 1 ergibt sich:

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{d}{dE_0} \frac{E_0^2 - m_l^2}{2E_0} = \frac{d}{dE_0} \frac{1}{2} \left(E_0 - \frac{m_l^2}{E_0} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_l^2}{E_0^2} \right)$$

Mit $E_0 = m_K$ folgt:

$$p^2 \frac{dp}{dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2}{4m_K^2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_l^2}{m_K^2} \right) = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_l^2)}{8m_K^4}$$

Das Verhältnis der Zustandsdichten ist also:

$$\frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = \frac{p_e^2 dp_e/dE_0}{p_\mu^2 dp_\mu/dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 - m_\mu^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_\mu^2)} = 1.05$$

Damit erhält man für das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten:

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+\nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu)} = \frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} \cdot \frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = 2.57 \cdot 10^{-5}$$

Da das Verzweungsverhältnis proportional zur partiellen Zerfallsbreite ist, ist dieser Wert zu vergleichen mit

$$\frac{\mathcal{B}(K^+ \rightarrow e^+\nu_e)}{\mathcal{B}(K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu)} = \frac{1.55 \cdot 10^{-5}}{0.6343} = 2.44 \cdot 10^{-5}.$$

Die Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert ist also recht gut.