Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2011

Übungsblatt Nr. 10 Musterlösungen

Aufgabe 1: Fermigas-Modell

a) Mit der klassischen Energie-Impuls-Relation

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dE} = \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

erhält man

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp}\frac{dp}{dE} = V\frac{p^2}{2\hbar^3\pi^2}\sqrt{\frac{m}{2E}} = V\frac{\sqrt{2m^3E}}{2\hbar^3\pi^2}.$$

Für ein Volumen von $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ ergibt sich man dann

$$\frac{dn}{dE} = \frac{2\sqrt{2m^3}r_0^3 A}{3\hbar^3\pi}\sqrt{E} = CA\sqrt{E} \quad \text{mit} \quad C := \frac{2\sqrt{2m^3}r_0^3}{3\hbar^3\pi}.$$

Integration bis zur Fermi-Energie gibt

$$n = \int_0^{E_F}\frac{dn}{dE}dE = \int_0^{E_F} CA\sqrt{E}dE = CA\left[\frac{2}{3}E^{\frac{3}{2}}\right]_0^{E_F} = \frac{2}{3}CAE_F^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt für die Fermi-Energie

$$E_F = \left(\frac{3n}{2CA}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{1}$$

Da es zwei Spin- und zwei Isospin-Zustände gibt, ist $A = 4n$, so dass

$$E_F = \left(\frac{3}{8C}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9\sqrt{2}\pi}{32}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\hbar^2}{mr_0^2}.$$

Für $r_0 = 1.3$ fm ergibt sich

$$E_F \approx 28 \text{ MeV}.$$

b) Für den Fermi-Impuls gilt

$$p_F = \sqrt{2mE_F} = \sqrt{2m}\left(\frac{3}{8C}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2mE_F}\left(\frac{9\pi\hbar^3}{16\sqrt{2m^3}r_0^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\hbar}{r_0} \approx 1.5\frac{\hbar}{r_0}.$$

Für $r_0 = 1.3$ fm erhält man

$$p_F \approx 231 \text{ MeV}.$$

Die nach der Unschärferelation benötigte Ausdehnung Δx ist für $\Delta p = p_F$ gegeben durch

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{p_F} \approx \frac{r_0}{1.5}.$$

Die Nukleonen haben also genug Platz im Kern.

Der Gamma-Faktor bei der Fermi-Energie ist

$$\gamma = 1 + \frac{E}{mc^2} \approx 1.03,$$

woraus $v/c \approx 0.24$ folgt. D.h. die klassische Näherung ist gerechtfertigt.

c) Bei N Neutronen gibt es $n = N/2$ Zustandsniveaus. Da für einen symmetrischen Kern $n = A/4$ ist, folgt aus Formel (1) für die Fermi-Energie der Neutronen

$$E_{F,n} = E_F\left(\frac{2N}{A}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{2}$$

Analog gilt für Protonen

$$E_{F,p} = E_F\left(\frac{2Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Die Gesamtenergie für die Neutronen ergibt sich aus der Integration der Energie über die Neutronendichte (mit zwei Spinzuständen pro Niveau):

$$E_{tot,n} = \int_0^{E_{F,n}} 2E\frac{dn}{dE}dE = \int_0^{E_{F,n}} 2CAE^{\frac{3}{2}}dE = \frac{4}{5}CAE_{F,n}^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}CAE_F^{\frac{5}{2}}\left(\frac{2N}{A}\right)^{\frac{5}{3}}.$$

Mit der analogen Formel für die Gesamtenergie der Protonen erhält man

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{tot,n} + E_{tot,p} = \frac{4}{5}CAE_F^{\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{2N}{A}\right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{2Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}}\right] \\ &= \frac{2^{\frac{11}{3}}}{5}CE_F^{\frac{5}{2}}A^{-\frac{2}{3}}\left(N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}\right) = C'A^{-\frac{2}{3}}\left(N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}\right) \quad \text{mit} \quad C' := \frac{2^{\frac{11}{3}}}{5}CE_F^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

d) Mit $\Delta = N - Z$ (und $A = N + Z$) gilt

$$N = \frac{A - \Delta}{2}, \quad Z = \frac{A + \Delta}{2}.$$

Draus folgt

$$E_{tot} = 2^{-\frac{5}{3}} C' A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{\frac{5}{3}} + (A-\Delta)^{\frac{5}{3}} \right) = C_0 A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{\frac{5}{3}} + (A-\Delta)^{\frac{5}{3}} \right).$$

Die erste und zweite Ableitung nach Δ sind:

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{tot}}{d\Delta} &= \frac{5}{3} C_0 A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{\frac{2}{3}} - (A-\Delta)^{\frac{2}{3}} \right) = C_1 A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{\frac{2}{3}} - (A-\Delta)^{\frac{2}{3}} \right), \\
\frac{d^2 E_{tot}}{d\Delta^2} &= \frac{10}{9} C_0 A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{-\frac{1}{3}} + (A-\Delta)^{-\frac{1}{3}} \right) = C_2 A^{-\frac{2}{3}} \left((A+\Delta)^{-\frac{1}{3}} + (A-\Delta)^{-\frac{1}{3}} \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Taylorentwicklung in Δ

$$E_{tot} = A^{-\frac{2}{3}} \left[C_0 (A^{\frac{5}{3}} + A^{\frac{5}{3}}) + C_1 (A^{\frac{2}{3}} - A^{\frac{2}{3}}) \Delta + \frac{1}{2} C_2 (A^{-\frac{1}{3}} + A^{-\frac{1}{3}}) \Delta^2 + ... \right]$$

Der erste Term ist konstant und der zweite ist Null. Der dritte Term liefert den Asymmetrieterm in der Weizsäcker-Massenformel:

$$E_{asym} = \frac{1}{2} C_2 A^{-\frac{2}{3}} (A^{-\frac{1}{3}} + A^{-\frac{1}{3}}) \Delta^2 = C_2 A^{-1} (N-Z)^2 = C_2 \frac{(A-2Z)^2}{A}.$$

e) Bei ^{208}Pb ist $Z = 82$ und $N = 126$. Mit den Gleichungen (2) und (3) erhält man

$$E_{F,n} = 32.4 \text{ MeV}, \quad E_{F,p} = 24.3 \text{ MeV},$$

Draus folgt

$$\Delta E = E_{F,n} - E_{F,p} = 8.1 \text{ MeV}.$$

Der Coulombterm in Weizsäcker-Massenformel ist

$$E_C = a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = 800 \text{ MeV}.$$

Pro Proton ergibt sich also ein Wert von

$$\frac{E_C}{Z} = 9.8 \text{ MeV},$$

was in etwa mit der Differenz der Potentialtopftiefen von Neutronen und Protonen übereinstimmt.

Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion

Die Masse m ist die reduzierte Masse also die halbe Nukleonmasse:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_p/2$$

Für $r < r_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u = 0 \qquad (E + V_0 > 0,\ u(r = 0) = 0) \\
\Rightarrow \quad & u_1(r) = A_1 \sin kr \quad \text{ mit } k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar
\end{aligned}$$

Für $r > r_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}Eu = 0 \qquad (E < 0 \text{ da gebundener Zustand, } u(r \to \infty) = 0) \\
\Rightarrow \quad & u_2(r) = A_2 e^{-\kappa r} \quad \text{ mit } \kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar
\end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ und $\frac{d}{dr}u_1(r_0) = \frac{d}{dr}u_2(r_0)$ folgt

$$\begin{aligned}
A_1 \sin kr_0 &= A_2 e^{-\kappa r_0} \\
A_1 k \cos kr_0 &= -A_2 \kappa e^{-\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Durch Division der zweiten durch die erste Gleichubg erhält man:

$$k \cot kr_0 = -\kappa$$

Da die Wellenfunktion im Grundzustand keine Knoten hat, muss $kr_0 < \pi$ sein. Wenn die Bindungsenergie $B = -E$ viel kleiner als V_0 ist, so ist auch $\kappa \ll k$. Daraus folgt

$$\cot kr_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad kr_0 \approx \frac{\pi}{2}$$

Einsetzen von k ergibt

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \cdot r_0 = \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow \quad & 2m(-B + V_0) = \frac{\pi^2\hbar^2}{4r_0^2} \\
\Rightarrow \quad & V_0 = B + \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \approx \frac{\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} \\
\Rightarrow \quad & V_0 = 54.5 \text{ MeV} \quad \text{ bzw. } \quad V_0 \approx 52.2 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $B \ll V_0$ gerechtfertigt.

Die Wahrscheinlichkeit P, dass sich die Nukleonen in einem Volumen V, das durch die Radien r_a und r_b begrenzt ist, aufhalten, ist gegeben durch:

$$P = \int_V \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})\, d^3r = 4\pi \int_{r_a}^{r_b} \psi^*(r)\psi(r)\, r^2 dr = \int_{r_a}^{r_b} u^2(r)\, dr$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sind also:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \int_0^{r_0} u_1^2(r)\, dr = A_1^2 \int_0^{r_0} \sin^2 kr\, dr \quad \text{Subst: } r = \frac{x}{k}, \quad kr_0 = \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{A_1^2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{A_1^2}{k}\frac{\pi}{4} \\
P_2 &= \int_{r_0}^{\infty} u_2^2(r)\, dr = A_2^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\kappa r}\, dr = A_2^2 \left[-\frac{1}{2\kappa}e^{-2\kappa r}\right]_{r_0}^{\infty} = \frac{A_2^2}{2\kappa}e^{-2\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ kann mit der Näherung $kr_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Beziehung zwischen den Normierungen A_1 und A_2 hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
& u_1(r_0) = A_1 \sin kr_0 = A_1 \\
= \;& u_2(r_0) = A_2 e^{-\kappa r_0} \\
\Rightarrow \;& A_2 = A_1 e^{\kappa r_0}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für P_2:

$$P_2 = \frac{A_1^2 e^{2\kappa r_0}}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} = \frac{A_1^2}{2\kappa}$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, gilt:

$$1 = P_1 + P_2 = A_1^2\left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right) \quad \Rightarrow \quad A_1^2 = \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right)^{-1}$$

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit P_1, dass sich die Nukleonen innerhalb des Radius des Kastenpotentials aufhalten:

$$P_1 = \frac{\pi}{4k\left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi\kappa}} = 0.25$$

Obwohl Proton und Neutron ein gebundenes System bilden, halten sie sich also überwiegend ausserhalb des bindenden Potentialtopfes auf.