Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 9 Musterlösungen

Aufgabe 1: K^0-Erzeugung

a) Im Anfangszustand ist die Baryonenzahl $B = 1$ und die Strangeness $S = 0$. Da beide Größen in der starken Wechselwirkung erhalten bleiben und das K^0-Meson $B = 0$ und $S = +1$ hat, muss mindestens noch ein weiteres Teilchen mit $B = 1$ und $S = -1$ erzeugt werden. Dies ist durch folgende Reaktion erfüllt:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \rightarrow \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}]$$

Wie in Aufgabe 7.3 ergibt sich aus dem Ansatz

$$s = (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2$$

mit $\sqrt{s} = m_\Lambda + m_{K^0}$ der minimale Pion-Impuls:

$$p_\pi = \sqrt{\frac{(s - m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4m_p^2} - m_\pi^2} = 899 \text{ MeV}$$

b) Das $\bar{K}^0$-Meson hat $B = 0$ und $S = -1$. Da Baryonen keine Antiquarks und somit auch keine $\bar{s}$-Quarks mit $S = +1$ enthalten, gibt es kein Teilchen mit $B = 1$ und $S = +1$. Um $\bar{K}^0$-Mesonen zu erzeugen, müssen also neben dem $\bar{K}^0$ mindestens zwei weitere Teilchen erzeugt werden, damit Baryonenzahl und Strangeness erhalten sind. Folgende Reaktion erfüllt die Erhaltungssätze:

$$\pi^-[\bar{u}d] + p[uud] \rightarrow n[udd] + K^0[d\bar{s}] + \bar{K}^0[\bar{d}s]$$

Analog zu Teil a) ergibt sich mit $\sqrt{s} = m_n + 2m_{K^0}$ als minimaler Impuls des Pions:

$$p_\pi = 1509 \text{ MeV}$$

Aufgabe 2: K^0-Oszillation

a) Für die Wellenfunktion von K^0- und $\bar{K}^0$-Mesonen folgt mit dem Ansatz aus der Aufgabenstellung und den Beziehungen $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - \left|\bar{K}^0\right\rangle\right)$ und $|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + \left|\bar{K}^0\right\rangle\right)$:

$$\begin{aligned}
\left|K^0\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_S^0\right\rangle + \left|K_L^0\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} + A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2}\right) \\
\left|\bar{K}^0\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_S^0\right\rangle - \left|K_L^0\right\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} - A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2}\right)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Anzahl von K^0- bzw. $\bar{K}^0$-Mesonen:

$$\begin{aligned}
N_{K^0}(t) &= \left\langle K^0 \,\middle|\, K^0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
&\quad + A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S+\Gamma_L)t/2} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S-m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S+\Gamma_L)t/2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
&\quad + [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S-m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S-m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}\Big) \\
N_{\bar{K}^0}(t) &= \left\langle \bar{K}^0 \,\middle|\, \bar{K}^0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
&\quad - [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S-m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S-m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t}\Big)
\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $N_{K^0} = N_0$ und $N_{\bar{K}^0} = 0$:

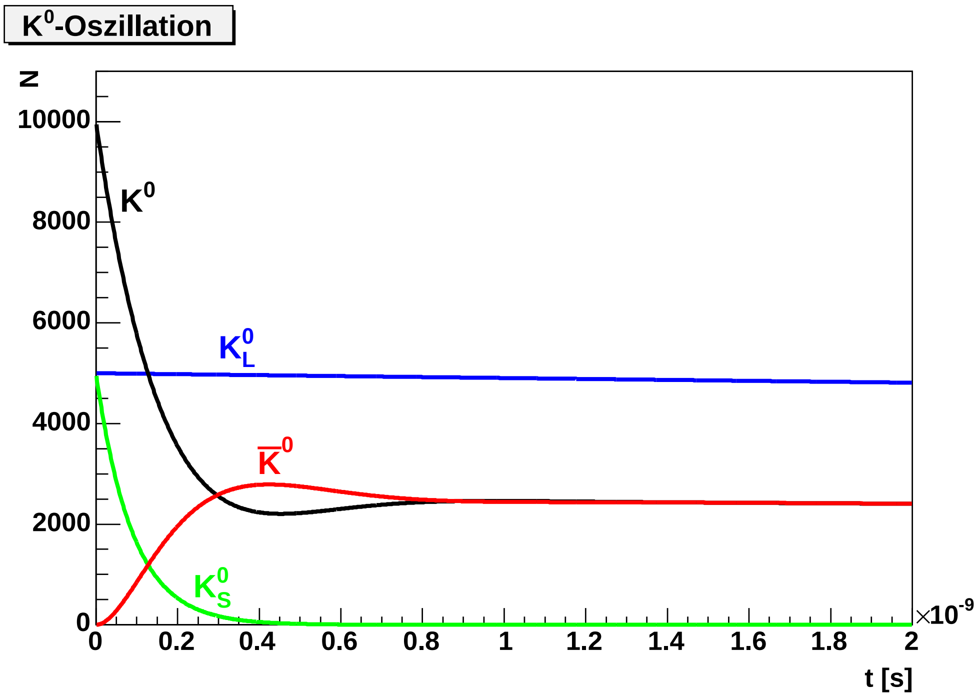
$$\begin{aligned}
0 &= N_{\bar{K}^0}(t=0) = \frac{1}{2}\left(A_S^* A_S + A_L^* A_L - [A_S^* A_L + A_L^* A_S]\right) \\
&= \frac{1}{2}(A_S - A_L)^* \cdot (A_S - A_L) = \frac{1}{2}|A_S - A_L|^2 \\
&\Rightarrow A_L = A_S \\
N_0 &= N_{K^0}(t=0) = \frac{1}{2}\left(A_S^* A_S + A_L^* A_L + [A_S^* A_L + A_L^* A_S]\right) \\
&= \frac{1}{2}(A_S + A_L)^* \cdot (A_S + A_L) = \frac{1}{2}|A_S + A_L|^2 = \frac{1}{2}|2A_S|^2 \\
&\Rightarrow A_S = A_L = \sqrt{\frac{N_0}{2}} \cdot e^{i\phi}
\end{aligned}$$

Die Phase ϕ kann willkürlich gewählt werden. Als Anzahl der verschiedenen neutralen Kaonen erhält man:

$$\begin{aligned}
N_{K_S^0}(t) &= \left\langle K_S^0 \,\middle|\, K_S^0 \right\rangle = A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} \\
&= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\
N_{K_L^0}(t) &= \left\langle K_L^0 \,\middle|\, K_L^0 \right\rangle = A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N_0}{2}\, e^{-\Gamma_L t} \\
N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + \left[e^{i(m_S-m_L)t} + e^{-i(m_S-m_L)t}\right]\cdot e^{-\Gamma t}\right) \\
&= \frac{N_0}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2\cos(\Delta m\, t)\, e^{-\Gamma t}\right) \\
N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - \left[e^{i(m_S-m_L)t} + e^{-i(m_S-m_L)t}\right]\cdot e^{-\Gamma t}\right) \\
&= \frac{N_0}{4}\left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2\cos(\Delta m\, t)\, e^{-\Gamma t}\right)
\end{aligned}
$$

b)



Für die Strecke x, die in einer Zeit von $t = 2\cdot 10^{-9}$ s zurückgelegt wird, gilt:

$$x = v\gamma t = \beta\gamma c t = \frac{p}{mc} c t = 120.5 \text{ cm}$$

Aufgabe 3: K^0-Regeneration

Die Strecke $x = 100$ cm entspricht folgender Zeit t:

$$t = \frac{mc}{p}\frac{x}{c} = 1.66\cdot 10^{-9} \text{ s}$$

Mit den Formeln aus Aufgabe 2 erhält man:

$$N_{K_S^0} = 4\cdot 10^{-5}$$

$$
\begin{aligned}
N_{K_L^0} &= 4842.9 \\
N_{K^0} &= 2421.1 \\
N_{\bar{K}^0} &= 2421.8
\end{aligned}
$$

D.h. praktisch alle K_S^0 sind zerfallen und man kann folgende Näherung machen:

$$
N_{K_S^0} = 0 \quad , \quad N_{K^0} = N_{\bar{K}^0} = N_{K_L^0}/2
$$

Daraus folgt für die Wellenfunktionen:

$$
0 = \left|K_S^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K^0\right\rangle - \left|\bar{K}^0\right\rangle\right) \quad \Rightarrow \quad \left|K^0\right\rangle = \left|\bar{K}^0\right\rangle
$$

Durch die Absorption im Target wird die Intensität des Kaon-Strahls exponentiell abgeschwächt. Bei einer Flächendichte n und einem Wirkungsquerschnitt σ reduziert sich die Intensität um den Faktor $e^{-\sigma n}$. Die Amplitude der Wellenfunktion reduziert sich also um den Faktor $e^{-\sigma n/2}$. Dieser Faktor ist unterschiedlich für K^0- und $\bar{K}^0$-Mesonen:

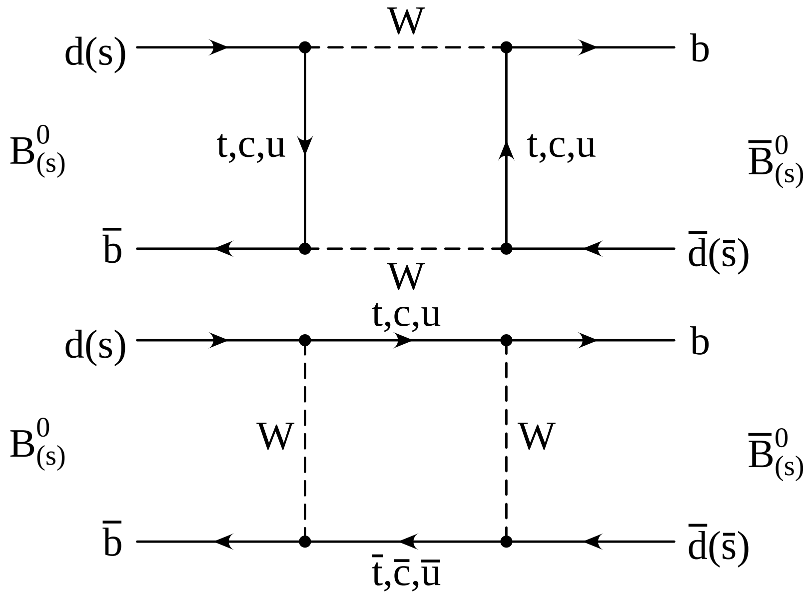
$$
\begin{aligned}
\left|K^0\right\rangle' &= f\left|K^0\right\rangle \qquad & f &= e^{-\sigma(K^0 N)n/2} = 0.368 \\
\left|\bar{K}^0\right\rangle' &= \bar{f}\left|\bar{K}^0\right\rangle \qquad & \bar{f} &= e^{-\sigma(\bar{K}^0 N)n/2} = 0.082
\end{aligned}
$$

Damit erhält man folgende Anzahlen von Kaonen direkt hinter dem Absorber:

$$
\begin{aligned}
N'_{K^0} &= {}'\left\langle K^0 \middle| K^0\right\rangle' = f^2\left\langle K^0 \middle| K^0\right\rangle = f^2 N_{K^0} = f^2\frac{N_{K_L^0}}{2} = 327.7 \\
N'_{\bar{K}^0} &= {}'\left\langle \bar{K}^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle' = \bar{f}^2\left\langle \bar{K}^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle = \bar{f}^2 N_{\bar{K}^0} = \bar{f}^2\frac{N_{K_L^0}}{2} = 16.3 \\
N'_{K_S^0} &= {}'\left\langle K_S^0 \middle| K_S^0\right\rangle' \\
&= \frac{1}{2}\left(f^2\left\langle K^0 \middle| K^0\right\rangle + \bar{f}^2\left\langle \bar{K}^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle - f\bar{f}\left\langle K^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle - f\bar{f}\left\langle \bar{K}^0 \middle| K^0\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}(f^2 + \bar{f}^2 - 2f\bar{f})\,\frac{N_{K_L^0}}{2} = (f - \bar{f})^2\,\frac{N_{K_L^0}}{4} = 98.9 \\
N'_{K_L^0} &= {}'\left\langle K_L^0 \middle| K_L^0\right\rangle' \\
&= \frac{1}{2}\left(f^2\left\langle K^0 \middle| K^0\right\rangle + \bar{f}^2\left\langle \bar{K}^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle + f\bar{f}\left\langle K^0 \middle| \bar{K}^0\right\rangle + f\bar{f}\left\langle \bar{K}^0 \middle| K^0\right\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}(f^2 + \bar{f}^2 + 2f\bar{f})\,\frac{N_{K_L^0}}{2} = (f + \bar{f})^2\,\frac{N_{K_L^0}}{4} = 245.1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: B^0-Oszillation

a) Analog zur K^0-Mischung wird die B^0- und die B_s^0-Oszillation durch Boxdiagramme beschrieben:



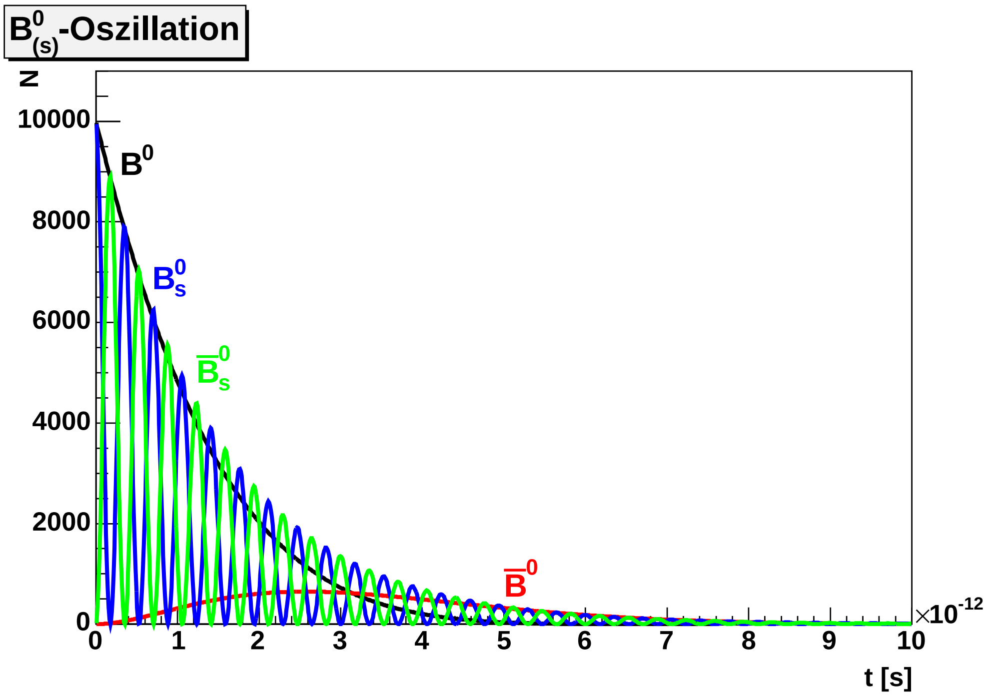
b) Mit $\Gamma = \Gamma_S = \Gamma_L = 1/\tau$ vereinfachen sich die Formeln aus Aufgabe 2 zu:

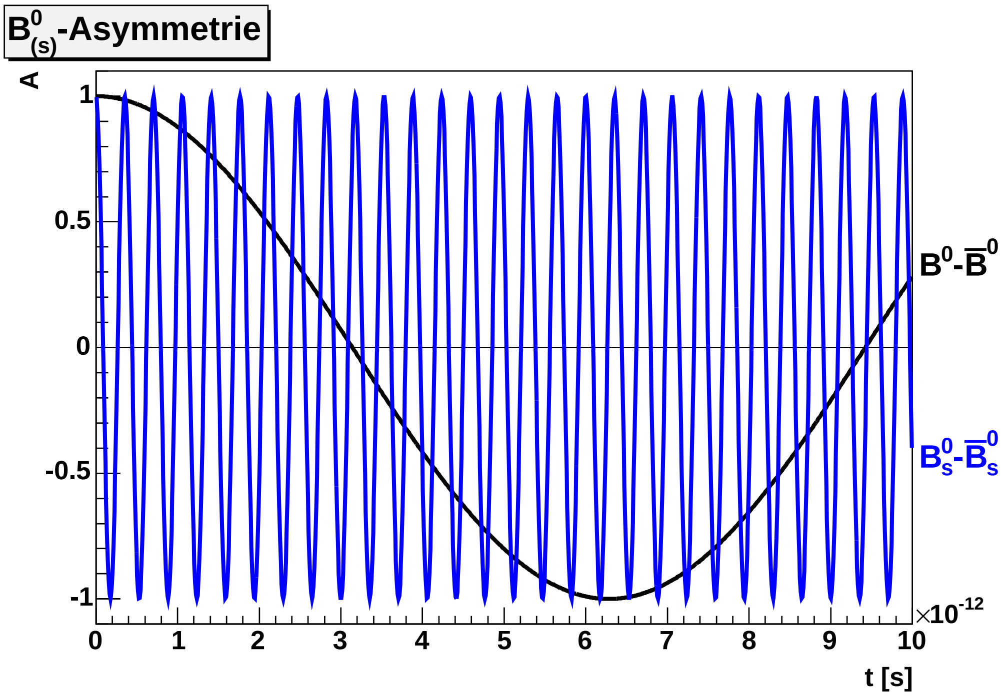
$$\begin{aligned} N_{B^0_{(s)}}(t) &= \frac{N_0}{2}\left[1+\cos(\Delta m_{(s)}\, t)\ \right] e^{-\Gamma t} \\ N_{\bar{B}^0_{(s)}}(t) &= \frac{N_0}{2}\left[1-\cos(\Delta m_{(s)}\, t)\ \right] e^{-\Gamma t} \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Asymmetrie:

$$A(t) = \frac{\frac{N_0}{2}[1+\cos(\Delta m_{(s)}\, t) - 1 + \cos(\Delta m_{(s)}\, t)]\, e^{-\Gamma t}}{\frac{N_0}{2}[1+\cos(\Delta m_{(s)}\, t) + 1 - \cos(\Delta m_{(s)}\, t)]\, e^{-\Gamma t}} = \cos(\Delta m_{(s)}\, t)$$

c) Die B^0_s-Oszillation hat eine wesentlich höhere Frequenz als die B^0-Oszillation. Die ist der hauptsächliche Grund, weshalb die Messung der B^0_s-Oszillation so schwierig ist.





Die Strecke $x_{(s)}$, die bei einem Impuls p einer Periodendauer $T_{(s)}$ entspricht, ist gegeben durch:

$$x_{(s)} = \beta\gamma c T_{(s)} = \frac{p}{m_{(s)}c}\, c\, \frac{2\pi}{\omega_{(s)}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt mit $\omega_{(s)} = \Delta m_{(s)}$ eine Strecke von $x = 3.6$ mm für die B^0-Oszillation und $x_s = 100$ μm für die B^0_s-Oszillation.