Übungen Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 10 Bearbeitung bis 07.07.2011

Aufgabe 1: Fermigas-Modell (5 Punkte)

Die Anzahl der Zustände dn im Impulsintervall $[p, p + dp]$ ist im Fermigas-Modell für wechselwirkungsfreie Teilchen bei Temperatur $T = 0$ gegeben durch

$$\frac{dn}{dp} = V \frac{p^2}{2\hbar^3\pi^2},$$

wobei V das Volumen im Ortsraum ist.

a) Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie E_F unabhängig von der Massenzahl A ist, unter der Annahme, dass der Kernradius durch $R = r_0 A^{1/3}$ gegeben ist. Berechnen Sie dazu zunächst die Zustandsdichte in Abhängigkeit der Energie unter Verwendung der klassischen Energie-Impuls-Relation und dann die Fermi-Energie als Funktion von r_0. Berücksichtigen Sie die Entartung durch Spin und Isospin und nehmen Sie an, dass der Kern symmetrisch ist ($N = Z$). Welchen Wert erhält man für $r_0 = 1.3$ fm?

b) Geben Sie den Fermi-Impuls für einen symmetrischen Kern als Funktion von r_0 an. Berechen Sie den Fermi-Impuls für $r_0 = 1.3$ fm. Kann sich ein Nukleon aufgrund der Unschärferelation überhaupt im Kern aufhalten, wenn man als Impulsunschärfe den Fermi-Impuls annimmt? Ist die nicht-relativistische Nährung gerechtfertigt?

c) Um welchen Faktor ändert sich die Fermi-Energie für Protonen und Neutronen, wenn $N \neq Z$ ist? Geben Sie eine Formel für die Gesamtenergie als Funktion von A, N und Z an. Konstanten müssen dabei nicht explizit ausgerechnet werden.

d) Zeigen Sie qualitativ, dass sich aus der Formel für die Gesamtenergie der Asymmetrieterm der Weizsäcker-Massenformel herleiten lässt, indem Sie eine Taylorentwicklung der Gesamtenergie in der Differez $\Delta = N - Z$ durchführen.

e) Berechnen Sie die Differenz aus der Fermi-Energie der Neutronen und Protonen für ^{208}Pb. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Coulombbeitrag pro Proton in der Weizsäcker-Massenformel.

Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion (3 Punkte)

Näherungsweise kann das Potential von Proton und Neutron im Deuteron durch ein zentralsymmetrisches Kastenpotential der Tiefe $-V_0$ und Radius $r_0 \approx 1.4$ fm beschrieben werden:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \text{ für } r < r_0 \\ 0 \text{ für } r > r_0 \end{cases}$$

Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung für den Grundzustand ($l = 0$) des Deuterons:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)u = 0 \qquad \psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0$$

Was muss hier als Masse m eingestezt werden? Lösen Sie die Gleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$ unter den Randbedingungen $u(r = 0) = 0$ und $u(r \to \infty) = 0$ und benutzen Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion und deren Ableitung, um die Tiefe des Potentials abzuschätzen. Gehen Sie von der Näherung aus, dass die Bindungsenergie $B = 2.25$ MeV viel kleiner als V_0 ist. Ist diese Näherung gerechtfertigt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Nukleonen bei einem Radius $r < r_0$ aufhalten?