

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 1

Bearbeitung bis 23.04.2014, 9:45 Uhr

Webseite mit Anmeldeformular:

<http://www.physik.kit.edu/Tutorium/SS14/Physik6/>

Webseite mit weiteren Informationen:

https://ilias.studium.kit.edu/goto_produktiv_crs_318855.html

Anmelden mit dem KIT Account.

Aufgabe 1: Relativistische Kinematik, Beschleuniger

(3 Punkte)

- a) Ein Linearbeschleuniger für Protonen wird mit einer konstanten Frequenz von $\nu = 200$ MHz betrieben. Welche Länge muss die Driftröhre an dem Ort haben, an dem die Protonen eine kinetische Energie von 1 MeV, 100 MeV, 10 GeV haben?
- b) Bei einem Synchrotron müssen die Generatorfrequenz und das Magnetfeld an die Energie der relativistisch beschleunigten Teilchen angepasst werden, um sie auf einer Kreisbahn mit konstantem Radius R zu halten. Wie hängen die Frequenz und das Magnetfeld von der Energie der Teilchen (Masse m , Ladung e) ab?
- c) Berechnen Sie die Schwerpunktsenergie von Teilchenreaktionen an folgenden Beschleunigern:

Beschleuniger	Teilchen	Energien
LEP 2	e^+e^-	$E_{e^+} = E_{e^-} = 103$ GeV
KEKB	e^+e^-	$E_{e^+} = 3.5$ GeV, $E_{e^-} = 8$ GeV
HERA	ep ep	$E_e = 27.5$ GeV, $E_p = 920$ GeV $E_e = 27.5$ GeV, p in Ruhe
Tevatron	$p\bar{p}$	$E_p = E_{\bar{p}} = 980$ GeV
LHC	pp $^{208}_{82}\text{Pb } ^{208}_{82}\text{Pb}$ (Kerne)	$E_p = 3.5$ TeV $E = 2.76$ TeV pro Nukleon

Welche Näherung kann man bei diesen Energien machen?

Wie hoch müßte die Energie eines Bleikerns sein, wenn in einer Reaktion mit einem stationären Bleikern dieselbe Schwerpunktsenergie erreicht werden soll wie bei PbPb-Kollisionen bei LHC?

Aufgabe 2: Synchrotronstrahlung

(2 Punkte)

Die Leistung, die ein relativistisch beschleunigtes Teilchen der Masse m , Ladung q und Energie E abstrahlt, ist:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 - \left(\vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right].$$

Zeigen Sie, dass ein auf einer Kreisbahn mit Radius R umlaufendes Teilchen mit Ladung $q = e$ pro Umlauf die Energie

$$\Delta E [\text{MeV}] = 6.02 \cdot 10^{-15} \frac{\beta^3}{R[\text{m}]} \cdot \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$$

verliert. Hinweis: $e^2/\hbar c = \alpha = 1/137$, $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$

Berechnen Sie ΔE für ein Proton mit $E = 1 \text{ TeV}$ bei einem Radius von 1 km . Wie groß müßte der Radius eines Kreisbeschleunigers für Elektronen derselben Energie sein, damit pro Umlauf dieselbe Energie abgestrahlt wird?

Aufgabe 3: Čerenkov-Detektoren

(2 Punkte)

- a) Ein RICH-Detektor hat einen 1 cm dicken Radiator, der mit flüssigem Freon (Brechungsindex $n = 1.22$) gefüllt ist. Der Abstand L zwischen dem Radiator und dem Photodetektor ist 9.5 cm .

Wie groß sind die Schwellenimpulse, oberhalb derer Pionen bzw. Kaonen Čerenkovlicht erzeugen? Berechnen Sie die Größe der Radianze in der Mitte des Radiators als Funktion des Impulses und stellen Sie diese Funktion im Bereich vom Pion-Schwellenimpuls bis 2 GeV graphisch dar.

- b) Ein mit CO_2 gefüllter Čerenkovzähler soll zum Nachweis von π -Mesonen eingesetzt werden. Man beachte, dass die Suszeptibilität $\chi = \epsilon - 1$ proportional zum Druck ist. Bei Normaldruck ist der Brechungsindex $n = 1.00041$.

Wie hoch muss der Druck sein, um Pionen oberhalb einer Energie von 5 GeV nachzuweisen? Ab welcher Energie erzeugen bei diesem Druck auch Kaonen Čerenkovlicht im Detektor?

Aufgabe 4: Detektorkonzept

(3 Punkte)

Beschreiben Sie den prinzipiellen Aufbau eines Detektors zur Analyse von hochenergetischen Teilchenreaktionen (z.B. an einem der in Aufgabe 1 genannten Beschleuniger).

Welche Komponenten werden aus welchem Grund eingesetzt? Wie sind die Komponenten angeordnet? Welchen Einfluss hat das Verhältnis der Energien der kollidierenden Teilchen auf die Detektoranforderungen?

Typische Messgrößen sind:

- Impulse der geladenen Teilchen;
- Stoßparameter der Spuren geladener Teilchen relativ zum Ursprung;
- Möglichst gute Teilchenidentifikation über einen breiten Impulsbereich für Elektronen, Myonen, Pionen, Kaonen und Protonen;
- Energie der Hadronen;
- Energie der Photonen;

Bei dieser Aufgabe können Sie sich natürlich von existierenden Detektoren inspirieren lassen.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 1

Musterlösungen

Aufgabe 1: Relativistische Kinematik, Beschleuniger

- a) Die Länge L der Driftröhre muss so gewählt werden, dass die Protonen sie innerhalb einer halben Periodendauer T durchqueren, da nur während des ersten Teils der Periode eine beschleunigende Spannung anliegt:

$$L = v \cdot T/2 = \frac{v}{2\nu} \quad (1)$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Protonen, die sich folgendermaßen aus der Masse m und Gesamtenergie E bzw. der kinetischen Energie E_{kin} berechnen läßt:

$$\begin{aligned} \frac{E}{mc^2} &= \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^4}{E^2} \\ \Rightarrow v &= c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{(E_{kin} + mc^2)^2}} \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Gleichung ?? ergibt sich:

E_{kin}	L
1 MeV	3.46 cm
100 MeV	32.1 cm
10 GeV	74.7 cm

Zum Vergleich: Bei einer klassischen Rechnung erhält man bei einer Erhöhung der kinetischen Energie um den Faktor 100 eine Zunahme der Länge um den Faktor 10.

- b) Die Generatorfrequenz ν muss ein ganzzahliges Vielfaches (n) der Umlauffrequenz sein. Unter Verwendung von Gleichung ?? ergibt sich:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{2\pi R} = n \cdot \frac{c}{2\pi R} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

Das Magnetfeld muss so gewählt werden, dass die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, bei der gegenüber der klassischen Formel ein zusätzlicher Gammafaktor auftritt:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= evB = \gamma m \frac{v^2}{R} \\ \Rightarrow B &= \frac{\gamma mv}{eR} = \frac{Ev}{c^2 e R} = \frac{E}{ceR} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}\end{aligned}$$

- c) Die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ lässt sich aus den Vierervektoren $\mathbf{p}_{1,2} = (E_{1,2}, \vec{p}_{1,2}) = (E_{1,2}, 0, 0, \pm p_{1,2})$ (Strahlachse = z -Achse) der beiden kollidierenden Teilchen berechnen (hier $c=1$):

$$\begin{aligned}s &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \\ &= \mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_2^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2(p_1 \cdot (-p_2)) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 + 2p_1 p_2 \\ &= 2E_1 E_2 + 2\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2)} + m_1^2 + m_2^2\end{aligned}$$

Für $E_{1,2} \gg m_{1,2}$ können die Massenterme vernachlässigt werden:

$$s = 4E_1 E_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = 2\sqrt{E_1 E_2} \quad (3)$$

Für $E_1 \gg m_{1,2}$ und $E_2 = m_2$ (Fixed Target) kann folgende Näherung gemacht werden:

$$s = 2E_1 m_2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2} \quad (4)$$

Damit erhält man folgende Schwerpunktsenergien:

Beschleuniger	Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$
LEP 2	206 GeV
KEKB	10.6 GeV
HERA	318 GeV
HERA (Fixed Target)	7.18 GeV
Tevatron	1.96 TeV
LHC (pp)	7 TeV
LHC (PbPb)	$1.15 \cdot 10^3$ TeV

Aus Gleichung ?? folgt für die Strahlenergie, die in einem Fixed-Target-Experiment benötigt würde, um eine Schwerpunktsenergie von $1.15 \cdot 10^3$ TeV zu erreichen:

$$E_1 = \frac{s}{2m_2} = 3.4 \cdot 10^6 \text{ TeV}$$

In Collider-Experimenten können also wesentlich höhere Schwerpunktsenergien erreicht werden als bei Fixed-Target-Experimenten.

Aufgabe 2: Synchrotronstrahlung

Für eine Kreisbewegung gilt:

$$\begin{aligned}\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| &= \frac{v^2}{R} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \frac{c\beta^2}{R} \\ \vec{\beta} \perp \frac{d\vec{\beta}}{dt} &\Rightarrow \left|\vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \beta \left|\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right| = \frac{c\beta^3}{R}\end{aligned}$$

Damit erhält man für die abgestrahlte Leistung:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)^2 - \left(\vec{\beta} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[\frac{c^2 \beta^4}{R^2} - \frac{c^2 \beta^6}{R^2} \right] \\ &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \frac{c^2 \beta^4}{R^2} (1 - \beta^2) \\ &= \frac{2}{3} q^2 \gamma^6 \frac{c \beta^4}{R^2} \frac{1}{\gamma^2} \\ &= \frac{2}{3} q^2 \frac{c \beta^4}{R^2} \gamma^4\end{aligned}$$

Mit der Umlaufzeit $T = 2\pi R/v = 2\pi R/(c\beta)$ und $q = e$ folgt:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{dE}{dt} \cdot T \\ &= \frac{4\pi e^2}{3} \frac{\beta^3}{R} \gamma^4 \\ &= \frac{4\pi \cdot 197 \text{ MeV fm}/137}{3} \frac{\beta^3}{R} \gamma^4 \\ &= 6.02 \cdot 10^{-15} \text{ MeV} \cdot \frac{\beta^3}{R[\text{m}]} \cdot \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4\end{aligned}$$

Für Protonen mit $E = 1 \text{ TeV}$ erhält man bei $R = 1 \text{ km}$ einen Energieverlust von $\Delta E = 7.8 \text{ eV}$ pro Umlauf.

Für Elektronen mit $E = 1 \text{ TeV}$ ergibt sich bei gleichem Energieverlust ein Radius von

$$R = 6.02 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \frac{\beta^3}{E[\text{MeV}]} \cdot \left(\frac{\Delta E}{mc^2}\right)^4 = 1.1 \cdot 10^{16} \text{ m} = 1.2 \text{ Lj}$$

An diesem Wert wird deutlich, weshalb der nächste e^+e^- -Collider (ILC) als Linearbeschleuniger gebaut werden soll.

Aufgabe 3: Čerenkov-Detektoren

a) An der Schwelle gilt:

$$\begin{aligned}
 1 &= \beta n = \frac{p}{E} n = \frac{np}{\sqrt{p^2 + m^2}} \\
 \Rightarrow \sqrt{p^2 + m^2} &= np \\
 \Rightarrow p^2 + m^2 &= n^2 p^2 \\
 \Rightarrow p &= \frac{m}{\sqrt{n^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Also sind die Schwellenimpulse $p_\pi = 200$ MeV und $p_K = 706$ MeV.

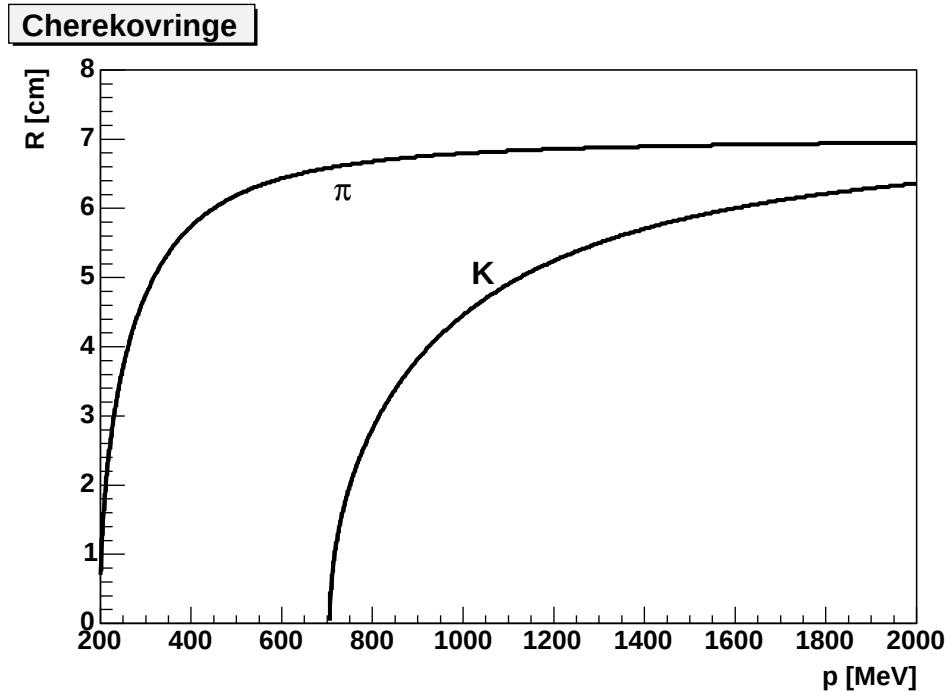
Für den Winkel θ , unter dem das Čerenkovlicht abgestrahlt wird, gilt:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} = \frac{E}{np} = \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{np}$$

Als Ringradius R ergibt sich:

$$R = L_0 \tan \theta = L_0 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = L_0 \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = L_0 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = L_0 \sqrt{\frac{n^2 p^2}{p^2 + m^2} - 1}$$

Dabei ist $L_0 = L + d/2 = 10$ cm (Dicke $d = 1$ cm).



Anhand des Bildes kann diskutiert werden, in welchen Bereich Pionen und Kaonen getrennt werden können.

- b) Für $\mu = 1$ ist der Brechungsindex gegeben durch $n = \sqrt{\epsilon}$. Daraus folgt an der Schwelle:

$$\sqrt{\epsilon} = n = \frac{1}{\beta} = \frac{E}{\sqrt{E^2 - m^2}}$$

$$\Rightarrow \chi = \epsilon - 1 = \frac{E^2}{E^2 - m^2} - 1 = \frac{m^2}{E^2 - m^2}$$

Als Druck p erhält man aus der Suszeptibilität $\chi_0 = n^2 - 1$ bei Normaldruck p_0 :

$$p = \frac{\chi}{\chi_0} \cdot p_0 = \frac{m^2}{(E^2 - m^2)(n^2 - 1)} \cdot p_0 \quad (5)$$

Für Pionen ergibt sich $p = 0.96$ bar.

Aus Gleichung ?? folgt:

$$E^2 - m^2 = \frac{m^2}{n^2 - 1} \frac{p_0}{p} \Rightarrow E = m \sqrt{\frac{p_0}{(n^2 - 1)p} + 1}$$

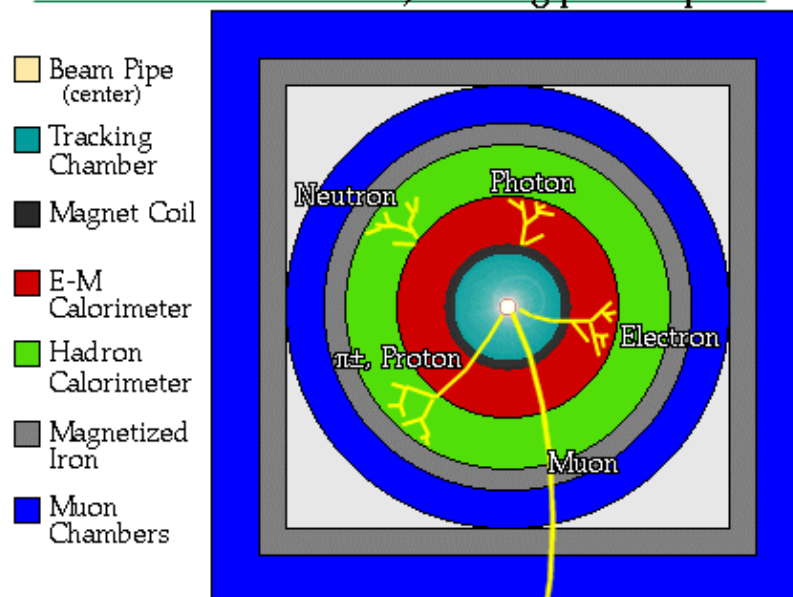
Für Kaonen ergibt sich $E = 17.7$ GeV.

Aufgabe 4: Detektorkonzept

Das Ziel der in der Teilchenphysik eingesetzten Detektoren ist es, eine möglichst vollständige Rekonstruktion von Ereignissen durchzuführen.

Die Detektoren sind im Wesentlichen nach dem in dem Bild gezeigten Schema aufgebaut.

A detector cross-section, showing particle paths



Folgende Detektoren können betrachtet werden:

- Halbleiterdetektor: Nachweis geladener Teilchen, sehr gute Ortsauflösung, aber relativ viel Materie (Vielfachstreuung, Energieverlust), Rekonstruktion von Spurparametern (Impuls) und insbesondere von Vertices (über die Bestimmung des Stoßparameters der Spuren), evtl. Teilchenidentifikation durch dE/dx , nahe am Strahlrohr
- Driftkammer, TPC: Nachweis geladener Teilchen, großes Volumen, viele Messpunkte, wenig Materie, Rekonstruktion von Spurparametern (Impuls) und evtl. von Vertices/Kinks, Teilchenidentifikation durch dE/dx
- Flugzeitdetektor (time-of-flight, ToF): Teilchenidentifikation von geladenen Teilchen (besonder Pionen, Kaonen, Protonen; Myonen sind meist von Pionen kaum zu unterscheiden und Elektronen koennen leicht im Kalorimeter identifiziert werden), innerhalb von Magnet/Kalorimeter (Materie), ausserhalb der Spurkammer (großes Δt)
- Übergangsstrahlungsdetektor: Identifikation von Elektronen, innerhalb von Magnet/Kalorimeter
- Čerenkovdetektor: Teilchenidendifikation, innerhalb von Magnet/Kalorimeter
- Magnet: Impulsmessung von geladenen Teilchen durch Krümmung, innerhalb oder ausserhalb des Kalorimeters
- Elektromagnetisches Kalorimeter: Identifikation vonElektronen und Nachweis von Photonen, Energiemessung, vor had. Kalorimeter;
- Hadronisches Kalorimeter: Nachweis von ungeladenen Hadronen und Neutronen, Energiemessung, zusammen mit el.Kal.: Rekonstruktion von Jets, (Nachweis von Myonen)
- Eisenjoch: Rückführung des magnetischen Flusses, Abschirmung von Hadronen
- Myonsystem: Nachweis von Myonen, ausserhalb der anderen Komponenten
- ...

Wenn das Schwerpunktssystem gleich dem Laborsystem ist, ist der Detektor in der Regel symmetrisch in Strahlrichtung. Wenn es einen Boost in eine Richtung gibt, wie es insbesondere bei Fixed-Target-Experimenten der Fall ist, ist der Detektor meist asymmetrisch aufgebaut.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 2

Bearbeitung bis 07.05.2014, 9:45 Uhr

Aufgabe 1: Lorentztransformation und Comptonstreuung (3 Punkte)

Die Polarisation des Elektronenstrahls am HERA Speicherring wurde mit Hilfe der Comptonstreuung von Laserphotonen gemessen. Dabei treffen Laserphotonen der Energie $E_\gamma = 2.41$ eV frontal auf Elektronen mit $E_e = 27.5$ GeV.

- a) Wie groß ist die Energie der Laserphotonen im Ruhesystem der Elektronen?
- b) Welche Energie besitzen unter 90° und 180° gestreute Photonen (im Elektron-Ruhesystem)?
- c) Wie groß sind die entsprechenden Energien und Streuwinkel im Laborsystem?

Aufgabe 2: Energieverlust und Vielfachstreuung (2,5 Punkte)

Ein Elektronenstrahl mit einem Impuls von $1 \text{ GeV}/c$ trifft senkrecht auf eine Goldfolie ($\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$, $A = 197 \text{ g/Mol}$) mit einer Dicke von 0.10 Strahlungslängen ($X_0 = 0.33 \text{ cm}$).

- a) Wie groß ist die mittlere Winkelabweichung θ_{rms} der Elektronen durch Vielfachstreuung nach Durchqueren der Folie? Wie groß ist der Energieverlust der Elektronen durch Bremsstrahlung?
- b) Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Energieverlust der Elektronen durch Ionisation unter Vernachlässigung der Dichtekorrektur.
- c) Erwarten Sie eine Änderung dieses Verhältnisses für Beryllium? Begründen Sie Ihre Erwartung.

Aufgabe 3: Wirkungsquerschnitt (2 Punkte)

Zeichnen Sie eine Skizze für die elastische Streuung eines punktförmigen Teilchens an einer Kugel. Zeigen Sie zunächst unter Verwendung von Drehimpulserhaltung

bezüglich des Mittelpunkts der Kugel, dass der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel ist. Berechnen Sie dann den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right|.$$

Dabei ist b der Stoßparameter und θ der Streuwinkel, der als Winkel zwischen den Impulsen von einlaufendem und auslaufendem Teilchen definiert ist.

Ermitteln Sie aus dem differentiellen den totalen Wirkungsquerschnitt. Welche anschauliche Bedeutung hat dieser Wert?

Aufgabe 4: Luminosität

(1 Punkt)

Am Fermilab in Batavia, Illinois, wurde der $p\bar{p}$ -Speicherring Tevatron betrieben. In dem 6 km langen Ring wurden in beiden Umlaufrichtungen 36 Pakete (Bunches) Protonen und ebenso viele Pakete Antiprotonen gespeichert. Dazu wurden insgesamt etwa 10^{13} Protonen und 10^{12} Antiprotonen gleichmäßig auf ihre jeweiligen Pakete verteilt. Die Pakete kollidieren bei einer Schwerpunktsenergie von 1,96 TeV mit einer Luminosität von $10^{32}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Auf welche effektive Fläche mussten die Strahlen komprimiert werden, um diese Luminosität zu erreichen?

Aufgabe 5: Elemente, kosmische Strahlung

(1,5 Punkte)

In der Vorlesung (Dokument ModPhysIII-VL02; Seite 14f) wurde über Elementhäufigkeiten diskutiert. Entspricht die Verteilung für Elementhäufigkeit im Sonnensystem annähernd dem, was Sie auf der Erde vorfinden? Sind der Mond oder Meteoriten geeignet, wo muss man sonst noch nachsehen?

Beschreiben Sie kurz die Struktur der Verteilung. Kann man das energieärmste Element anhand der Verteilung erkennen?

Beschreiben Sie kurz die Verteilung in der kosmischen Strahlung auf der gleichen Seite. Was kann dazu führen, dass es Abweichungen gibt. Beschreiben Sie kurz das "Leben" eines Teilchens der kosmischen Strahlung unter der Annahme, dass die Teilchen der kosmischen Strahlung durch starke Beschleunigung an einem Punkt irgendwo in der Milchstraße entstehen.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 2

Musterlösungen

Aufgabe 1: Lorentztransformation und Comptonstreuung

Im Folgenden werden Größen im Elektron-Ruhesystem mit einem Stern und Größen des gestreuten Photons mit einem Strich gekennzeichnet. Impulse werden in eine Komponente senkrecht ($p_{\perp} = |\vec{p}_{\perp}|$) und eine Komponente parallel ($p_{\parallel}$) zur Boostichtung zerlegt. Die positive Richtung ist durch das Photon definiert. Es gilt die Lorentztransformation:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ p_{\parallel}^* \\ p_{\perp}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \\ p_{\perp} \end{pmatrix}$$

a) Aus

$$\gamma = \frac{E_e}{m_e} = 5.38 \cdot 10^4 \quad \beta \approx -1 \text{ (negative Flugrichtung des Elektrons)}$$

folgt für die Lorentztransformation in das Ruhesystem des Elektrons:

$$E_{\gamma}^* = \gamma E_{\gamma} - \beta\gamma p_{\gamma\parallel} = \gamma E_{\gamma} - \beta\gamma E_{\gamma} = 2\gamma E_{\gamma} = 259 \text{ keV}$$

b) Für die Energie des gestreuten Photons gilt:

$$\begin{aligned} E_{\gamma}^{*'}(\theta^*) &= \frac{E_{\gamma}^*}{1 + \frac{E_{\gamma}^*}{m_e c^2} (1 - \cos \theta^*)} \\ \Rightarrow E_{\gamma}^{*'}(90^\circ) &= 172 \text{ keV} \\ \Rightarrow E_{\gamma}^{*'}(180^\circ) &= 129 \text{ keV} \end{aligned}$$

c) Für die Rücktransformation in das Laborsystem wird in der Transformationsmatrix $-\beta$ durch β ersetzt. Die Energie im Laborsystem ist also:

$$\begin{aligned} E_{\gamma}' &= \gamma E_{\gamma}^{*'} + \beta\gamma p_{\gamma\parallel}^{*'} = \gamma E_{\gamma}^{*'} + \beta\gamma p_{\gamma}^{*'} \cos \theta^* = \gamma E_{\gamma}^{*'} (1 - \cos \theta^*) \\ \Rightarrow E_{\gamma}'(\theta^* = 90^\circ) &= 9.26 \text{ GeV} \\ \Rightarrow E_{\gamma}'(\theta^* = 180^\circ) &= 13.85 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Aus den Impulskomponenten

$$\begin{aligned} p'_{\gamma\perp} &= p_{\gamma\perp}^{*'} = E_{\gamma}^{*'} \sin \theta^* \\ p'_{\gamma\parallel} &= \beta\gamma E_{\gamma}^{*'} + \gamma p_{\gamma\parallel}^{*'} = -\gamma E_{\gamma}^{*'} (1 - \cos \theta^*) \end{aligned}$$

ergibt sich mit

$$\tan \theta = \frac{p'_{\gamma\perp}}{p'_{\gamma\parallel}}$$

für $\theta^* = 90^\circ$:

$$\tan \theta = \frac{E_{\gamma}^{*'}}{-\gamma E_{\gamma}^{*'}} = -\frac{1}{\gamma} \Rightarrow \theta = 180^\circ - 0.001^\circ \approx 180^\circ$$

und für $\theta^* = 180^\circ$:

$$\tan \theta = \frac{0}{p'_{\gamma\parallel}} = 0 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

Aufgabe 2: Energieverlust und Vielfachstreuung

- a) Für die mittlere Winkelabweichung erhält man (1 Punkt) mit der Näherungsformel aus VL01:

$$\theta_{rms} = \frac{21 \text{ MeV}/c}{p} \cdot \sqrt{\frac{L}{X_0}} = 6.6 \text{ mrad} = 0.38^\circ$$

Der Energieverlust durch Bremsstrahlung ΔE_{rad} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -\frac{E}{X_0} \\ \Rightarrow E(x) &= E_0 \cdot e^{-\frac{x}{X_0}} \\ \Rightarrow \Delta E_{rad} &= E_0 - E(x) = E_0(1 - e^{-\frac{x}{X_0}}) = 95.2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Wenn man für $\Delta E \ll E_0$ die Näherung eines konstanten Energieverlusts $dE/dx = -E_0/X_0$ macht, erhält man als Energieverlust $\Delta E_{rad} = -E_0/X_0 \cdot x = 100 \text{ MeV}$.

- b) Der Energieverlust durch Ionisation ist gegeben durch die Bethe-Bloch-Formel (1 Punkt):

$$-\frac{dE}{dx} = D_e \left(\frac{Z_1}{\beta} \right)^2 Z_2 \frac{N_A \rho}{A} \left[\ln \left(\frac{2mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\gamma)}{2} \right]$$

Mit $D_e = 5.1 \cdot 10^{-25} \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = 79$, $\beta\gamma = p/m_e$, $\beta \approx 1$, $I \approx Z_2 \cdot 10 \text{ eV}$, $\delta = 0$ sowie ρ und A aus dem Aufgabentext erhält man:

$$-\frac{dE}{dx} = 50.7 \text{ MeV/cm}$$

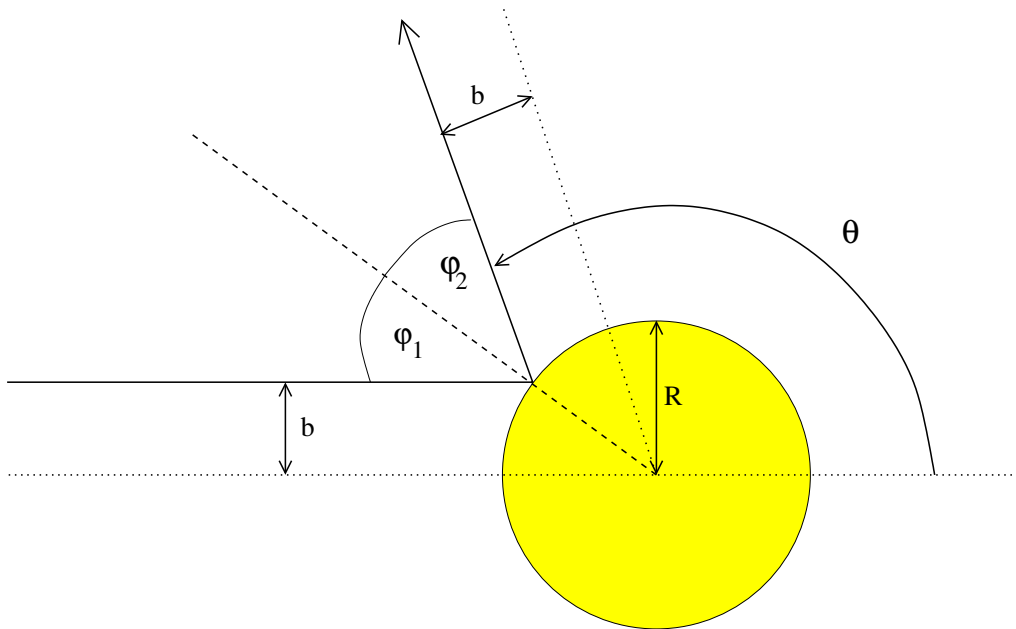
Daraus ergibt sich als Energieverlust durch Ionisation ΔE_{ion} :

$$\Delta E_{ion} = \left| \frac{dE}{dx} \right| \cdot 0.10 \cdot X_0 = 1.67 \text{ MeV} \ll \Delta E_{rad}$$

c) Beryllium (0.5 Punkte):

Bremsstrahlung entsteht durch Streuung der Teilchen am Kern und ist proportional zu $Z_{Streuern}^2$. Ionisation entsteht durch Wechselwirkung mit den Elektronen. Die Elektronendichte schwankt nur nicht so stark für verschiedene Elemente im Vergleich mit Z^2 . Beryllium ist ein Material mit niedrigem Z , was erwarten läßt, dass sich das Verhältnis im Vergleich zu Gold stark in Richtung der Ionisation verschiebt

Aufgabe 3: Wirkungsquerschnitt



Der Drehimpuls $L_1 = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1|$ vor dem Stoß muß gleich dem Drehimpuls L_2 nach dem (elastischen) Stoß sein:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ \Rightarrow p R \sin \phi_1 &= p R \sin \phi_2 \\ \Rightarrow \phi_1 &= \phi_2 := \phi \end{aligned}$$

Aus der Skizze ist zu sehen, dass $\phi = (\pi - \theta)/2$ ist. Damit ergibt sich für den Stoßparameter b :

$$b = R \sin \phi = R \sin \frac{\pi - \theta}{2} = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Die Ableitung nach θ ist:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Die differentielle Fläche, an der die Teilchen mit einem Winkel θ gestreut werden, ist $d\sigma = 2\pi b db$. Das entsprechende differentielle Raumwinkelement ist $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \cdot \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Mit $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$ ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad (1)$$

Durch Integration über den Raumwinkel erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \frac{R^2}{4} \cdot 4\pi = \pi R^2 \quad (2)$$

Dies entspricht der Querschnittsfläche der Kugel.

Aufgabe 4: Luminosität

Die Luminosität eines Speicherrings ist gegeben durch die Anzahlen der Teilchen pro Paket N_1 und N_2 , die Fläche A der Wechselwirkungszone sowie die Frequenz ν , mit der die Pakete kollidieren:

$$\mathcal{L} = \frac{N_1 N_2}{A} \cdot \nu$$

Umgeformt um auf die Fläche zu kommen:

$$A = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{L}} \cdot \nu$$

Hier ist $N_1 = 10^{13}/36$ und $N_2 = 10^{12}/36$. Die Frequenz ergibt sich aus dem Umfang $U = 6$ km, der Anzahl der Pakete $n = 36$ und der Geschwindigkeit der Protonen $v \approx c$:

$$\nu = n \cdot \frac{v}{U} = \frac{nc}{U}$$

Damit erhält man eine Fläche von

$$A = \frac{10^{25}}{36 \cdot 36} \cdot \frac{36 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km}}{6 \text{ km s}} \cdot \frac{\text{cm}^2 \text{ s}}{10^{32}}$$

Das sind run $14000 \mu\text{m}^2$ und bedeutet, dass die laterale Ausdehnung nur etwa $120 \mu\text{m}$ sein darf.

Aufgabe 5: Elemente, kosmische Strahlung

- Die angegebene Verteilung entspricht offensichtlich nicht den Erfahrungen auf der Erde; (ich denke das ist offensichtlich). Die größte Materieanhäufung im Sonnensystem ist die Sonne selbst, aber auch die großen Gasplaneten sind noch wichtiger als die Erde;
- Die Verteilung fällt über das Massenspektrum hinweg um mehr als 10 Größenordnungen ab. Dazu gibt es eine hochfrequentete Struktur, bei der manche Elemente (und Isotope; Deuterium und ^3He sind z.B. die einzigen $A = 3$ Isotope, die eine Rolle spielen, aber gegenüber normalem Wasserstoff und ^4He sehr selten sind) stark herausstechen. Um einige Massenzahlen gibt es Anhäufungen, am deutlichsten um Eisen herum.

Hinweis zur Interpretation: Beim Urknall ist vor allem Wasserstoff und ein bisschen Helium entstanden. Die weiteren Elemente entstehen später bei anderen Prozessen. Die Häufigkeiten sind durch die Stabilität der Kerne beeinflusst, man kann also aus der Häufigkeit etwas über die magischen Zahlen (Potentialtopfmodell) lernen.

- Eisen ist das energieärmste Element pro Nukleon. Leichtere Elemente können zu Eisen fusionieren, um schwerere Elemente zu erzeugen muss ein Element starkem Neutronenbeschuss ausgesetzt sein, z.B. in einer Supernova.
- Die Verteilung der Elemente in der kosmischen Strahlung ist deutlich ausgewaschen. Die stark beschleunigten Teilchen der kosmischen Strahlung stoßen auf andere Teilchen und wechselwirken. Dabei brechen häufig Stücke des Kerns weg und der Restkern zerfällt weiter in einen stabilen Zustand. Die Teilchen werden (typischerweise in den Druckwellen von Supernovae oder an Akkretionsscheiben von Gravitationsssenken) stark beschleunigt, kreisen wirt in der Galaxie umher (sofern sie nicht zu den ganz hochenergetischen gehören), da es in der Galaxie Magnetfelder gibt, und stoßen wie bereits beschrieben auch mal auf Materie.

Anmerkung zur Bepunktung:

Es sollte eine Information aus dem Text zu jedem Stichpunkt genannt sein, um die volle Punktzahl zu erreichen. Jeder unerwähnte Stichpunkte führt zum Verlust eines halben Punktes.

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 3

Bearbeitung bis 14.05.2014, 9:45 Uhr

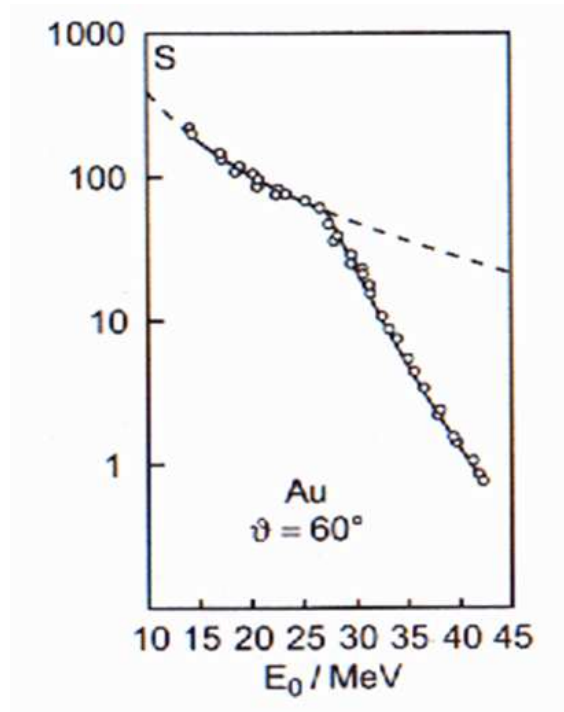
Aufgabe 1: Rutherford-Streuung

(2 Punkte)

- a) Ein Strahl von α -Teilchen der kinetischen Energie $E_{kin} = 27$ MeV und der Stromstärke 1 nA durchquert eine 1 mg/cm² dicke Goldfolie. In 20 cm Abstand davon unter 60° zur Strahlrichtung befindet sich ein auf das Target gerichteter Zähler mit 6 cm² aktiver Fläche. Wie groß ist die Zählrate?
- b) Bei Variation der Einschussenergie beobachtet man mit dem Detektor unter dem angegebenen Streuwinkel von 60° für Einschussenergien $E_\alpha \geq 27$ MeV eine Abweichung von der Rutherford-Streuformel. Der klassisch aus Energie- und Drehimpulserhaltung berechnete minimale Abstand $r_{min}(\theta)$ ist

$$r_{min}(\theta) = \frac{Z_\alpha \cdot Z e^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right].$$

Verwenden Sie diese Formel, um den Radiusparameter r_0 ($R = r_0 \cdot A^{1/3}$) und den Kernradius R unter Berücksichtigung der Ausdehnung von Target und Projektil zu berechnen.



Aufgabe 2: Weizsäcker-Massenformel

(3 Punkte)

- a) Bestimmen Sie analytisch aus der Weizsäcker-Massenformel die Ladungszahl Z des stabilsten Isobars in Abhängigkeit von A . Nehmen Sie dabei Z als kontinuierliche Variable an und vernachlässigen Sie die Paarungsenergie.
- b) Aus der Wikipedia: " ^{244}Pu ist wegen seiner langen Halbwertszeit von 80 Mio. Jahren das einzige natürlich vorkommende Plutonium-Isotop. Es ist der Ausgangspunkt der Thorium-Reihe, die darum manchmal auch Plutonium-Thorium-Reihe genannt wird. ^{244}Pu zerfällt durch α -Zerfall zu ^{240}U , dieses durch zwei β -Zerfälle über ^{240}Np zu ^{240}Pu , dieses dann wieder durch zwei weitere α -Zerfälle über ^{236}U zum ^{232}Th . Danach folgt der Zerfall der Thorium-Reihe." Berechnen Sie die Energie, die bis zu diesem Punkt freigesetzt wurde. Massenzahlen können von (<http://pdg.lbl.gov/2013/AtomicNuclearProperties/index.html>) übernommen werden.
- c) Berechnen Sie die Differenz aus Weizsäcker-Massenformel und experimentell gemessenem Wert für ^{232}Th , das häufigste Eisenisotop und α -Teilchen.

Aufgabe 3: ^{14}C -Methode

(4 Punkte)

Durch die Höhenstrahlung wird in der Atmosphäre das Isotop ^{14}C mit einer konstanten Rate erzeugt. Da ^{14}C mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt, bildet sich in der Atmosphäre ein konstantes Verhältnis von ^{14}C zum stabilen Isotop ^{12}C . Dieses Verhältnis beobachtet man auch in allen Lebewesen, die den Kohlenstoff durch ihren Stoffwechsel aufnehmen. Die durch den Zerfall von ^{14}C hervorgerufene spezifische Aktivität beträgt 0.255 Bq pro Gramm Kohlenstoff in natürlichem, lebendem Gewebe. Sobald ein Lebewesen stirbt, nimmt die ^{14}C -Konzentration durch den radioaktiven Zerfall ab. Diese Tatsache nutzt man z.B. in der Archäologie zur Altersbestimmung.

- a) Aus welcher Zeit stammt eine Probe von 3 g Kohlenstoff mit einer Aktivität von 0.404 Bq?
- b) Wieviele ^{14}C -Atome waren zu dieser Zeit in der Probe? Wieviele sind es jetzt?
- c) Wie lange muss die Aktivität der Probe gemessen werden, um ihr Alter mit einem relativen statistischen Fehler von 1% zu bestimmen? Zur Erinnerung: Der statistische Fehler einer Messung von N Ereignissen ist $\sqrt{N}$.

- d) Helium zur industriellen Produktion wird aus Erdgas herausgefiltert. Erklären Sie, wie es dazu kommt, dass Helium im Erdgas angereichert ist und schätzen Sie den Heliumanteil im Erdgas unter der Annahme, dass das Erdgas 1 Mio. Jahre in der Erde gelagert wurde.

Aufgabe 4: De-Broglie-Wellenlänge

(1 Punkt)

Welche kinetische Energie müssen Neutrinos ($m_\nu = 0$), Elektronen, Myonen oder Protonen haben, damit sie eine de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = 2\pi\lambda = 1$ fm haben? Welche Energie haben Photonen mit einer Wellenlänge von 1 fm?

Aufgabe 5: Feynman-Diagramme

(2 Bonus-Punkte)

- a) Zeichnen Sie alle Feynman-Diagramme für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ bei denen genau ein Photon ausgetauscht wird. Was ändert sich, wenn man stattdessen die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ betrachtet?
- b) Zeichnen Sie jeweils ein Feynman-Diagramm für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang. Beachten Sie dabei, dass das ausgetauschte W -Boson an Vertices mit Nukleonen und an Vertices mit Leptonen koppelt. Vertices mit Nukleonen und Leptonen gleichzeitig kommen nicht vor.

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 3

Musterlösungen

Aufgabe 1: Rutherford-Streuung

a) Folgende Werte sind gegeben:

kinetische Energie: $E_{kin} = 27 \text{ MeV}$

Stromstärke: $I_0 = 1 \text{ nA}$

Ladung der α -Teilchen: $q = 2e$

Massenbelegung: $dM/dA = 1 \text{ mg/cm}^2$

Masse eines Goldkerns: $m_{Au} = 197 \text{ u}$ ($A = 197$, $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

Streuwinkel: $\theta = 60^\circ$

Abstand des Zählers: $r = 20 \text{ cm}$

Aktive Fläche: $A = 6 \text{ cm}^2$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung von α -Teilchen an Goldatomen ist durch die Rutherford-Streuformel gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{64\pi^2 \epsilon_0^2 E^2 \sin^4 \theta/2}$$

Die Anzahl der Goldatome pro Fläche ist gegeben durch:

$$\frac{dN_{Au}}{dA} = \frac{1}{m_{Au}} \frac{dM}{dA}$$

Der vom Zähler abgedeckte Raumwinkel $\Delta\Omega$ ist:

$$\Delta\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Aus dem im Zähler registrierten Strom I

$$I = I_0 \cdot \frac{dN_{Au}}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

ergibt sich folgende Rate:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{q} = \frac{I_0}{2em_{Au}} \cdot \frac{dM}{dA} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot \frac{A}{r^2} = 102 \text{ Hz}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
 r_{min}(\theta) &= \frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right] = R(\alpha) + R(\text{Au}) = r_0 \cdot (A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3}) \\
 \Rightarrow r_0 &= \frac{\frac{Z_\alpha \cdot Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{E_\alpha} \cdot \left[1 + \frac{1}{\sin \theta/2} \right]}{A_\alpha^{1/3} + A_{\text{Au}}^{1/3}} = 1.7 \text{ fm} \\
 \Rightarrow R(\text{Au}) &= r_0 \cdot A_{\text{Au}}^{1/3} = 9.9 \text{ fm}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Weizsäcker-Massenformel

a) Die Weizsäcker-Massenformel lautet (unter Vernachlässigung der Paarungsenergie):

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{4A}$$

Das Minimum von $M(A, Z)$ bestimmt die Ladungszahl des stabilsten Isobars. Im Minimum gilt:

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial M}{\partial Z} &= -m_n + m_p + m_e + 2a_c \frac{Z}{A^{1/3}} - a_a \frac{A - 2Z}{A} \\
 &= -m_n + m_p + m_e - a_a + (2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1})Z \\
 \Rightarrow Z &= \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{2a_c A^{-1/3} + 2a_a A^{-1}} \\
 &= \frac{A}{2} \cdot \frac{a_a + m_n - m_p - m_e}{a_a + a_c A^{2/3}}
 \end{aligned}$$

Mit $a_a = 93.15 \text{ MeV}$ und $a_c = 0.714 \text{ MeV}$ [Povh] ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{A}{2} \cdot \frac{93.94 \text{ MeV}}{93.15 \text{ MeV} + 0.714 \text{ MeV} \cdot A^{2/3}} \\
 &= \frac{A}{1.98 + 0.0152 \cdot A^{2/3}}
 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Die freigesetzte Energie ergibt sich aus der Massendifferenz der Anfangs- und Endzustände. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die relativen atomaren Massen, die auf http://physics.nist.gov/cgi-bin/Compositions/stand_alone.pl gegeben sind, die volle atomare Masse und nicht bloss die des Kerns eingehen. Dabei werden unangeregte Atome angenommen und wir gehen für die Lösung auch davon aus, dass wir z.B. nach einem β -Zerfall nach kurzem Warten wieder unangeregte Atome haben. Etwaige atomare Anregungen hätten aber auch nur einen sehr kleinen Einfluss auf die freigesetzte Energie. Neutrinos tragen zwar Energie davon, aber keine relevante Masse. Die Neutrinoenergie wird hier also als freigesetzt betrachtet.

Die Startmasse beträgt 244.064204 u (u = atomare Masseneinheit = 931.494061 MeV). Die Endmasse beträgt 232.038055 u plus die Masse der 3 Helium-Teilchen, die freigesetzt werden ($3 \cdot 4.002603$ u).

Die Differenz sind 0.01834 u entsprechend 17.084 MeV.

c) Berechnung der Differenz aus Weizsäckerformel und Messwert:

Die gemessenen Werte für ^{232}Th , ^{56}Fe und ^4He sind 216142 MeV, 52103 MeV und 3728 MeV.

Die Weizsäcker-Massenformel lautet:

$$M(A, Z) = (A - Z)m_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z \cdot (Z - 1)}{A^{1/3}} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{4A} - a_p \cdot A^{-\frac{1}{2}}$$

wobei alle in dieser Aufgabe betrachteten Kerne gerade/gerade Kerne sind. (Wegen des Helium nehmen wir hier vielleicht den Coulomb Term etwas genauer.)

a_v (v für Volumen) ist 15.67 MeV; a_s (s für Surface) ist 17.23 MeV; a_c (c für Coulomb) ist 0.714 MeV; a_a (a für Asymmetrie) ist 93.15 MeV; a_p (P für Paarung oder Pairing...) ist 11.2 MeV; m_n ist 939.565 MeV; m_p ist 938.272 MeV; m_e ist 0.511 MeV;

Mit diesen Zahlen kann man leicht die Massen ausrechnen und bekommt 3733 MeV für Helium, für ^{56}Fe 52090 MeV, und für ^{232}Th 216125 MeV. Insgesamt wird also für Helium eine um mehr als 1 MeV/Nukleon zu niedrige Bindungsenergie durch die Formel vorhergesagt. Für Eisen passt das Ergebnis recht gut mit nur 13 MeV Abweichung bei 56 Nukleonen. Auch fuer Thorium passt das Ergebnis sehr gut.

Aufgabe 3: ^{14}C -Methode

- a) Die Aktivität A zum Zeitpunkt t ist bei einer Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ gegeben durch:

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}$$

Dabei ist N die Anzahl der ^{14}C -Atome und $N_0 = N(t=0)$, $A_0 = A(t=0)$. Auflösen nach t ergibt:

$$\begin{aligned} t &= \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A_0}{A(t)} \\ &= \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{3 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g}}{0.404 \text{ Bq}} = 5278 \text{ a} \end{aligned} \quad (2)$$

- b) Die Anzahl der ^{14}C -Atome zum Zeitpunkt t ist:

$$\begin{aligned} N(t) &= A(t)/\lambda = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot A(t) \\ \Rightarrow N_0 &= \frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot 3 \text{ g} \cdot 0.255 \text{ Bq/g} = \frac{5730 \cdot 3.156 \cdot 10^7 \text{ s}}{\ln 2} \cdot 0.765 \text{ s}^{-1} \approx 2.0 \cdot 10^{11} \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die Anzahl zum Zeitpunkt der Messung $N = 1.05 \cdot 10^{11}$.

- c) Während der Messdauer Δt werden $\Delta N = A \Delta t$ Ereignisse registriert (Näherung: $\Delta t \ll T_{1/2} \Rightarrow A$ konstant). Der statistische Fehler der gemessenen Aktivität σ_A ist demnach:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_{\Delta N}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta N}}{\Delta t} = \sqrt{\frac{A}{\Delta t}}$$

Für den relativen statistischen Fehler des gemessenen Alters σ_t/t folgt unter Verwendung von Gleichung 2:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_t}{t} &= \left| \frac{\partial t}{\partial A} \right| \frac{\sigma_A}{t} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{\sigma_A}{t} = \frac{\sigma_A}{A \ln \frac{A_0}{A}} = \frac{1}{\sqrt{A \Delta t} \ln \frac{A_0}{A}} \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{1}{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 A \left(\ln \frac{A_0}{A}\right)^2} = 6.07 \cdot 10^4 \text{ s} = 16.9 \text{ h} \end{aligned}$$

- d) Helium-Produktion

Das ^{14}C Isotop ist keine Quelle von Helium. Es zerfällt über einen β -Zerfall in Stickstoff.

Die wichtigste Quelle der Entstehung von Helium sind andere radioaktive Zerfälle, deren abgestrahlte α -Teilchen sich in gasdichten Bereichen zusammen mit Erdgas anreichern. Auch Isotope mit langer Halbwertszeit zerfallen innerhalb von einer Mio. Jahren zu großen Teilen. Daher kann es zu einer Anreicherung in der Größenordnung $\mathcal{O}(\%)$ kommen.

Aufgabe 4: De-Broglie-Wellenlänge

Für die de-Broglie-Wellenlänge gilt:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{pc} \Rightarrow pc = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

Daraus folgt für die kinetische Energie $E_{kin} = E - mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$:

Neutrino: $E_{kin} = 1.240 \text{ GeV}$

Elektron: $E_{kin} = 1.239 \text{ GeV}$

Myon: $E_{kin} = 1.139 \text{ GeV}$

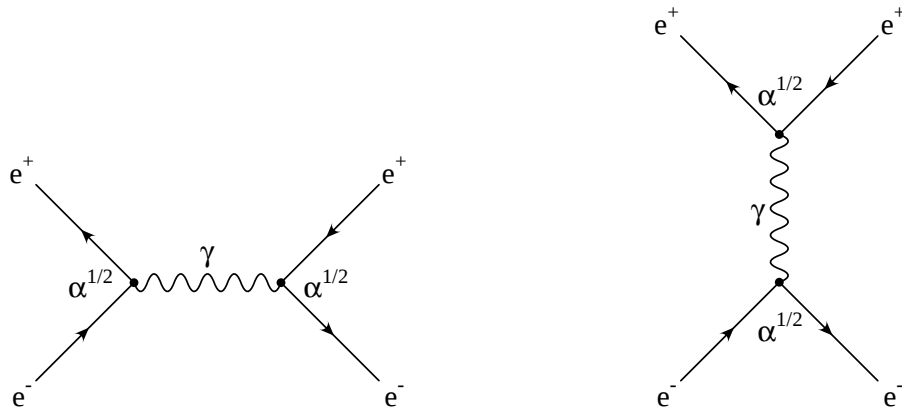
Proton: $E_{kin} = 0.617 \text{ GeV}$

Für Photonen gilt:

$$E = h\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 1.240 \text{ GeV}$$

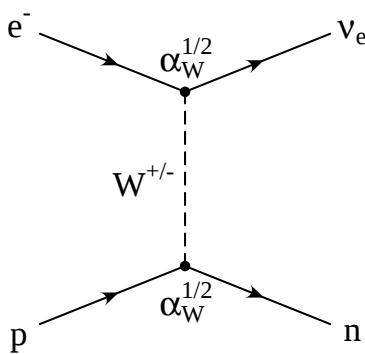
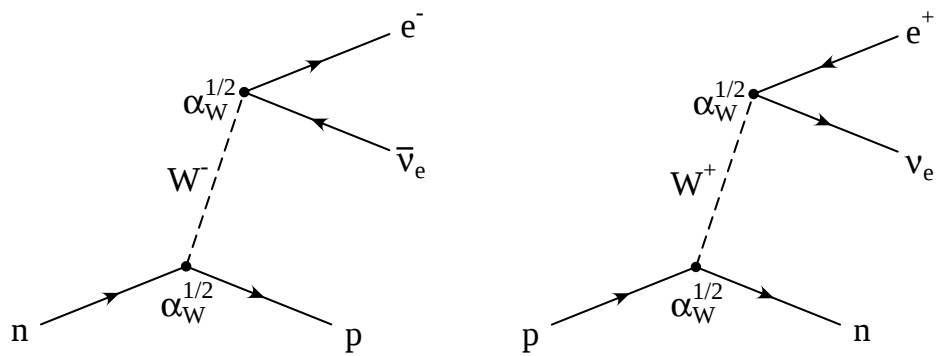
Aufgabe 5: Feynman-Diagramme

- a) Es gibt zwei Feynman-Diagramme führender Ordnung in α für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (Zeitachse nach rechts, Ortsachse nach oben):



Bei der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ gibt es nur einen Graphen führender Ordnung in α und zwar den Annihilationsgraphen analog zum ersten Diagramm.

- b) Die Feynmandiagramme führender Ordnung in α_W für β^- -Zerfall, β^+ -Zerfall und Elektroneneinfang sind:



Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 4

Bearbeitung bis 21.05.2014

Aufgabe 1: Formfaktor

(5 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass der Formfaktor für eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r = |\vec{r}|)$ durch

$$F(\vec{q}) = F(q) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar} r^2 dr$$

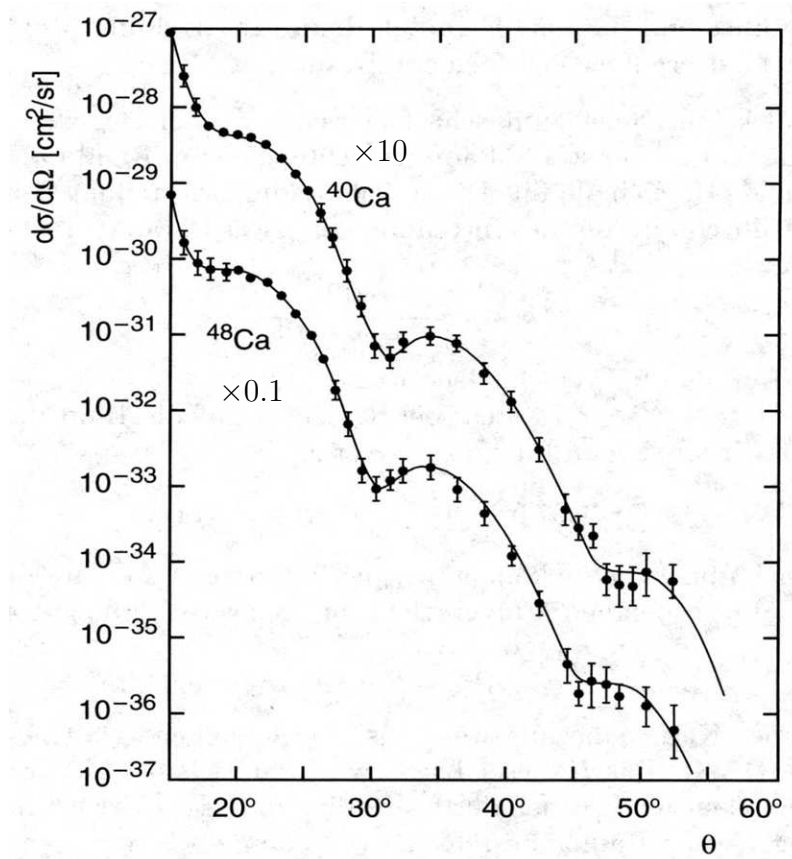
gegeben ist. Dabei sei ρ auf 1 normiert: $\int \rho(\vec{r}) d^3r = 1$.

- b) Ein Kern kann in erster Näherung als homogen geladene Kugel mit Radius R betrachtet werden. Zeigen Sie, dass unter dieser Annahme der Formfaktor

$$F(q) = \frac{3}{x^3} \cdot (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit} \quad x = \frac{qR}{\hbar}$$

ist.

- c) Berechnen Sie $F(q = 0)$
- d) Ermitteln Sie (graphisch oder numerisch) die ersten drei positiven Nullstellen von $F(x)$.
- e) In der Abbildung ist der gemessene Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Elektronen mit einer Energie von $E = 750$ MeV an ^{40}Ca und ^{48}Ca in Abhängigkeit vom Streuwinkel aufgetragen. Welchen Streuwinkeln entsprechen die im vorigen Aufgabenteil ermittelten Nullstellen? Bestimmen Sie daraus den Kernradius R der beiden Isotope.



Aufgabe 2: HERA-Kinematik

(5 Punkte)

Am HERA-Speicherung wurden Elektronen mit einer Energie von 27.5 GeV und Protonen mit einer Energie von 920 GeV frontal kollidiert. Der Viererimpuls des einlaufenden Elektrons sei $\mathbf{k}$, der des einlaufenden Protons $\mathbf{P}$ und der des gestreuten Elektrons $\mathbf{k}'$. Der Viererimpulsübertrag zwischen Elektron und Proton sei $\mathbf{q}$. Die Massen der Teilchen sollen im Folgenden vernachlässigt werden.

- Um die Kinematik von ep -Streueereignissen zu bestimmen, werden die Energie E'_e und der Winkel θ des gestreuten Elektrons zur Protonstrahlrichtung (nicht zur Elektronstrahlrichtung!) gemessen. Bestimmen Sie aus diesen beiden Größen und der Energie des einlaufenden Elektrons E_e die Virtualität $Q^2 = -\mathbf{q}^2$ und die Inelastizität $y = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{q}}{\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}}$. Welche anschauliche Bedeutung hat die Inelastizität y ?
- Drücken Sie W^2 und die Bjorkensche Skalenvariable x durch Q^2 , y und das Quadrat der Schwerpunktsenergie s aus.
- Welche Anforderungen ergeben sich für einen Detektor, mit dem man Q^2 und y anhand des gestreuten Elektrons messen will?

- d) Nicht bei allen Reaktionen wird ein Elektron nachgewiesen. Welche Ursachen kann das haben?
- e) Welche alternative Möglichkeit, die Kinematik zu bestimmen, hat man für den Fall, dass kein Elektron detektiert wird? Bestimmen Sie dafür eine Formel, mit der sich y berechnen lässt.

Aufgabe 3: Phasenraum beim β -Zerfall

(2 Bonus-Punkte)

Das Impulsspektrum der Elektronen bzw. Positronen aus dem β -Zerfall ist durch Fermis goldene Regel gegeben:

$$N(p_e)dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |M_{fi}|^2 \cdot \frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE}$$

Dabei ist p_e der Impuls der Elektronen bzw. Positronen, M_{fi} das Übergangsmatrixelement und $dn_e dn_\nu / dE$ die Dichte der Endzustände im Phasenraumintervall dE . Da das Matrixelement nur schwach von der Energie abhängt ist das Impulsspektrum im Wesentlichen durch den Phasenraumfaktor gegeben. Berechnen Sie den Phasenraumfaktor als Funktion des Impulses bzw. der Energie des Elektrons/Positrons für masselose und für massive Neutrinos. Vernachlässigen Sie dabei die Rückstoßenergie des Tochterkerns.

Wie kann man aus der Messung des Impulsspektrums der Elektronen bzw. Positronen etwas über die Masse der (Anti-)Neutrinos lernen?

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 4

Musterlösungen

Aufgabe 1: Formfaktor

- a) Der Formfaktor ist für eine auf 1 normierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ definiert als

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r} / \hbar} d^3r$$

Für die Integration werden hier Kugelkoordinaten verwendet. Dabei wird die z -Achse ($\theta = 0$) in Richtung von $\vec{q}$ gewählt, so dass $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$ ist:

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr \cos \theta / \hbar} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (\text{Subst. } x = \cos \theta) \\ &= -2\pi \int_1^{-1} \int_0^\infty \rho(r) e^{iqr x / \hbar} r^2 \, dr \, dx \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \left[\frac{\hbar}{iqr} e^{iqr x / \hbar} \right]_{-1}^1 r^2 \, dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr / \hbar} - e^{-iqr / \hbar}) r^2 \, dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin(qr / \hbar)}{qr / \hbar} r^2 \, dr \end{aligned} \tag{1}$$

- b) Da das Volumen einer Kugel mit Radius R gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$ ist, ist die normierte Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugel gegeben durch:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Daraus folgt nach Gleichung 1 für den Formfaktor:

$$\begin{aligned} F(q) &= 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{\sin(qr / \hbar)}{qr / \hbar} r^2 \, dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin(qr / \hbar) \, dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \left(\left[-r \frac{\hbar}{q} \cos(qr / \hbar) \right]_0^R - \int_0^R -\frac{\hbar}{q} \cos(qr / \hbar) \, dr \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left[-r \cos(qr/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qr/\hbar) \right]_0^R \\
&= \frac{3\hbar^2}{q^2 R^3} \left(-R \cos(qR/\hbar) + \frac{\hbar}{q} \sin(qR/\hbar) \right) \\
&= \frac{3\hbar^3}{q^3 R^3} (\sin(qR/\hbar) - qR/\hbar \cdot \cos(qR/\hbar)) \\
&= \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \quad \text{mit } x = \frac{qR}{\hbar}
\end{aligned}$$

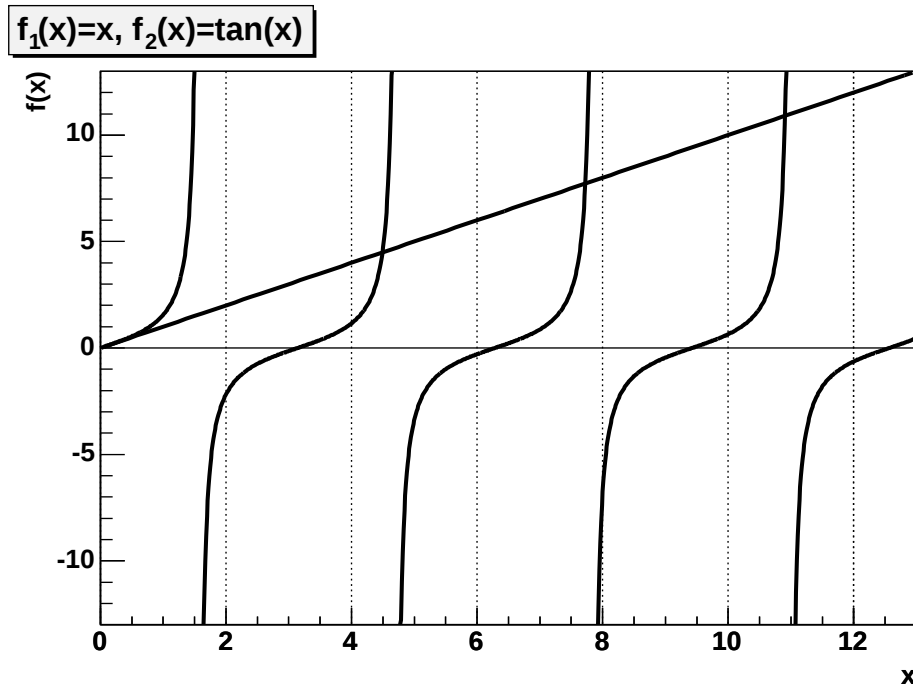
c) $F(q = 0)$ lässt sich durch Taylorentwicklung von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen:

$$\begin{aligned}
F(q = 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} (\sin x - x \cos x) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5) - x \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(x^4) \right] \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \left(\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^2) \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

d) Aus $F(x) = 0$ folgt:

$$\sin x - x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tan x$$

Aus den Schnittpunkten der Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = \tan x$ lassen sich also die Nullstellen von $F(x)$ bestimmen.



Numerisch können die Nullstellen z.B. mit dem Newton-Verfahren bestimmt werden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{\cos x_n - \cos x_n + x_n \sin x_n} = x_n - 1/x_n + \cot x_n$$

Für die Startwerte 5, 7 und 11 (aus der graphischen Darstellung) ergeben sich nach drei Iterationen folgende Nullstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.493 \\ x_2 &= 7.725 \\ x_3 &= 10.904 \end{aligned}$$

e) Aus $x = qR/\hbar$ folgt für $p \gg mc$:

$$R = \frac{\hbar}{q} \cdot x = \frac{\hbar c}{2pc \sin \theta/2} \cdot x = \frac{\hbar c}{2E \sin \theta/2} \cdot x$$

Da die lokalen Minima des Wirkungsquerschnitts den Nullstellen von $F(x)$ entsprechen, lässt sich aus ihnen der Radius R bestimmen.

Für ^{40}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 18^\circ &\Rightarrow R_1 = 3.78 \text{ fm} \\ \theta_2 = 31^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.80 \text{ fm} \\ \theta_3 = 47^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.60 \text{ fm} \end{aligned}$$

Für ^{48}Ca :

$$\begin{aligned} \theta_1 = 17^\circ &\Rightarrow R_1 = 4.00 \text{ fm} \\ \theta_2 = 30^\circ &\Rightarrow R_2 = 3.93 \text{ fm} \\ \theta_3 = 45^\circ &\Rightarrow R_3 = 3.75 \text{ fm} \end{aligned}$$

Als mittleren Radius erhält man $R = 3.73 \text{ fm}$ für ^{40}Ca und $R = 3.89 \text{ fm}$ für ^{48}Ca .

Aufgabe 2: HERA-Kinematik

a) Der zwischen Elektron und Proton übertragene Viererimpuls ist

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

Daraus folgt für die Virtualität:

$$\begin{aligned} Q^2 &= -\mathbf{q}^2 \\ &= -(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \\ &= -\mathbf{k}^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}' - \mathbf{k}'^2 \\ &= -m_e^2 + 2(E_e E'_e - \vec{p}_e \vec{p}'_e) - m_e^2 \\ &= -2m_e^2 + 2(E_e E'_e + p_e p'_e \cos \theta) \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Massen ist $m = 0$ und $p = E$. Dann gilt unter Verwendung von $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} Q^2 &= 2 E_e E'_e (1 + \cos \theta) \\ &= 4 E_e E'_e \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Für die Inelastizität ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\mathbf{k} - \mathbf{P}\mathbf{k}'}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \\ &= 1 - \frac{\mathbf{P}\mathbf{k}'}{\mathbf{P}\mathbf{k}} \\ &= 1 - \frac{E_p E'_e - E_p E_e \cos \theta}{E_p E_e + E_p E_e} \\ &= 1 - \frac{E'_e}{2E_e} (1 - \cos \theta) \\ &= 1 - \frac{E'_e}{E_e} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Im Ruhesystem des Protons ($\mathbf{P} = (m_p, 0, 0, 0)$) ist $\mathbf{P}\mathbf{q}$ gleich der vom Elektron übertragenen Energie $E_e^* - E_e^{*'}$ multipliziert mit der Protonmasse m_p und $\mathbf{P}\mathbf{k}$ gleich der Energie des einlaufenden Elektrons E_e^* mal m_p . y ist also der relative Energieverlust des Elektrons im Proton-Ruhesystem.

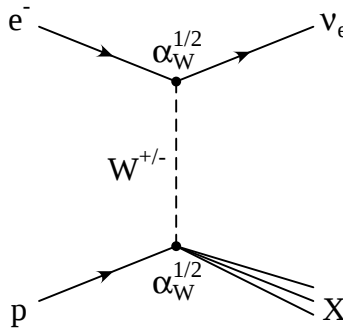
b) Bei Vernachlässigung der Massen gilt:

$$\begin{aligned}
 s &= (\mathbf{P} + \mathbf{k})^2 = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{k} + \mathbf{k}^2 = 2\mathbf{P}\mathbf{k} \\
 W^2 &= (\mathbf{P} + \mathbf{q})^2 = \mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2 = 2\frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}}\mathbf{P}\mathbf{k} - Q^2 = y_s - Q^2 \\
 x &= \frac{Q^2}{2\mathbf{P}\mathbf{q}} = \frac{Q^2}{2\frac{\mathbf{P}\mathbf{q}}{\mathbf{P}\mathbf{k}}\mathbf{P}\mathbf{k}} = \frac{Q^2}{y_s}
 \end{aligned}$$

c) Um die Energie und den Winkel des gestreuten Elektrons gut messen zu können, braucht man ein elektromagnetisches Kalorimeter mit guter Energie- und Ortsauflösung. Die Akzeptanz des Kalorimeters sollte möglichst groß sein. Einerseits sollen Elektronen bei kleinen Winkeln θ nachgewiesen werden, weil dies großen Werten von Q^2 und somit einer kleinen de-Broglie-Wellenlänge, also einer guten Auflösung entspricht. Andererseits haben die meisten Ereignisse einen großen Elektronwinkel, da der Wirkungsquerschnitt proportional zu $1/Q^4$ ist.

Um das gestreute Elektron von Photonen unterscheiden zu können, ist es hilfreich, eine Spurkammer vor dem Kalorimeter zu haben. Ein hadronisches Kalorimeter kann verwendet werden, um das gestreute Elektron von Hadronen zu unterscheiden.

d) Einerseits kann das gestreute Elektron außerhalb der Akzeptanz des Detektors sein oder das Elektron wird aufgrund einer Ineffizienz des Detektors nicht nachgewiesen. Andererseits kann das einlaufende Elektron mit dem Proton schwach wechselwirken, wobei ein W -Boson ausgetauscht wird und sich das Elektron in ein Neutrino umwandelt. Das Feynman-Diagramm dieses Prozesses entspricht dem für Elektroneneinfang:



Im Detektor wird das Neutrino nicht direkt nachgewiesen. Einen indirekten Nachweis hat man in der Regel dadurch, dass die transversalen Impulse aller rekonstruierten Teilchen im Endzustand sich nicht zu Null aufaddieren (“missing p_T ”), wie es im Anfangszustand der Fall ist.

e) Falls das Elektron nicht im Detektor nachgewiesen wird, kann die Kinematik auch aus dem Viererimpuls des gestreuten Partons $\mathbf{p}'_{parton}$ und des Protonrests

$\mathbf{P}'_{rest}$ rekonstruiert werden. Der Impulsübertrag ist dann gegeben durch:

$$q = (\mathbf{p}'_{parton} + \mathbf{P}'_{rest}) - \mathbf{P} = \mathbf{P}'_X - \mathbf{P} \quad \text{mit } \mathbf{P}'_X := \mathbf{p}'_{parton} + \mathbf{P}'_{rest}$$

Daraus folgt für die Inelastizität (z -Achse = Protonstrahlrichtung):

$$\begin{aligned} y &= \frac{\mathbf{P} \mathbf{q}}{\mathbf{P} \mathbf{k}} \\ &= \frac{\mathbf{P} \mathbf{P}'_X - \mathbf{P} \mathbf{P}}{\mathbf{P} \mathbf{k}} \\ &= \frac{E_p E'_X - E_p p'_{z,X}}{E_p E_e + E_p E_e} \\ &= \frac{E'_X - p'_{z,X}}{2E_e} \end{aligned}$$

Da man jedoch keine einzelnen Partonen beobachten kann, werden stattdessen die Impulse $\mathbf{p}_i$ aller Teilchen i , die aus den Parton “entstehen” (hadronischer Endzustand genannt), aufaddiert:

$$\mathbf{P}'_X = \sum_i \mathbf{p}_i$$

Damit ergibt sich:

$$y = \frac{\sum_i (E_i - p_{z,i})}{2E_e}$$

Diese Formel zusammen mit der Formel

$$Q^2 = \frac{(\sum_i p_{x,i})^2 + (\sum_i p_{y,i})^2}{1 - y}$$

ist unter der Bezeichnung Jaquet-Blondel-Methode bekannt. Wie man an der Formel sieht, ist diese Bestimmung von y robust gegen Teilchen unter kleinem Winkel, die nicht rekonstruiert werden (z.B. Protonrest), weil in diesem Fall $E_i - p_{z,i} \approx 0$ ist.

Aufgabe 3: Phasenraum beim β -Zerfall

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die Phasenraumdichte dn_i eines Teilchens i mit Impuls p_i im Volumen V gegeben ist durch

$$dn_i(p_i) = \frac{4\pi p_i^2 dp_i V}{(2\pi\hbar)^3} \quad (2)$$

Die Gesamtenergie E ist die Summe der Energien von Elektron (bzw. Positron) und (Anti-)Neutrino:

$$E = E_e + E_\nu$$

Für eine beliebige aber fest vorgegebene Elektronenenergie ist $dE_e = 0$, d.h. $dE = dE_\nu$. Daraus folgt für den Phasenraumfaktor:

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{dn_\nu}{dE_\nu} dn_e \quad (3)$$

Mit Gleichung 2 erhält man für die Zustandsdichte der Neutrinos:

$$\frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{p_\nu^2 dp_\nu}{dE_\nu} \quad (4)$$

Der Neutrinoimpuls ist bei einer Neutrinomasse m_ν gegeben durch:

$$p_\nu = \frac{1}{c} \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{dp_\nu}{dE_\nu} = \frac{E_\nu}{p_\nu c^2} \quad (6)$$

Einsetzen von Gleichung 5 und 6 in Gleichung 4 ergibt:

$$\frac{dn_\nu}{dE_\nu} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \cdot \frac{p_\nu E_\nu}{c^2} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \cdot E_\nu \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2 c^4} = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 c^3} \cdot E_\nu^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_\nu}\right)^2}$$

Daraus folgt mit $E_\nu = E - E_e$ und Gleichung 2 für den Phasenraumfaktor (Gl. 3):

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4\hbar^6 c^3} p_e^2 (E - E_e)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E - E_e}\right)^2} dp_e$$

Für masselose Neutrinos vereinfacht sich die Formel zu:

$$\frac{dn_e \cdot dn_\nu}{dE} = \frac{V^2}{4\pi^4\hbar^6 c^3} p_e^2 (E - E_e)^2 dp_e$$

Nach Fermis goldener Regel unterscheidet sich das Impulsspektrum für massive Neutrinos also um einen energieabhängigen Faktor von dem Spektrum für masselose Neutrinos:

$$N_{m_\nu > 0}(p_e) dp_e = \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E - E_e}\right)^2} \cdot N_{m_\nu = 0}(p_e) dp_e$$

Der Endpunkt des Spektrums hängt von der Neutrinomasse ab. Die maximale Elektronenenergie ist $E_e^{max} = E - m_\nu c^2$. Für kleine Elektronenenergien unterscheiden sich die Spektren für massive und masselose Neutrinos jedoch kaum. Aus der Abweichung des gemessenen Spektrums von Spektrum für $m_\nu = 0$ im Bereich $E_e \rightarrow E_e^{max}$ kann man also auf die Masse des Neutrinos schliessen.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 5

Bearbeitung bis 05.06.2014

Aufgabe 1: Strukturfunktion

(4 Punkte)

Skizzieren Sie die Strukturfunktion des Neutrons $F_2(x)$ für ein festes Q^2 unter der Annahme, dass das Neutron

- a) ein einziges elementares Teilchen ist
- b) aus drei nicht wechselwirkenden Valenzquarks besteht
- c) aus drei wechselwirkenden Valenzquarks besteht
- d) aus Valenz- und Seequarks sowie Gluonen besteht.

Zeichnen Sie zu jedem der vier Fälle ein Feynmandiagramm der en -Streuung. Beschreiben Sie (natürlich dürfen Sie auch Skizzen benutzen) welche Änderungen Sie für ein $\Upsilon(1S)$ -Meson in den 4 Fällen erwarten.

Erklären Sie kurz wie man die Strukturfunktion des Neutrons messen könnte indem man den HERA-Beschleuniger in einem anderen Modus betreibt.

Aufgabe 2: Breit-Wigner-Resonanz

(2 Punkte)

Die neutralen Vektormesonen (ρ^0 , ω , ϕ , J/ψ , Υ) lassen sich in e^+e^- -Speicherringen bei entsprechend gewählter Strahlenergie direkt erzeugen. Die Vektormesonen zerfallen dann wieder in Leptonen oder Hadronen. Für den Wirkungsquerschnitt gilt die relativistische Breit-Wigner-Formel:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) = \frac{\pi(2J+1)}{W^2} \cdot \frac{4m^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(W^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$$

Dabei ist VM das Vektormeson, f der Endzustand (z.B. e^+e^- oder Hadronen), W die Schwerpunktsenergie, m die Masse und J der Spin des Vektormesons, Γ_f die partielle Breite für den Endzustand f und Γ die totale Breite.

Für die $\Upsilon(1S)$ -Resonanz ist die totale Breite $\Gamma = \Gamma_{had} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu}$ wesentlich kleiner als die experimentelle Auflösung aufgrund der Energieunschärfe der Elektron- bzw.

Positron-Strahlen. Die totale und die partiellen Breiten lassen sich trotzdem bestimmen, indem man die gemessenen Wirkungsquerschnitte über den Resonanzbereich integriert:

$$\Sigma_f := \int \sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) dW$$

Zeigen Sie zunächst, dass man in der Nähe der Resonanz ($W \approx m$) folgende Näherung machen kann

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) \approx \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(W-m)^2 + \Gamma^2/4]}$$

Berechnen Sie damit Σ_f , Σ_{ee} und $\Sigma_{tot} = (\Sigma_{had} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{\mu\mu})$ und dann daraus Γ_{ee} , Γ und Γ_f .

Aufgabe 3: Neutrino-Streuprozesse

(1 Punkt)

Geben Sie die Feynmandiagramme (führender Ordnung) für folgende Reaktionen an, bzw. begründen Sie, falls eine der Reaktionen nicht möglich ist

- a) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$
- b) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$
- c) $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$
- d) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$
- e) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$

Aufgabe 4: Kaon-Zerfall und Goldene Regel

(3 Punkte)

Im Povh, Kapitel 10, Aufgabe 4 wird das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten des geladenen Pions in ein Elektron bzw. ein Muon und ein Neutrino berechnet. Ermitteln Sie auf analoge Weise das Verhältnis

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+\nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu)}$$

Verwenden Sie dabei Fermis Goldene Regel: $\Gamma(K^+ \rightarrow l^+\nu_l) \propto |M_{Kl}|^2 \rho(E_0)$.

Berechnen Sie als Funktionen der Kaonmasse $m_K = 493.6 \text{ MeV}/c^2$ und der Leptonmass m_l

- den Impuls und die Energie des geladenen Leptons
- das Verhältnis der Matrixelementsquadrate unter Verwendung der Beziehung $|M_{Kl}|^2 \propto 1 - v/c$

- das Verhältnis der Zustandsdichten $\rho_e(E_0)/\rho_\mu(E_0)$
- das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten.

Vergleichen Sie das Verhältnis mit den experimentell gemessenen Verzweigungsverhältnissen von $\mathcal{B}(K^+ \rightarrow e^+\nu_e) = \Gamma(K^+ \rightarrow e^+\nu_e)/\Gamma = (1.55 \pm 0.07) \cdot 10^{-5}$ und $\mathcal{B}(K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu) = (63.43 \pm 0.17) \%$.

Berechnen Sie das Verhältnis auch für D_s -Mesonen und prüfen sie die Kompatibilität ihres Ergebnisses mit den Werten der Particle Data Group.

<http://pdg8.lbl.gov/rpp2013v2/pdgLive/Viewer.action>

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

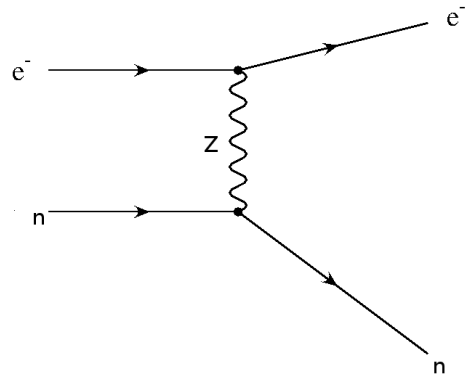
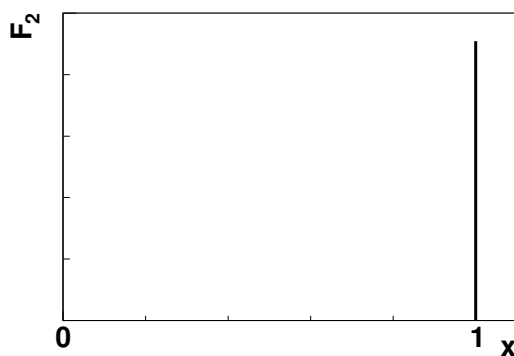
Übungsblatt Nr. 5

Musterlösungen

Aufgabe 1: Strukturfunktion

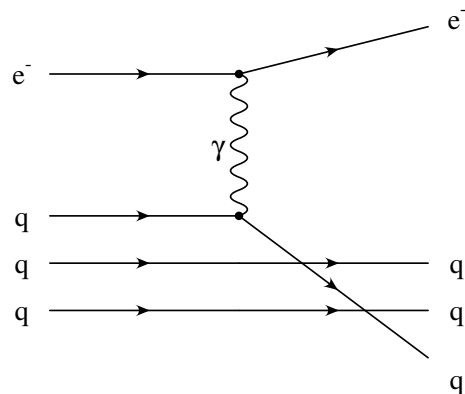
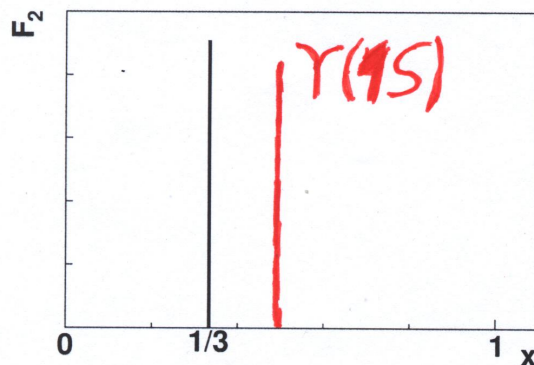
Die Strukturfunktion $F_2(x)$ ist durch die Impulsdichteverteilung der Partonen, an denen gestreut wird, bestimmt.

- a) Wenn das Neutron ein elementares Teilchen ist, hat es keine Struktur und das an der Reaktion teilnehmende "Parton" trägt den gesamten Impuls des Neutrons, d.h. F_2 ist eine Deltafunktion bei $x = 1$.



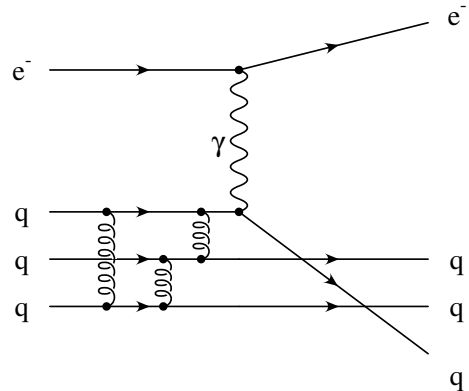
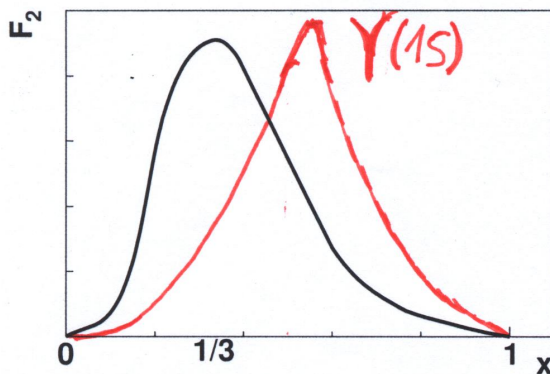
Das gleiche gälte auch für ein $\Upsilon(1S)$ -Meson. Bezüglich des Feynman-Graphen benennen wir hier das Austauschteilchen Z , da ein Neutron natürlich als elementares Teilchen nicht mit einem Photon wechselwirken würde.

- b) Bei drei nicht wechselwirkenden Partonen trägt jedes davon jeweils ein Drittel des Neutronimpulses.



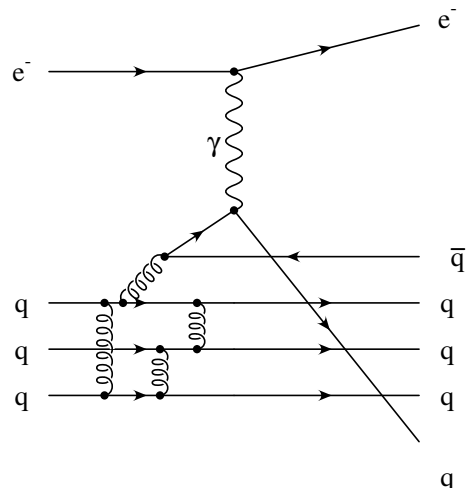
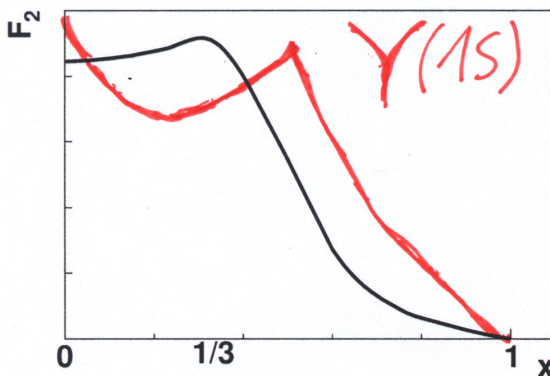
Das $\Upsilon(1S)$ -Meson besteht nur aus 2 Partonen ($b, \bar{b}$), die auch die gleiche Masse haben). Daher trägt jedes Parton die Hälfte des Impulses.

- c) Durch die Wechselwirkung unter den Partonen wird die Impulsverteilung um $x = 1/3$ herum verschmiert.



Für das $\Upsilon(1S)$ -Meson gilt in diesem Fall, dass es ebenfalls eine Verschmierung gibt, allerdings sollte sie symmetrisch um 0,5 sein. (Die Zeichnung trägt dessen nur im Rahmen der Genauigkeit einer Handzeichnung Rechnung.)

- d) Dadurch, dass die Seequarks hinzukommen, die in der Regel einen kleinen Impulsanteil haben, gibt es einen zusätzlichen Beitrag zu F_2 bei kleinen x .



In diesem Fall spielt die hohe Masse der Valenz-Quarks des $\Upsilon(1S)$ -Mesons eine Rolle. Die Seequarks und Gluonen sollten daher in ihrer x -Verteilung etwas in Richtung kleinerer x -Werte verzerrt sein.

- e) Man hätte den HERA-Beschleuniger auch mit Deuterium statt mit Protonen betreiben können. Die Elektronen würden typischerweise entweder mit dem Proton oder dem Neutron des Deuterium wechselwirken. Zöge man die bekannten Verteilungen aus der Protonwechselwirkung ab, erhielte man die Verteilungen für Neutronen.

In der Tat war das vor der Schließung von HERA angedacht. Man hat sich aber letztlich dagegen entschieden, weil man zu wenig neue Erkenntnisse aus der Vermessung des Neutrons gewonnen hätte, wenn man von der Isospin-Symmetrie der starken Wechselwirkung überzeugt ist.

Aufgabe 2: Breit-Wigner-Resonanz

In der Nähe der Resonanz ($W \approx m$) ist $W + m \approx 2m$ und $W^2 \approx m^2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) &= \frac{\pi(2J+1)}{W^2} \cdot \frac{4m^2\Gamma_{ee}\Gamma_f}{(W^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{W^2[(W+m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
 &\approx \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(2m)^2(W-m)^2/4m^2 + \Gamma^2/4]} \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2[(W-m)^2 + \Gamma^2/4]}
 \end{aligned}$$

Mit dieser Formel ergibt sich für Σ_f :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_f &= \int \sigma(e^+e^- \rightarrow VM \rightarrow f) dW \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \int \frac{1}{(W-m)^2 + \Gamma^2/4} dW \quad \text{Subst: } x = (W-m) \cdot 2/\Gamma \\
 &= \frac{\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2} \frac{2}{\Gamma} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{2\pi(2J+1)\Gamma_{ee}\Gamma_f}{m^2\Gamma} [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\
 &= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}\Gamma_f}{\Gamma}
 \end{aligned}$$

Für Σ_{tot} folgt:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{tot} &= \Sigma_{had} + \Sigma_{ee} + \Sigma_{\mu\mu} \\
 &= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot [\Gamma_{had} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu}] \\
 &= \frac{2\pi^2(2J+1)}{m^2} \cdot \Gamma_{ee}
 \end{aligned}$$

Da das $\Upsilon(1S)$ -Teilchen den Spin $J = 1$ hat ergibt sich daraus für die partielle Zerfallsbreite in Elektronen:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{tot} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \Gamma_{ee} \\
 \Rightarrow \Gamma_{ee} &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \Sigma_{tot}
 \end{aligned}$$

Die totale Breite ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ee} &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Gamma} \\ \Rightarrow \Gamma &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}^2}{\Sigma_{ee}} = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}^2}{\Sigma_{ee}}\end{aligned}$$

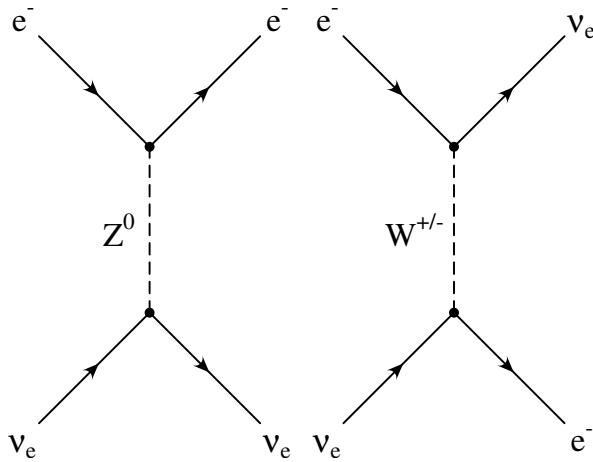
Für die partielle Zerfallsbreite Γ_f erhält man:

$$\begin{aligned}\Sigma_f &= \frac{6\pi^2}{m^2} \cdot \frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma} \cdot \Gamma_f \\ \Rightarrow \Gamma_f &= \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma_{ee}} \cdot \Sigma_f = \frac{m^2}{6\pi^2} \cdot \frac{\Sigma_{tot}}{\Sigma_{ee}} \cdot \Sigma_f\end{aligned}$$

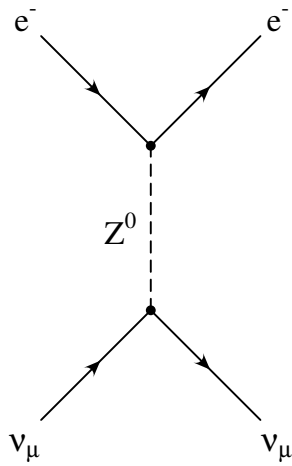
Anmerkung: Vor zwei Jahren wurde das J/ψ verwendet, was aber die gleichen Quantenzahlen hat. Es sind lediglich die charm-Quarks durch b-Quarks ersetzt worden.

Aufgabe 3: Neutrino-Streuprozesse

a) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$



b) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$



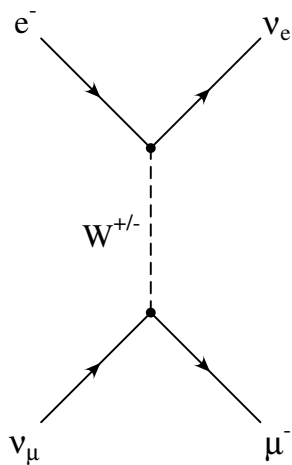
c) $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 1$ und $L_\mu = -1$.

d) $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_\mu + \mu^-$

Diese Reaktion ist nicht möglich, da die Leptonenfamilienzahl nicht erhalten ist. Im Anfangszustand ist $L_e = 2$ und $L_\mu = 0$ und im Endzustand ist $L_e = 0$ und $L_\mu = 2$.

e) $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$



Aufgabe 4: Kaon-Zerfall und Goldene Regel

Im Ruhesystem des Kaons ist aufgrund der Impulserhaltung $|p_l| = |p_\nu| =: p$. Aus der Energieerhaltung folgt:

$$E_0 := m_K = E_\nu + E_l = p + \sqrt{p^2 + m_l^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (m_K - p)^2 = m_K^2 - 2m_K p + p^2 = p^2 + m_l^2 \\
&\Rightarrow p = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K}
\end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich für die Energie des Leptons:

$$\begin{aligned}
E_l &= \sqrt{p^2 + m_l^2} \\
&= \frac{1}{2m_K} \sqrt{m_K^4 - 2m_K^2 m_l^2 + m_l^4 + 4m_K^2 m_l^2} \\
&= \frac{1}{2m_K} \sqrt{(m_K^2 + m_l^2)^2} \\
&= \frac{m_K^2 + m_l^2}{2m_K}
\end{aligned}$$

Aus Impuls und Energie lässt sich die Geschwindigkeit berechnen:

$$\beta_l = \frac{v_l}{c} = \frac{p}{E_l} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \cdot \frac{2m_K}{m_K^2 + m_l^2} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{m_K^2 + m_l^2}$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Matrixelementsquadrate:

$$\frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} = \frac{1 - \beta_e}{1 - \beta_\mu} = \frac{(m_K^2 + m_e^2 - m_K^2 + m_e^2)/(m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 + m_\mu^2 - m_K^2 + m_\mu^2)/(m_K^2 + m_\mu^2)} = \frac{m_e^2 m_K^2 + m_\mu^2}{m_\mu^2 m_K^2 + m_e^2} = 2.45 \cdot 10^{-5}$$

Die Zustandsdichte ist proportional zu $p^2 dp/dE_0$ mit $E_0 = E_\nu + E_l = m_K$. Aus Gleichung 1 ergibt sich:

$$\frac{dp}{dE_0} = \frac{d}{dE_0} \frac{E_0^2 - m_l^2}{2E_0} = \frac{d}{dE_0} \frac{1}{2} \left(E_0 - \frac{m_l^2}{E_0} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_l^2}{E_0^2} \right)$$

Mit $E_0 = m_K$ folgt:

$$p^2 \frac{dp}{dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2}{4m_K^2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m_l^2}{m_K^2} \right) = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_l^2)}{8m_K^4}$$

Das Verhältnis der Zustandsdichten ist also:

$$\frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = \frac{p_e^2 dp_e/dE_0}{p_\mu^2 dp_\mu/dE_0} = \frac{(m_K^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 - m_\mu^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_\mu^2)} = 1.05$$

Damit erhält man für das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten:

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{|M_{Ke}|^2}{|M_{K\mu}|^2} \cdot \frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = 2.57 \cdot 10^{-5}$$

Da das Verzweungsverhältnis proportional zur partiellen Zerfallsbreite ist, ist dieser Wert zu vergleichen mit

$$\frac{\mathcal{B}(K^+ \rightarrow e^+ \nu_e)}{\mathcal{B}(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu)} = \frac{1.55 \cdot 10^{-5}}{0.6343} = 2.44 \cdot 10^{-5}.$$

Die Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert ist also recht gut.

Für D_s -Mesonen können die gleichen Formeln verwendet werden.

$$\frac{|M_{D_se}|^2}{|M_{D_s\mu}|^2} = \frac{1 - \beta_e}{1 - \beta_\mu} = \frac{m_e^2 m_{D_s}^2 + m_\mu^2}{m_\mu^2 m_{D_s}^2 + m_e^2} = 2.35 \cdot 10^{-5}$$

Man sieht der Formel auch direkt an, dass bei großen Massen des zerfallenden Teilchens der Einfluss der addierten Leptonen- Massen gering ist und entsprechend ein ähnlicher Wert herauskommt.

$$\frac{\rho_e(E_0)}{\rho_\mu(E_0)} = \frac{(m_{D_s}^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_{D_s}^2 + m_e^2)}{(m_{D_s}^2 - m_\mu^2)^2 \cdot (m_{D_s}^2 + m_\mu^2)} = 1.003$$

und somit gilt für das Verhältnis insgesamt $2.35 \cdot 10^{-5}$.

Das Verzweigungsverhältnis für den myonischen Modus ist $(5.90 \pm 0.33) \cdot 10^{-3}$. Man erwartet also für den elektronischen Modus ein Verzweigungsverhältnis von etwa 10^{-7} , gemessen ist bisher, dass dieses Verhältnis kleiner als $1.2 \cdot 10^{-4}$ ist. Das Ergebnis ist also kompatibel, aber es gibt auch noch keine hinreichend genaue Messung, um die Theorie ernsthaft zu testen.

Nicht in der Aufgabe gefordert, aber interessant ist der tauonische Zerfallsmodus. In dem Fall ist das Matrixelementverhältnis 0.0064 zu Ungunsten der Myonen, das Phasenraumverhältnis 16 zu Gunsten der Myonen und das Verhältnis der Breite von myonischem Modus zu tauonischem Modus 0.102, und stimmt damit ebenfalls gut mit dem Experiment überein. Der gemessenen Wert für $D_s \rightarrow \tau \nu$ ist $(5.43 \pm 0.31)\%$. Interessanterweise ist der D_s -Zerfall die dominante Quelle für Tau-Leptonen beim LHC-Experiment.

Hier ein kleines Python Skript für Leute die selber noch was rechnen wollen:

```
#!/usr/bin/env python
mass_Ds = 1968.5
mass_e = 0.511
mass_mu = 105.658

R_M = (mass_e**2 * (mass_Ds**2 + mass_mu**2)) / \
      (mass_mu**2 * (mass_Ds**2 + mass_e**2))
R_rho = ((mass_Ds**2 - mass_e**2)**2 * (mass_Ds**2 + mass_e**2)) / \
        ((mass_Ds**2 - mass_mu**2)**2 * (mass_Ds**2 + mass_mu**2))

print R_M
print R_rho

print R_M * R_rho
```

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 6

Bearbeitung bis 11.06.2014

Aufgabe 1: D_s^+ -Zerfall

(2 Punkte)

Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für die Zerfälle des D_s^+ -Mesons (Quarkzusammensetzung $c\bar{s}$) in $\phi\pi^+$ bzw. $K_S\pi^+$. Schätzen Sie die Größenordnung des Verhältnisses der partiellen Breiten $\Gamma(D_s^+ \rightarrow \phi\pi^+)/\Gamma(D_s^+ \rightarrow K_S\pi^+)$ ab. [1 Punkt]

Vergleichen Sie Ihre Abschätzung mit den experimentell gemessenen Werten (<http://pdg.lbl.gov/>). [0.5 Punkte]

Nennen Sie weitere Effekte, die man berücksichtigen müsste, um den Wert exakt zu ermitteln. [0.5 Punkte für 2 Effekte]

Aufgabe 2: Parität und C -Parität

(2 Punkte)

Das K^+ -Meson hat Spin 0 und zerfällt hauptsächlich durch die Reaktion $K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$. Skizzieren Sie die Richtung des Impulses und des Spins von Myon und Neutrino im Ruhesystem des Kaons. Wenden Sie auf diesen Zerfallsprozess nun jeweils den Paritätsoperator P , den C -Paritätsoperator C sowie die Kombination beider Operatoren CP an und skizzieren Sie die daraus resultierenden Impulse und Spins. Welche dieser drei resultierenden Reaktionen treten nicht auf und warum? [1 Punkt]

Schätzen Sie das Verhältnis der Zerfallsbreiten für $B \rightarrow \mu\nu$ zu $B \rightarrow \mu\nu\gamma$ für ein hochenergetisches Photon grob ab. [1 Punkt]

Aufgabe 3: Parität und Drehimpuls

(3 Punkte)

Die Reaktion $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ verläuft bei einer Schwerpunktsenergie von 1232 MeV praktisch vollständig über die Bildung eines resonanten Zwischenzustandes, der Deltaresonanz $\Delta^{++}(1232)$ (Spin $3/2$, Parität $+1$, Zerfallsbreite 120 MeV).

- Bei welchem Impuls des einlaufenden Pions liegt das Maximum der Resonanz, wenn das Proton im Laborsystem ruht? Welche Lebensdauer hat die Deltaresonanz? [1 Punkt]
- Bei welchem Bahndrehimpuls des π^+p -Systems tritt die Resonanz auf? [0.5 Punkte]

- c) Diskutieren Sie kurz 3 Möglichkeiten die totale Zerfallsbreite von Teilchen zu messen, und klassifizieren Sie diese danach, für welche Breiten sich die Möglichkeit eignet. [1.5 Punkte]

Aufgabe 4: Teilchenreaktionen

(3 Punkte)

Begründen Sie, weshalb folgende Reaktionen nicht erlaubt, bzw. stark unterdrückt sind:

- a) $J/\psi \rightarrow \gamma + \gamma$
- b) $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$
- c) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$
- d) $\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
- e) $p \rightarrow n + \pi^+$
- f) $p + \pi^+ \rightarrow K^+ + \Lambda^0$

Geben Sie die Art der (dominierenden) Wechselwirkung folgender Reaktionen an:

- g) $n + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + p$
- h) $J/\psi \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
- i) $\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$
- j) $\bar{\Sigma}^0 \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \gamma$
- k) $\nu_e + p \rightarrow e^- + \pi^+ + p$
- l) $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
- m) $p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$
- n) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$
- o) $\bar{\Delta}^0 \rightarrow \bar{n} + \pi^0$

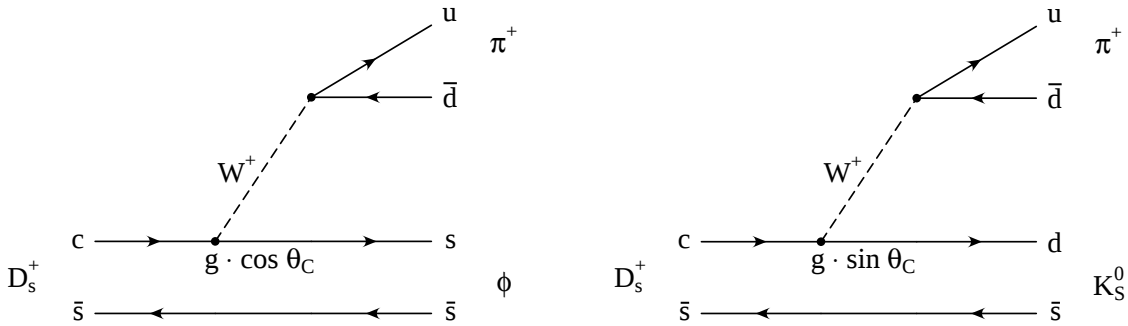
Geben Sie außerdem für alle Reaktionen die Quarkzusammensetzung der beteiligten Hadronen an.

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 6

Musterlösungen

Aufgabe 1: D_s^+ -Zerfall



Der Zerfall in $K_S\pi$ ist Cabibbo-unterdrückt. Näherungsweise erwartet man:

$$\frac{\Gamma(D_s^+ \rightarrow \phi\pi^+)}{\Gamma(D_s^+ \rightarrow K_S\pi^+)} \approx \frac{\cos^2 \theta_C}{\sin^2 \theta_C} = \frac{1}{\tan^2 \theta_C} \approx 20$$

Experimentell ist der Zerfallskanal $D_s^+ \rightarrow \phi\pi^+$ mit $(4.5 \pm 0.4)\%$ gemessen und der Kanal $D_s^+ \rightarrow K_S\pi^+$ mit $(1.21 \pm 0.08) \cdot 10^{-3}$. Die Unterdrückung ist also noch etwas stärker, was natürlich auch daran liegt, dass neben K_S noch K_L gleichberechtigt produziert werden.

Einige weitere Effekte, die Einfluss haben:

Phasenraum; Unterschiede bei der Hadronisierung (also z.B. der Wahrscheinlichkeit für das entstehen zusätzlicher Pionen im Endzustand); Unterschiede bei der Wahrscheinlichkeit einen angeregten Zustand zu erreichen etc.;

Aufgabe 2: Parität und C-Parität

Da das Kaon Spin 0 hat, müssen die Spins von Muon und Neutrino antiparallel sein. Außerdem muss der Spin des Neutrinos antiparallel zu seinem Impuls sein, da es linkshändig und masselos ist. Damit erhält man folgendes Bild für die Impulse $\longrightarrow$ und Spins $\Rightarrow$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mu^+ \xleftarrow{\quad} K^+ \xrightarrow{\quad} \nu_\mu & \xrightarrow{P} & \nu_\mu \xleftarrow{\quad} K^+ \xrightarrow{\quad} \mu^+ \\
 \Rightarrow & & \Leftarrow & & \Rightarrow \\
 \downarrow & \searrow & & \searrow & \downarrow \\
 C & CP & & CP & C \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \mu^- \xleftarrow{\quad} K^- \xrightarrow{\quad} \bar{\nu}_\mu & \xrightarrow{P} & \bar{\nu}_\mu \xleftarrow{\quad} K^- \xrightarrow{\quad} \mu^- \\
 \Rightarrow & & \Leftarrow & & \Rightarrow
 \end{array}$$

Der Paritätsoperator ändert die Impulsrichtung der Teilchen, nicht jedoch deren Spinausrichtung. Dadurch erhält man ein rechtshändiges Neutrino, das es laut Standardmodell nicht gibt.

Der C -Operator wandelt Teilchen in ihre Antiteilchen um, ändert die Impulse und Spins aber nicht. Somit hat man ein Antineutrino mit negativer Helizität, was experimentell nicht beobachtet wird.

Die Anwendung von P - und C -Operator zusammen ergibt jedoch wieder eine erlaubte Reaktion.

Genaugenommen wandelt der C -Operator Teilchen nicht in ihre Antiteilchen im Sinne der Quantenfeldtheorie um, da die Chiralität der Teilchendefinition ist und somit auch umgedreht werden muss, wenn man das echte Antiteilchen haben will. Für das korrekte Verständnis der Situation ist die vereinfachte obige Darstellung aber hinreichend.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Spin-Flip liegt in der Größenordnung $1 - \beta$. Letzte Woche haben wir als Formel errechnet: $\beta_l = \frac{m_K^2 - m_l^2}{m_K^2 + m_l^2}$.

Durch das Photon wird die Helizitätsunterdrückung aufgehoben, das Matrixelement bekommt aber einen zusätzlichen Faktor $\alpha = \frac{1}{137}$. Wenn wir nun Änderungen im Phasenraum etc. ignorieren und einfach nur die Wahrscheinlichkeit ausrechnen

$$\frac{BR(B \rightarrow \mu\nu)}{BR(B \rightarrow \mu\nu\gamma)} \approx \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

erwarten wir sogar ein rund 9 mal größeres Verzweungsverhältnis für den Zerfall mit dem Photon. Die ignorierten Effekte reduzieren dieses Verhältnis zwar wieder, aber in der Tat gleichen sich die Effekte weitgehend aus. Experimentell ist bisher

übrigens weder der eine noch der andere Zerfall beobachtet worden, aber wir sind möglicherweise kurz davor. *In der ersten hochgeladenen Version war fälschlicherweise ein Faktor α^2 und eine Multiplikation statt einer Division in der Formel.*

Aufgabe 3: Parität und Drehimpuls

- a) Für das Quadrat der Schwerpunktsenergie s gilt:

$$\begin{aligned} s &= (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_\pi)^2 = (m_p + \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2})^2 - p_\pi^2 = m_p^2 + 2m_p\sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2} + p_\pi^2 + m_\pi^2 - p_\pi^2 \\ \Rightarrow 4m_p^2(p_\pi^2 + m_\pi^2) &= (s - m_p^2 - m_\pi^2)^2 \\ \Rightarrow p_\pi &= \sqrt{\frac{(s - m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4m_p^2}} - m_\pi = 298.3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Die Lebensdauer τ ergibt sich aus der Zerfallsbreite Γ :

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = 5.5 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

Diese sehr kurze Lebensdauer zeigt, dass es sich um einen Prozess der starken Wechselwirkung handelt.

- b) Das Pion hat Spin 0 und das Proton Spin $1/2$. Der Gesamtspin S ist also $1/2$. Um auf den Spin $J = L + S = 3/2$ der Deltaresonanz zu kommen, muss der Bahndrehimpuls L entweder 1 oder 2 sein.

Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, wird die Parität betrachtet. Die Parität des $p\pi$ -Systems $P_{p\pi}$ setzt sich zusammen aus der Parität des Proton $P_p = +1$, der Parität des Pion $P_\pi = -1$ und der Bahndrehimpuls-komponente $(-1)^L$:

$$P_{p\pi} = P_p \cdot P_\pi \cdot (-1)^L = (-1)^{L+1}$$

D.h. für $L = 1$ ist $P_{p\pi} = +1$ und für $L = 2$ ist $P_{p\pi} = -1$. Da die Parität in der starken Wechselwirkung erhalten ist und die Deltaresonanz positive Parität hat, muss also $L = 1$ sein.

- c) Für Teilchen mit Lebensdauern im Bereich von ps bis ns ist es möglich die Lebensdauer zu messen, indem man die Zerfallslänge und den Impuls misst. So wurde beispielsweise die Breite für B -, D -Mesonen, und Kaonen gemessen. Mit Beschleunigern, bei denen man die Strahlenergie sehr genau misst, kann man Resonanzscans auch noch im Bereich von Breiten mit einigen keV machen. Mit dieser Methode wurde z.B. die genaueste Messung der J/Ψ Breite durchgeführt.

Bei Breiten von mindestens etwa 1 MeV, kann man die Breite direkt aus dem Spektrum der Zerfallsteilchen bestimmen.

Aufgabe 4: Teilchenreaktionen

- a) $J/\psi[c\bar{c}] \rightarrow \gamma + \gamma$
 C -Parität nicht erhalten ($C_\gamma = C_{J/\psi} = -1$), Zerfall nur über W-Boxdiagramm möglich
- b) $\nu_\mu + p[uud] \rightarrow \mu^+ + n[udd]$
Leptonenzahl nicht erhalten
- c) $e^- + \gamma \rightarrow e^-$
Energie- und Impulserhaltung nicht erfüllt (für freie e^-)
- d) $\Lambda^0[uds] \rightarrow \pi^+[u\bar{d}] + e^- + \bar{\nu}_e$
Baryonenzahl nicht erhalten
- e) $p[uud] \rightarrow n[udd] + \pi^+[u\bar{d}]$
Energie nicht erhalten ($m_p < m_n + m_\pi$)
- f) $p[uud] + \pi^+[u\bar{d}] \rightarrow K^+[u\bar{s}] + \Lambda^0[uds]$
Ladung nicht erhalten
- g) $n[udd] + p[uud] \rightarrow \Lambda^0[uds] + K^0[d\bar{s}] + p[uud]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)
- h) $J/\psi[c\bar{c}] \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung ($\gg Z^0$ -Beitrag)
- i) $\tau^- \rightarrow \pi^-[\bar{u}d] + \nu_\tau$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino)
- j) $\bar{\Sigma}^0[\bar{u}\bar{d}\bar{s}] \rightarrow \bar{\Lambda}^0[\bar{u}\bar{d}\bar{s}] + \gamma$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)
- k) $\nu_e + p[uud] \rightarrow e^- + \pi^+[u\bar{d}] + p[uud]$
Schwache Wechselwirkung (Neutrino)
- l) $\pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}] \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$
Elektromagnetische Wechselwirkung (Photon)
- m) $p[uud] + K^-[\bar{u}s] \rightarrow \Sigma^+[uus] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^+[u\bar{d}] + \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)
- n) $K^-[\bar{u}s] \rightarrow \pi^-[\bar{u}d] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Schwache Wechselwirkung (Änderung der Strangeness)
- o) $\bar{\Delta}^0[\bar{u}\bar{d}\bar{d}] \rightarrow \bar{n}[\bar{u}\bar{d}\bar{d}] + \pi^0[(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}]$
Starke Wechselwirkung (Strangeness und Isospin erhalten)

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 7

Bearbeitung bis 25.06.2014

Aufgabe 1: Anzahl der Farben in der QCD

(3 Punkte)

A priori ist nicht klar, wieviele Farbfreiheitsgrade es in der Quantenchromodynamik eigentlich gibt. Da Baryonen aus 3 Quarks bestehen, liegt der Verdacht nahe, das es insgesamt 3 verschiedene Farben gibt. Leptonen und Quarks sind beides fundamentale Spin-1/2-Teilchen und koppeln als solche nach den Regeln der QED an Photonen.

Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ berechnet sich dann nach den gleichen Formeln wie der für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Die jeweiligen Wirkungsquerschnitte ergeben sich aus:

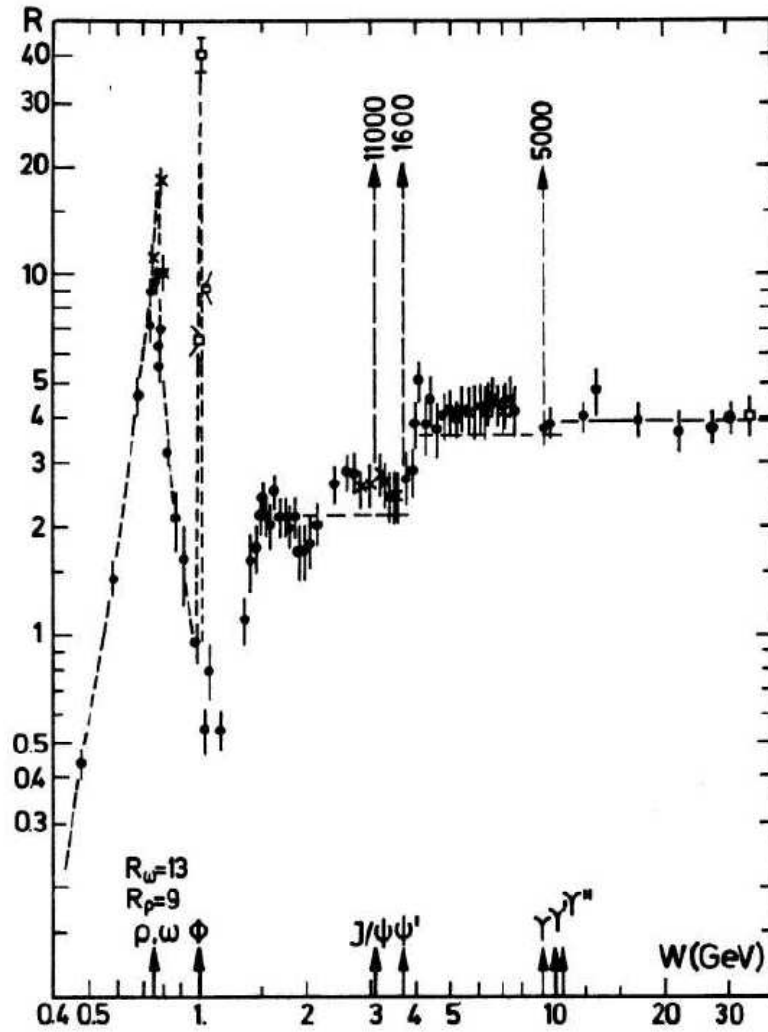
$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}; \sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_q^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi}\right]$$

mit $\sqrt{s} = 2E$ = Schwerpunktsenergie im e^+e^- -Speicherring, Q_q = Quarkladung (in Einheiten der Elementarladung e). Der Term in der eckigen Klammer ist ungefähr 1.06 (QCD-Vakuumpolarisation). Aus dem Verhältnis der gemessenen Wirkungsquerschnitte bei unterschiedlichen Energien lässt sich dann auf die Anzahl der Farben schließen.

a) Berechnen Sie das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

Beim Wirkungsquerschnitt der Hadronenproduktion müssen Sie über alle Quark-Flavor summieren, die bei der entsprechenden Energie zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Führen Sie auch einen Faktor für die Anzahl an Farben ein. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit den Messwerten für R im Bereich $W = \sqrt{s} > 1$ GeV ausserhalb der bekannten Resonanzen und bestimmen Sie daraus die Anzahl an Farben.



- b) Die gestrichelte waagrechte Linie gibt die erwarteten Werte für R bei 3 Farben an. Es ist zu erkennen, dass die Messpunkte für $\sqrt{s} \geq 4.0$ GeV etwas oberhalb dieser Linie liegen. Grund hierfür ist die Hadronenproduktion über den Kanal $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$, bei dem eines oder beide τ -Leptonen in Hadronen zerfallen. Berechnen Sie R erneut unter Einbeziehung dieses Kanals.

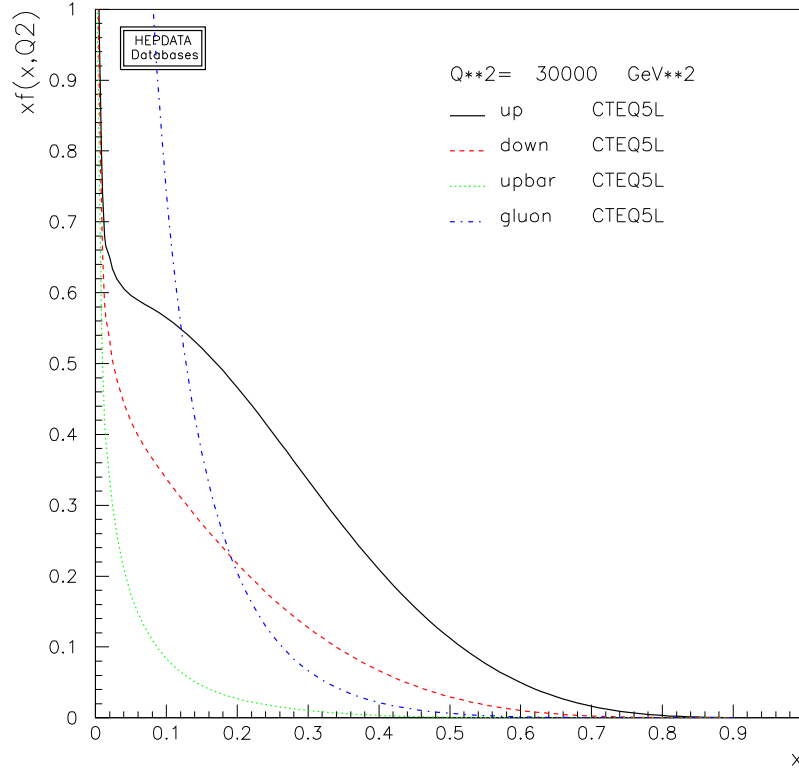
Aufgabe 2: Top-Quark-Produktion am Tevatron

(5 Punkte)

Am Tevatron-Beschleuniger kollidieren Protonen und Antiprotonen bei einer Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 1.96$ TeV. Dort wurde 1995 das Top-Quark ($m_t = 175$ GeV) entdeckt.

- a) Top-Quarks werden am Tevatron hauptsächlich als $t\bar{t}$ -Paare durch die starke Wechselwirkung erzeugt. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme führender Ordnung für $t\bar{t}$ -Produktion.

- b) Die Schwerpunktsenergie des Parton-Parton-Systems hängt von der Bjorkenschen Skalenvariable von Proton x_p und Antiproton $x_{\bar{p}}$ ab. Wie groß muss x mindestens sein, damit $t\bar{t}$ -Paare erzeugt werden können, wenn $x := x_p = x_{\bar{p}}$ ist?



Begründen Sie anhand der Abbildung, die die Impulsdichteverteilung der Partonen im Proton in Abhängigkeit von x zeigt, welcher der in Aufgabenteil a) ermittelten Prozesse der dominante sein sollte. Welchen dominanten $t\bar{t}$ -Produktionsprozess erwarten Sie am LHC-Beschleuniger, wo Protonen (pp) bei einer Schwerpunktsenergie von 7 TeV zur Kollision gebracht werden?

- c) Das Top-Quark zerfällt praktisch sofort ($\tau = 4.7 \cdot 10^{-25}$ s), so dass sein Zerfall als Zerfall eines freien Quarks betrachtet werden kann. Über welche Wechselwirkung zerfällt das Top-Quark? Zeichnen Sie ein Feynmandiagramm und begründen Sie die kurze Lebensdauer. Warum haben b -Quarks (bzw. Hadronen mit b -Quarks) eine deutlich längere Lebensdauer von etwa $1.5 \cdot 10^{-12}$ s, die sogar größer ist als die von c -Quarks (bzw. Hadronen mit c -Quarks)?
- d) Diskutieren Sie, wie man $t\bar{t}$ -Paare in einem Detektor nachweisen kann. Welche Signaturen (Zerfallskanäle) gibt es und welche Vor- bzw. Nachteile haben diese?
- e) Um die Masse des Top-Quarks messen zu können, muss bei einem semileptonischen Zerfall des t -Quarks der Impuls des Neutrinos rekonstruiert werden. Unter der Voraussetzung, dass die Impulse aller anderen Teilchen bekannt

sind, kann der Neutrinoimpuls berechnet werden. Dabei gibt es jedoch zwei mögliche Lösungen. Geben Sie die Formel für diese beiden Lösungen an.

Aufgabe 3: Isospin

(2 Punkte)

- a) Proton und Neutron bilden ein Isospin-Dublett. Bestimmen Sie die möglichen Isospinzustände (I und I_3) von

$$p + p, \quad p + n, \quad n + n$$

Begründen Sie, weshalb das Deuteron ein Isospin-Singulett sein muss.

- b) Welchen Isospinzustand hat demnach $d + \pi^+$, $d + \pi^0$, $d + \pi^-$? Ermitteln Sie unter Ausnutzung der Isospininvarianz der starken Wechselwirkung das Verhältnis

$$\sigma(pp \rightarrow d\pi^+) : \sigma(pn \rightarrow d\pi^0) : \sigma(nn \rightarrow d\pi^-)$$

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 7

Musterlösungen

Aufgabe 1: Anzahl der Farben in der QCD

- a) Wenn wir über alle $q\bar{q}$ Endkanäle summieren ergibt sich für R :

$$R = 1.06 \sum_{\text{Farben}} \sum_{\text{Flavours}} Q_q^2 = 1.06 \cdot N_f \cdot \sum_{\text{Flavours}} Q_q^2$$

Je nach Schwerpunktsenergie tragen unterschiedlich viele Quark-Flavour zu der Summe über die Quarkladungen bei:

$$\sqrt{s} \leq 4 \text{ GeV} : \sum Q_q^2 = Q_d^2 + Q_u^2 + Q_s^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$4 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 11 \text{ GeV} : \sum Q_q^2 = Q_d^2 + Q_u^2 + Q_s^2 + Q_c^2 = \frac{10}{9}$$

$$\sqrt{s} \geq 11 \text{ GeV} : \sum Q_q^2 = Q_d^2 + Q_u^2 + Q_s^2 + Q_c^2 + Q_b^2 = \frac{11}{9}$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den experimentellen Resultaten, lässt sich schliessen, dass $N_f = 3$ am Besten die Daten reproduziert.

- b) Für die Region $\sqrt{s} \geq 4 \text{ GeV}$ beträgt der experimentelle Wert $R \approx 4.0 - 4.5$, während der erwartete Wert 3.5 ist. In dieser Region können Hadronen auch aus $\tau^+\tau^-$ Paaren stammen, deshalb müssen wir diesen Beitrag auch berücksichtigen:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) + \sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

Da der Wirkungsquerschnitt σ nur von der Ladung abhängt und die τ -Teilchen wie die Myonen auch Leptonen sind, folgt:

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 1$$

Da τ^- sowohl leptonisch in $\nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$ und $\nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu$ als auch hadronisch in $\nu_\tau \bar{u}d$ zerfallen können und da aufgrund der Farbe der hadronische Zerfall etwa ein Faktor 3 grösser ist als der leptonische Zerfall, ergibt sich $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \text{Hadronen}) \approx$

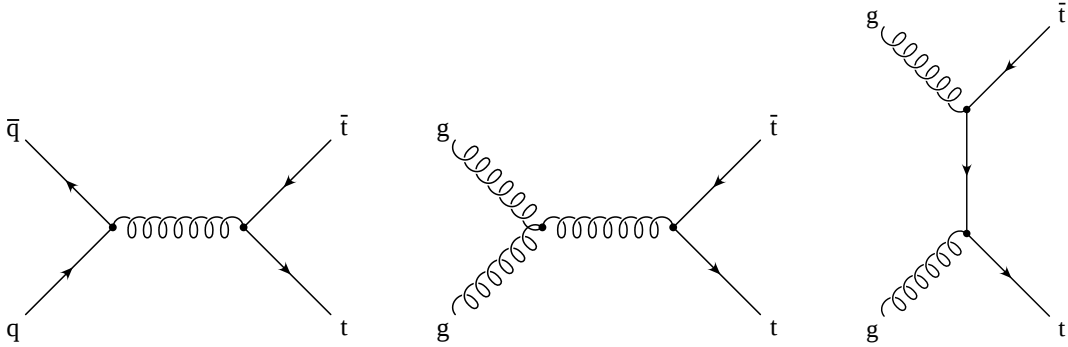
3/5. Massen- und Strahlungskorrekturen ändern das Ergebnis leicht. Der Zerfall von $\tau^+\tau^-$ in Hadronen impliziert Zerfälle bei denen ein Tau leptonisch zerfällt und das andere hadronisch (Rate: 12/25) und Zerfälle bei denen beide Taus hadronisch zerfallen (Rate: 9/25). Dies ergibt dann eine totale Rate von $21/25 = 0.84$. Mit diesem Wert ergibt sich für R :

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} + \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 1.06 \cdot 3 \cdot \frac{10}{9} + \frac{21}{25} = 4.37$$

was gut mit dem experimentellen Befund übereinstimmt.

Aufgabe 2: Top-Quark-Produktion am Tevatron

- a) $t\bar{t}$ -Paare werden durch die Annihilation von Quark-Antiquark-Paaren oder durch die Fusion von Gluonen erzeugt:



- b) Da x den Impulsanteil des Partons angibt, gilt für das Quadrat der Schwerpunktsenergie in Parton-Parton-System $\hat{s}$ bei $x = x_p = x_{\bar{p}}$:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (\mathbf{p}_{p\text{-parton}} + \mathbf{p}_{\bar{p}\text{-parton}})^2 = (x_p \cdot \mathbf{p}_p + x_{\bar{p}} \cdot \mathbf{p}_{\bar{p}})^2 = x^2 \cdot (\mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{p}})^2 \\ &= x^2 \cdot s \\ \Rightarrow \sqrt{\hat{s}} &= x \cdot \sqrt{s} \end{aligned}$$

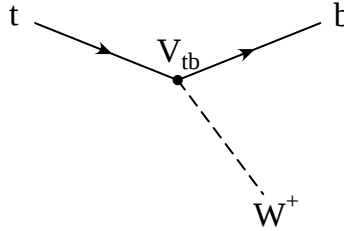
Um $t\bar{t}$ -Paare erzeugen zu können, muss $\sqrt{\hat{s}}$ mindestens der doppelten Top-Quark-Masse entsprechen:

$$2m_t = \sqrt{\hat{s}_{\min}} = x_{\min} \cdot \sqrt{s} \quad \Rightarrow \quad x_{\min} = \frac{2m_t}{\sqrt{s}} = 0.18$$

Für $x > 0.18$ ist die Impulsdichte von u -Quarks größer als die von Gluonen. Deshalb dominiert am Tevatron die $t\bar{t}$ -Produktion durch die Annihilation von Quark-Antiquark-Paaren gegenüber der Fusion von Gluonen.

Durch die deutlich höhere Schwerpunktsenergie am LHC-Beschleuniger können dort $t\bar{t}$ -Paare bei kleineren x -Werten produziert werden. Für kleine x ist die Gluondichte wesentlich größer als die Quarkdichte. Außerdem ist die Quark-Antiquark-Annihilation nur noch über See-Quarks möglich, da hier zwei Protonen kollidieren und nicht Proton und Antiproton wie am Tevatron.

- c) Da nur die schwache Wechselwirkung die Quark-Flavour ändern kann, zerfällt das Top-Quark schwach. Dabei entsteht ein reelles W -Boson und ein leichteres Quark. Dieses Quark ist praktisch immer ein b -Quark, da $|V_{tb}| \approx 1$ ist.



Die für einen schwachen Zerfall extrem kurze Lebensdauer resultiert einerseits aus der großen Masse des Top-Quarks, durch die der Phasenraumfaktor sehr groß wird. Andererseits ist der Zerfall nicht durch ein CKM-Matrixelement unterdrückt.

Dies ist anders beim Zerfall eines b -Quarks (bzw. b -Hadrons). Die Umwandlung eines b -Quarks in ein c -Quarks ist durch das betragsmäßig kleine CKM-Matrixelement V_{cb} unterdrückt. Das Matrixelement V_{cs} , das beim Zerfall eines c -Quarks in ein s -Quarks berücksichtigt werden muss, hingegen ist wieder ein Diagonalelement der CKM-Matrix wie V_{tb} und hat damit etwa den Betrag eins. Da man beim Zerfall eines b -Quarks also einen unterdrückten Übergang zwischen zwei Quark-Generationen hat, ist die Lebensdauer von b -Quarks größer als bei c -Quarks, obwohl der Phasenraumfaktor beim c -Quark-Zerfall aufgrund der geringeren Masse viel kleiner ist.

- d) Das b -Quark aus dem Top-Zerfall fragmentiert und bildet einen Jet aus Hadronen, der dann b -Jet genannt wird. b -Jets können unter anderem anhand der langen Lebensdauer von Hadronen mit b -Quarks identifiziert werden (Silizium-Vertex-Detektor). Das W -Boson kann entweder leptonisch oder hadronisch zerfallen. Im ersten Fall hat man im Endzustand ein Neutrino, das nicht direkt nachgewiesen wird, und ein Lepton, das in der Regel gut im Detektor gemessen und identifiziert werden kann (zumindest wenn das Lepton ein Elektron oder Myon ist). Beim hadronischen W -Zerfall in ein Quark-Antiquark-Paar bildet jedes der beiden Quarks einen Jet aus Hadronen. $t\bar{t}$ -Ereignisse haben also folgende möglichen Signaturen:

- (a) Semileptonischer Zerfall beider Top-Quarks:
2 b -Jets, 2 Leptonen, 2 nicht detektierte Neutrinos
- (b) Semileptonischer und hadronischer Zerfall:
4 Jets davon 2 b -Jets, 1 Leptonen, 1 nicht detektiertes Neutrino
- (c) Hadronischer Zerfall beider Top-Quarks:
6 Jets davon 2 b -Jets

Generell hat man das Problem der Zuordnung von Jets zu t - oder $\bar{t}$ -Quark. Dieses Problem verstärkt sich mit der Anzahl der Jets. Außerdem kann die

Zuordnung von Teilchen zu Jets nicht immer eindeutig vorgenommen werden. Bei Leptonischen Zerfällen hat man hingegen das Problem, dass der Impuls des Neutrinos nicht direkt gemessen wird. Wenn das andere Top-Quark hadronisch zerfällt kann der Neutrinoimpuls jedoch aus den Impulsen der anderen Teilchen rekonstruiert werden (s. nächster Aufgabenteil). Dies ist nicht möglich, wenn beide Top-Quarks leptonisch zerfallen. Ein weiterer Nachteil des leptonischen Zerfalls ist das gegenüber dem hadronischen Zerfall kleine Verzweigungsverhältnis von etwa 10 % pro Leptonfamilie.

- e) Da die Impulskomponente senkrecht zur $p\bar{p}$ -Achse im Anfangszustand Null ist, müssen sich aufgrund der Impulserhaltung auch die transversalen Impulskomponenten aller Teilchen im Endzustand zu Null addieren. Daraus ergibt sich der transversale Neutrinoimpuls:

$$\vec{p}_{T,\nu} = - \sum_i \vec{p}_{T,i}$$

Dabei läuft der Index i über alle Teilchen im Endzustand (außer dem Neutrino).

Die longitudinale Impulskomponente des Neutrinos $p_{z,\nu}$ ergibt sich aus der Bedingung, dass die Summe aus Lepton- und Neutrino-Impuls gleich dem Impuls des W -Bosons sein muss:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu &= \mathbf{p}_W \\ \Rightarrow (\mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu)^2 &= \mathbf{p}_l^2 + 2\mathbf{p}_l\mathbf{p}_\nu + \mathbf{p}_\nu^2 = \mathbf{p}_W^2 \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{p}_W^2 = m_W^2$, $\mathbf{p}_l^2 = m_l^2 \approx 0$ und $\mathbf{p}_\nu^2 = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{m_W^2}{2} &= \mathbf{p}_l\mathbf{p}_\nu = E_l E_\nu - \vec{p}_l \vec{p}_\nu = E_l \sqrt{\vec{p}_{T,\nu}^2 + p_{z,\nu}^2} - \vec{p}_{T,l} \vec{p}_{T,\nu} - p_{z,l} p_{z,\nu} \\ \Rightarrow E_l \sqrt{\vec{p}_{T,\nu}^2 + p_{z,\nu}^2} &= \underbrace{\frac{m_W^2}{2} + \vec{p}_{T,l} \vec{p}_{T,\nu} + p_{z,l} p_{z,\nu}}_{\mu} \\ \Rightarrow E_l^2 (\vec{p}_{T,\nu}^2 + p_{z,\nu}^2) &= \mu^2 + 2\mu p_{z,l} p_{z,\nu} + p_{z,l}^2 p_{z,\nu}^2 \\ \Rightarrow (E_l^2 - p_{z,l}^2) p_{z,\nu}^2 - 2\mu p_{z,l} p_{z,\nu} + E_l^2 \vec{p}_{T,\nu}^2 - \mu^2 &= 0 \\ \Rightarrow p_{z,\nu} &= \frac{\mu p_{z,l}}{E_l^2 - p_{z,l}^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 p_{z,l}^2}{(E_l^2 - p_{z,l}^2)^2} - \frac{E_l^2 \vec{p}_{T,\nu}^2 - \mu^2}{E_l^2 - p_{z,l}^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Isospin

- a) In der Schreibweise $|I, I_3\rangle$ hat das Proton den Isospin $|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ und das Neutron $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Da I_3 eine additive Quantenzahl ist, ist $I_3 = 1$ für $p + p$. $I_3 = 1$ ist nur möglich, wenn die beiden halbzahligen Isospins zu einem Gesamtisospin von

$I = 1$ koppeln. Eine analoge Überlegung gilt für $n + n$. Im Fall $p + n$ ist $I_3 = 0$. Hier gibt es zwei Möglichkeiten für den Gesamtisospin: $I = 0$ oder $I = 1$. Man erhält also folgende Isospinzustände:

$$\begin{aligned} p + p & : |1, 1\rangle \\ p + n & : |1, 0\rangle \text{ oder } |0, 0\rangle \\ n + n & : |1, -1\rangle \end{aligned}$$

$p + n$ ist also entweder ein Triplett- oder ein Singulett-Zustand. Wenn das Deuteron ein Triplett-Zustand wäre, müßte es auch die beiden anderen Triplett-Zustände, also gebundene pp und nn Systeme geben. Weil dies nicht der Fall ist, muss das Deuteron ein Singulett-Zustand mit $I = I_3 = 0$ sein.

- b) Da das Deuteron den Isospin $|0, 0\rangle$ hat, entspricht der Isospin des Deuteron-Pion-Systems gerade dem des Pions:

$$\begin{aligned} d + \pi^+ & : |1, 1\rangle \\ d + \pi^0 & : |1, 0\rangle \\ d + \pi^- & : |1, -1\rangle \end{aligned}$$

In den Reaktionen $pp \rightarrow d\pi^+$ und $nn \rightarrow d\pi^-$ sind die Isospins in Anfangs- und Endzustand gleich. Bei der Reaktion $pn \rightarrow d\pi^0$ entspricht jedoch nur einer der beiden möglichen Isospins im Anfangszustand dem im Endzustand. Da der Isospin in der starken Wechselwirkung erhalten ist, trägt nur die Komponente von pn mit $I = 1$ zum Wirkungsquerschnitt bei. Es ergibt sich also folgendes Verhältnis:

$$\sigma(pp \rightarrow d\pi^+) : \sigma(pn \rightarrow d\pi^0) : \sigma(nn \rightarrow d\pi^-) = 2 : 1 : 2$$

Dabei wird angenommen, dass pn sich zu gleichen Teilen aus $|1, 0\rangle$ und $|0, 0\rangle$ zusammensetzt. Dies kann mit den Regeln zur Addition von Drehimpulsen bzw. mit den sich daraus ergebenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten gezeigt werden.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 8

Bearbeitung bis 02.07.2014

Aufgabe 1: K^0 -Oszillation

(2 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden am Ort $x = 0$ $N_0 = 10000$ K^0 -Mesonen erzeugt, die sich mit einem Impuls von $p = p_x = 1$ GeV/c durch Vakuum bewegen. Durch Prozesse zweiter Ordnung der schwachen Wechselwirkung wird aus dem reinen K^0 -Strahl für Zeiten $t > 0$ eine Mischung aus K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen. Im Folgenden soll die CP-Verletzung vernachlässigt werden, d.h. $|K_S^0\rangle \equiv |K_1^0\rangle$ und $|K_L^0\rangle \equiv |K_2^0\rangle$.

- a) Zeigen Sie, dass die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen als Funktion der Zeit t im Kaon-Ruhesystem gegeben ist durch ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} N_{K_S^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\ N_{K_L^0}(t) &= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\ N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right] \\ N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right] \end{aligned}$$

mit

$$\Delta m = |m_S - m_L| \quad , \quad \Gamma_{S/L} = \frac{1}{\tau_{S/L}} \quad , \quad \Gamma = \frac{\Gamma_S + \Gamma_L}{2}$$

Dabei ist $m_{S/L}$ die Masse und $\tau_{S/L}$ die Lebensdauer von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen. Verwenden Sie für die Herleitung folgenden Ansatz für die Wellenfunktion von K_S^0 - bzw. K_L^0 -Mesonen

$$|K_{S/L}^0\rangle(t) = A_{S/L} \cdot e^{-im_{S/L}t} \cdot e^{-\Gamma_{S/L}t/2}$$

mit $A_{S/L}$ als konstantem Normierungs- und Phasenfaktor.

- b) Stellen Sie die Anzahl von K_S^0 -, K_L^0 -, K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen graphisch dar für das Zeitintervall von 0 bis $2 \cdot 10^{-9}$ s. Welcher Strecke entspricht dieser Zeitraum? Verwenden Sie $\Delta m = 5.3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.

Aufgabe 2: B^0 -Oszillation

(3 Punkte)

- a) Wie K^0 -Mesonen können auch B^0 - und B_s^0 -Mesonen über die schwache Wechselwirkung in ihre Antiteilchen oszillieren. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für B^0 - und B_s^0 -Oszillation.
- b) Für B^0 - und B_s^0 -Mesonen ist näherungsweise $\tau := \tau_S = \tau_L = 1.5 \cdot 10^{-12}$ s. Geben Sie die Anzahl von B^0 - und $\bar{B}^0$ - bzw. B_s^0 - und $\bar{B}_s^0$ -Mesonen sowie die Asymmetrie

$$A(t) = \frac{N_{B^0}(t) - N_{\bar{B}^0}(t)}{N_{B^0}(t) + N_{\bar{B}^0}(t)}$$

als Funktion der Zeit t an. Nehmen Sie dabei an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Anzahl von N_0 B^0 - bzw. B_s^0 -Mesonen erzeugt wurden.

- c) Im B^0 -System ist $\Delta m = 0.5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$. Im B_s^0 -System wurde ein Δm -Wert (hier Δm_s genannt) von $17.8 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ gemessen. Skizzieren Sie die Anzahl von B^0 -, $\bar{B}^0$ -, B_s^0 - und $\bar{B}_s^0$ -Mesonen für $N_0 = 10000$ sowie die Asymmetrie in beiden Systemen für den Zeitraum $0 \leq t \leq 10^{-11}$ s. Welcher Strecke entspricht die Periodendauer einer B^0 - bzw. B_s^0 -Oszillation bei einem Impuls von 5 GeV/c?

Aufgabe 3: Vergleich von Meson-Oszillation

(5 Punkte)

Welche Mesonen können oszillieren? Vergleichen Sie grob für all oszillationsfähigen Mesonen

- Oszillationsgeschwindigkeit,
- den Anteil der Mesonen, die in einem anderen Flavour zerfallen als sie erzeugt werden.

Welche Schwierigkeit ergibt sich für Kaonen? Wie hoch ist der Anteil Zerfälle in CP-Eigenzustände bzw. in Flavour-Eigenzustände in etwa für die verschiedenen Mesonen und welche Konsequenzen hat das für die Phänomenologie?

Finden Sie heraus welche Experimente einen signifikanten Einfluss auf die Messung der jeweiligen Oszillation (Sie können sich hier auf die nicht-Kaonen beschränken) hatten und erklären Sie die Unterschiede. Welche Methoden existieren um herauszufinden, wie der Produktionsflavour des entsprechenden Teilchens war.

Hinweis:

Wenn Sie auf den pdfLive Seiten (<http://pdg8.lbl.gov/rpp2013v2/pdgLive/Viewer.action>) auf den Namen einer Messung klicken, können Sie mehr Details über Messungen dieser Größe erfahren. CDF, D0, LHCb sind Hadronmaschinen, BABR, BELL sind Elektron/Positron Beschleuniger.

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 8

Musterlösungen

Aufgabe 1: K^0 -Oszillation

- a) Für die Wellenfunktion von K^0 - und $\bar{K}^0$ -Mesonen folgt mit dem Ansatz aus der Aufgabenstellung und den Beziehungen $|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$ und $|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$:

$$\begin{aligned}
 |K^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0(t)\rangle + |K_L^0(t)\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} |K_S^0\rangle + A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2} |K_L^0\rangle) \\
 |\bar{K}^0(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_S^0(t)\rangle - |K_L^0(t)\rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_S \cdot e^{-im_S t} \cdot e^{-\Gamma_S t/2} |K_S^0\rangle - A_L \cdot e^{-im_L t} \cdot e^{-\Gamma_L t/2} |K_L^0\rangle)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich als Anzahl von K^0 - bzw. $\bar{K}^0$ -Mesonen:

$$\begin{aligned}
 N_{K^0}(t) &= \left| \langle K^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
 &\quad \left. + A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t} \cdot e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L)t/2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
 &\quad \left. + [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
 N_{\bar{K}^0}(t) &= \left| \langle \bar{K}^0 | \bar{K}^0(t) \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left(A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} + A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \right. \\
 &\quad \left. - [A_S^* A_L \cdot e^{i(m_S - m_L)t} + A_L^* A_S \cdot e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right)
 \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $N_{K^0} = N_0$ und $N_{\bar{K}^0} = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= N_{\bar{K}^0}(t=0) = \frac{1}{4} (A_S^* A_S + A_L^* A_L - [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\
&= \frac{1}{4} (A_S - A_L)^* \cdot (A_S - A_L) = \frac{1}{4} |A_S - A_L|^2 \\
&\Rightarrow A_L = A_S \\
N_0 &= N_{K^0}(t=0) = \frac{1}{4} (A_S^* A_S + A_L^* A_L + [A_S^* A_L + A_L^* A_S]) \\
&= \frac{1}{4} (A_S + A_L)^* \cdot (A_S + A_L) = \frac{1}{4} |A_S + A_L|^2 = \frac{1}{4} |2A_S|^2 \\
&\Rightarrow A_S = A_L = \sqrt{N_0} \cdot e^{i\phi}
\end{aligned}$$

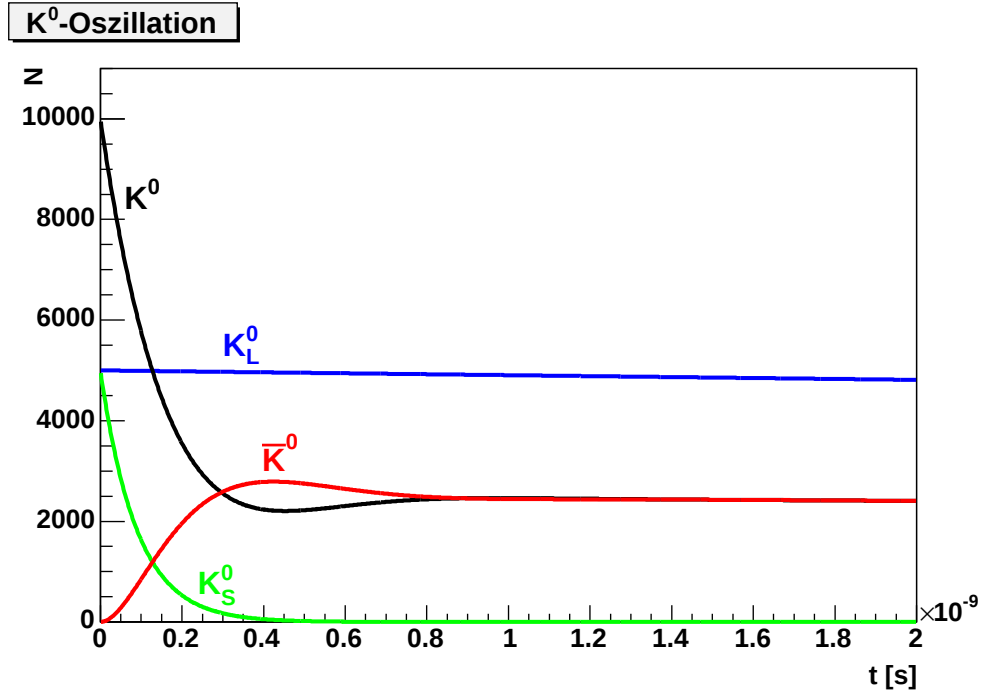
Die Phase ϕ kann willkürlich gewählt werden. Als Anzahl der verschiedenen neutralen Kaonen erhält man:

$$\begin{aligned}
N_{K_S^0}(t) &= \left| \langle K_S^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} A_S^* A_S \cdot e^{-\Gamma_S t} \\
&= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_S t} \\
N_{K_L^0}(t) &= \left| \langle K_L^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{2} A_L^* A_L \cdot e^{-\Gamma_L t} \\
&= \frac{N_0}{2} e^{-\Gamma_L t} \\
N_{K^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
&= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right) \\
N_{\bar{K}^0}(t) &= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - [e^{i(m_S - m_L)t} + e^{-i(m_S - m_L)t}] \cdot e^{-\Gamma t} \right) \\
&= \frac{N_0}{4} \left(e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-\Gamma t} \right)
\end{aligned}$$

Anmerkungen: In der ersten Lösung (übernommen von vor 2 Jahren, wurde wohl auch von vielen 1:1 übernommen) haben sich eine Menge formeller Fehler versteckt.

Zum Allgemeinen Verständnis: Wir haben zu Beginn einen reinen K^0 -Strahl. Wir kennen die Wellenfunktion, die einem solchen Strahl entspricht und deren zeitliche Entwicklung. Um die Zahl der Teilchen einer bestimmten Sorte nach einer gewissen Zeit zu bestimmen, projizieren wir die Wellenfunktion auf den der Teilchensorte zugeordneten Zustand, um die Amplitude zu erhalten. Das Betragsquadrat der Amplitude entspricht der Wahrscheinlichkeit, diesen Zustand zu beobachten.

b)

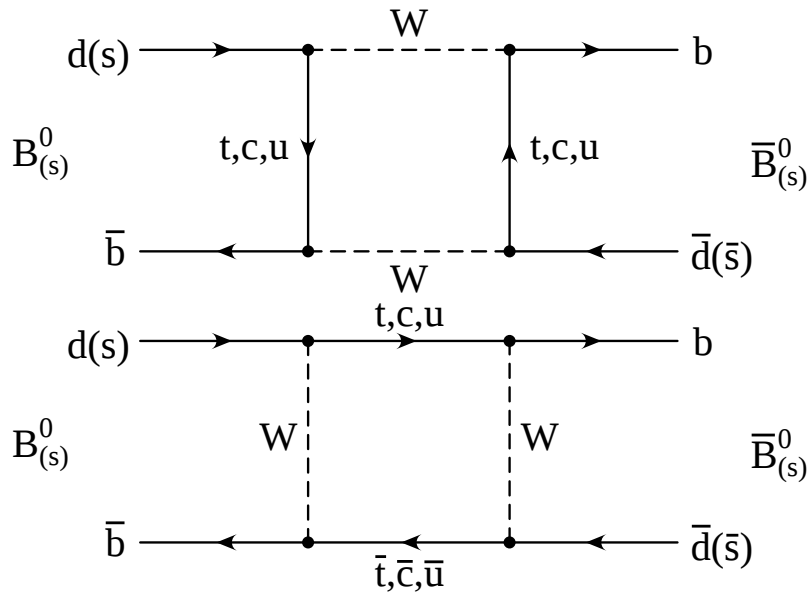


Für die Strecke x , die in einer Zeit von $t = 2 \cdot 10^{-9}$ s zurückgelegt wird, gilt:

$$x = v\gamma t = \beta\gamma ct = \frac{p}{mc}ct = 120.5 \text{ cm}$$

Aufgabe 2: B^0 -Oszillation

a) Analog zur K^0 -Mischung wird die B^0 - und die B_s^0 -Oszillation durch Boxdiagramme beschrieben:



b) Mit $\Gamma = \Gamma_S = \Gamma_L = 1/\tau$ vereinfachen sich die Formeln aus Aufgabe 2 zu:

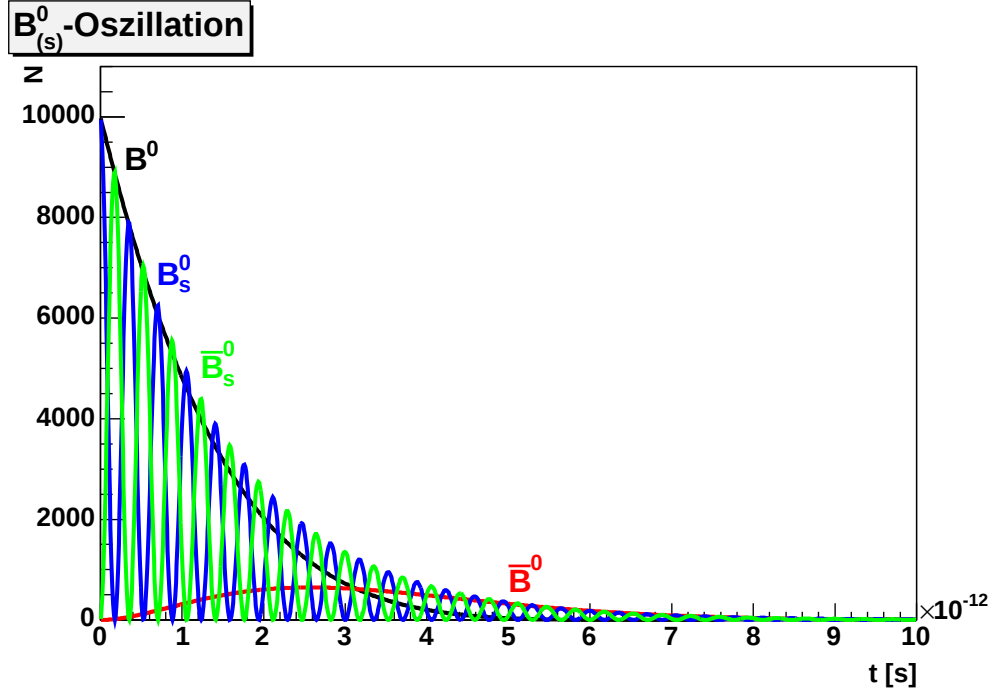
$$N_{B_{(s)}^0}(t) = \frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m_{(s)} t)] e^{-\Gamma t}$$

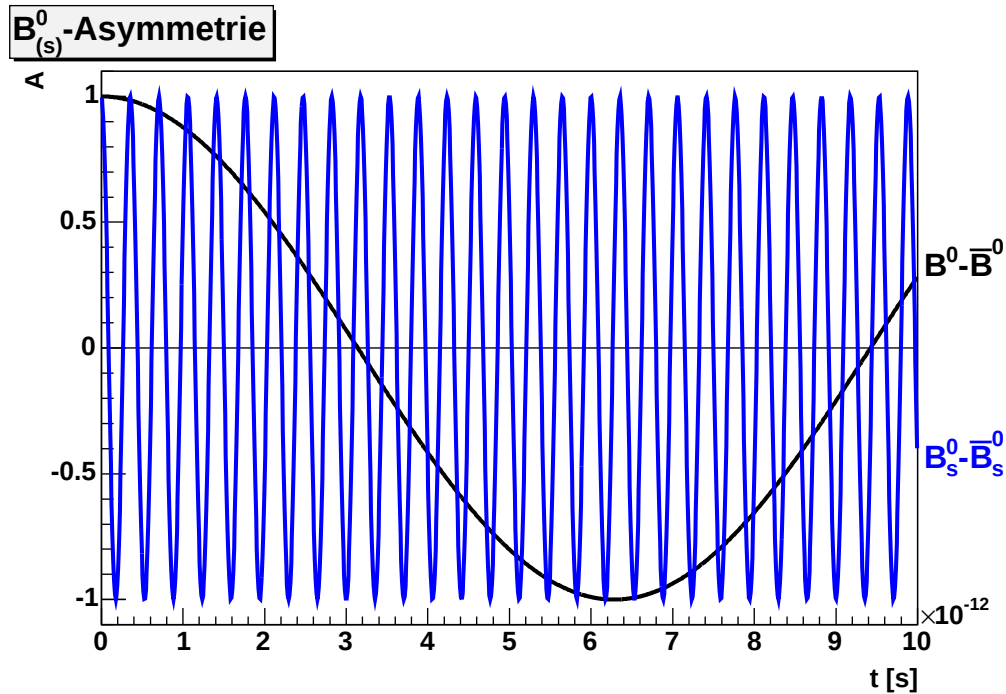
$$N_{\bar{B}_{(s)}^0}(t) = \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m_{(s)} t)] e^{-\Gamma t}$$

Daraus folgt für die Asymmetrie:

$$A(t) = \frac{\frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m_{(s)} t)] - \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m_{(s)} t)] e^{-\Gamma t}}{\frac{N_0}{2} [1 + \cos(\Delta m_{(s)} t)] + \frac{N_0}{2} [1 - \cos(\Delta m_{(s)} t)] e^{-\Gamma t}} = \cos(\Delta m_{(s)} t)$$

c) Die B_s^0 -Oszillation hat eine wesentlich höhere Frequenz als die B^0 -Oszillation. Die ist der hauptsächliche Grund, weshalb die Messung der B_s^0 -Oszillation so schwierig ist.





Die Strecke $x_{(s)}$, die bei einem Impuls p einer Periodendauer $T_{(s)}$ entspricht, ist gegeben durch:

$$x_{(s)} = \beta \gamma c T_{(s)} = \frac{p}{m_{(s)} c} c \frac{2\pi}{\omega_{(s)}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt mit $\omega_{(s)} = \Delta m_{(s)}$ eine Strecke von $x = 3.6$ mm für die B^0 -Oszillation und $x_s = 100$ μm für die B_s^0 -Oszillation.

Aufgabe 3: Vergleich von Meson-Oszillation

Nur neutrale Mesonen können oszillieren. Anregungen klingen in der Regel ab, bevor eine Oszillation möglich wäre. Es verbleiben D^0 , B^0 , B_s , und K^0 Mesonen, die oszillieren können. Das D^0 ist das einzige Meson, das aus up-artigen Quarks besteht, das oszillieren kann, was daran liegt, dass das top Quark nicht hadronisiert, bevor es zerfällt.

[0,5 Punkte für die korrekte Benennung der oszillierenden Mesonen.]

	K^0	B^0	B_s	D^0
Oszillationsfrequenz	$5 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$	$0.5 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$	$18 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$	ca. $1\% \cdot \frac{1}{\tau} \approx 25 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$
Zerfälle in anderem Flavour	$O(20\%)*$	15%	50%	$O(10^{-4})$

Bei den Kaonen muss man beachten, dass fast all K_S Mesonen nicht in flavourspezifische Endzustände zerfallen und auch ein Teil der K_L in CP-Eigenzustände zerfällt.

[0.5 Punkte für die korrekten Oszillationsfrequenzen (die Werte für K und B Mesonen stehen schon in den anderen Aufgaben)

1 Punkt für die Anteile.]

Die Größenordnung der Mesonen, die in CP-Eigenzustände geht ist in etwa $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$. Das heißt der wichtigste phänomenologische Effekt des Anteils der Mesonen, die in CP-Eigenzustände gehen ist die Lebensdauerdifferenz.

Für Kaonen gibt es kein approximatives Γ . Wie bereits beschrieben zerfallen fast alle K_S in CP-Eigenzustände. Bei K_L geht ein erheblicher Teil in Flavour-spezifische Endzustände. Der Endzustand $\pi\pi$ ist für das K_L ohne die kleine CP-Verletzung nicht zu erreichen, ist aber durch den großen Phasenraum stark bevorzugt. Dieser Zusammenhang drückt sich auch in der Namensgebung aus.

Bei den B^0 -Mesonen ist der Anteil der Endzustände, die ein CP-Eigenzustand sind sehr klein. Tatsächlich wurde noch nie ein signifikanter Lebensdauerunterschied gemessen. Bei den wenigen CP-Eigenzuständen gibt es allerdings auch CP-gerade und -ungerade Zustände.

Bei B_s -Mesonen ist der Anteil an CP-Eigenzuständen größer. $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$ ist ungefähr 10%. Dominiert wird diese Differenz vermutlich durch $D_s^{(*)}D_s^{(*)}$ -Zerfälle. Bei beiden Typen von B_q -Mesonen wird für den Namen nicht die unterschiedliche Lebensdauer herangezogen, sondern von $B_{H(eavy)/L(ight)}$ gesprochen.

Bei den D^0 Mesonen ist die $\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma}$ von der Größenordnung 1%. Wichtige Modi sind unter anderem $\pi\pi$ und KK . Die Anreicherung von CP-ungeraden D^0 und das Mixing sind Effekte von ähnlicher Größenordnung, die so eine alternative Parametrisierung nahelegen.

[Jeweils ein halber Punkt für sinnvolle Angaben zu jedem einzelnen Meson. Man muss nicht über $\Delta\Gamma$ gehen, sondern kann auch einfach versuchen den Anteil über die jeweiligen CP-Eigenzustände abzuschätzen, was auch funktioniert, aber einfach schwerer ist]

Bei den D und B Mesonen haben sowohl die B-Fabriken als auch Hadronmaschinen Beiträge geleistet. B_s -Mesonen wurden nur bei Hadronmaschinen ausreichend untersucht. Der Grund ist einfach der, dass der Boost bei den B-Fabriken zu klein ist, um die Oszillationen aufzulösen. Hinzu kommt noch die geringe Statistik, die bei den B-Fabriken für B_s -Mesonen zur Verfügung steht. [0.5 Punkte]

Anmerkung: Während die anderen Aufgaben vermutlich durch Recherche gelöst werden, sind hier auch kreative Lösungen durchaus positiv zu bewerten.

Für das Flavour-Tagging der D^0 wird überwiegend und bei den Hadronmaschinen ausschließlich das langsame Pion aus dem $D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$ -Zerfall verwendet. Bei den Lepton-Maschinen wird z.T. auch das D auf der anderen Seite rekonstruiert.

Für das B-Tagging ist eine vollständige Rekonstruktion der Tag-Seite bei weitem zu ineffizient. Man arbeitet daher mit Signaturen, die auf den Flavour hinweisen können. Sowohl bei Hadronmaschinen als auch bei Leptonmaschinen wird nach Leptonen und Kaonen gesucht, die aus dem anderen B kommen und so Hinweise auf dessen Ladung geben. Bei Hadronmaschinen wird zudem noch auf die Ladung eines möglichen Pions oder Kaons aus der Fragmentation geachtet. Bei Leptonmaschinen wird noch nach schnellen Pionen aus dem X bei $B \rightarrow D^a X_{fast}$ oder langsamen Pionen aus $B \rightarrow D^{*+}[D^0\pi_{slow}]X$ gesucht.

[0.5 Punkte für irgendeine sinnvolle Angabe zu einem Tagging.]

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 9

Bearbeitung bis 09.07.2014

Aufgabe 1: Fermigas-Modell

(5 Punkte)

Die Anzahl der Zustände dn im Impulsintervall $[p, p + dp]$ ist im Fermigas-Modell für wechselwirkungsfreie Teilchen bei Temperatur $T = 0$ gegeben durch

$$\frac{dn}{dp} = V \frac{p^2}{2h^3 \pi^2},$$

wobei V das Volumen im Ortsraum ist.

- Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie E_F unabhängig von der Massenzahl A ist, unter der Annahme, dass der Kernradius durch $R = r_0 A^{1/3}$ gegeben ist. Berechnen Sie dazu zunächst die Zustandsdichte in Abhängigkeit der Energie unter Verwendung der klassischen Energie-Impuls-Relation und dann die Fermi-Energie als Funktion von r_0 . Berücksichtigen Sie die Entartung durch Spin und Isospin und nehmen Sie an, dass der Kern symmetrisch ist ($N = Z$). Welchen Wert erhält man für $r_0 = 1.3$ fm?
- Geben Sie den Fermi-Impuls für einen symmetrischen Kern als Funktion von r_0 an. Berechnen Sie den Fermi-Impuls für $r_0 = 1.3$ fm. Kann sich ein Nukleon aufgrund der Unschärferelation überhaupt im Kern aufhalten, wenn man als Impulsunschärfe den Fermi-Impuls annimmt? Ist die nicht-relativistische Näherung gerechtfertigt?
- Um welchen Faktor ändert sich die Fermi-Energie für Protonen und Neutronen, wenn $N \neq Z$ ist? Geben Sie eine Formel für die Gesamtenergie als Funktion von A , N und Z an. Konstanten müssen dabei nicht explizit ausgerechnet werden.
- Zeigen Sie qualitativ, dass sich aus der Formel für die Gesamtenergie der Asymmetrieterm der Weizsäcker-Massenformel herleiten lässt, indem Sie eine Taylorentwicklung der Gesamtenergie in der Differenz $\Delta = N - Z$ durchführen.
- Berechnen Sie die Differenz aus der Fermi-Energie der Neutronen und Protonen für ^{208}Pb . Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Coulombbeitrag pro Proton in der Weizsäcker-Massenformel.

Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion

(3 Punkte)

Näherungsweise kann das Potential von Proton und Neutron im Deuteron durch ein zentralsymmetrisches Kastenpotential der Tiefe $-V_0$ und Radius $r_0 \approx 1.4$ fm beschrieben werden:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung für den Grundzustand ($l = 0$) des Deuterons:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) u = 0 \quad \psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_0^0$$

Was muss hier als Masse m eingestezt werden? Lösen Sie die Gleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$ unter den Randbedingungen $u(r = 0) = 0$ und $u(r \rightarrow \infty) = 0$ und benutzen Sie die Stetigkeitsbedingung für die Wellenfunktion und deren Ableitung, um die Tiefe des Potentials abzuschätzen. Gehen Sie von der Näherung aus, dass die Bindungsenergie $B = 2.25$ MeV viel kleiner als V_0 ist. Ist diese Näherung gerechtfertigt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Nukleonen bei einem Radius $r < r_0$ aufhalten?

Aufgabe 3: Trägheitsmoment von ^{170}Hf

(2 Punkte)

Berechnen Sie das Trägheitsmoment (in kg m^2) aus der Energiedifferenz ΔE zwischen den Rotationszuständen J und $J + 2$ von ^{170}Hf für $J = 0$ ($\Delta E = 100.0$ keV) und $J = 16$ ($\Delta E = 614.3$ keV). Vergleichen Sie den Wert mit dem Trägheitsmoment, dass sich für ^{170}Hf unter Annahme einer starren Kugel ergibt (Radiusparameter $r_0 = 1.3$ fm).

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 9

Musterlösungen

Aufgabe 1: Fermigas-Modell

a) Mit der klassischen Energie-Impuls-Relation

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \Rightarrow \frac{dp}{dE} = \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

erhält man

$$\frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dE} = V \frac{p^2}{2\hbar^3 \pi^2} \sqrt{\frac{m}{2E}} = V \frac{\sqrt{2m^3 E}}{2\hbar^3 \pi^2}.$$

Für ein Volumen von $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ ergibt sich man dann

$$\frac{dn}{dE} = \frac{2\sqrt{2m^3} r_0^3 A}{3\hbar^3 \pi} \sqrt{E} = CA\sqrt{E} \quad \text{mit} \quad C := \frac{2\sqrt{2m^3} r_0^3}{3\hbar^3 \pi}.$$

Integration bis zur Fermi-Energie gibt

$$n = \int_0^{E_F} \frac{dn}{dE} dE = \int_0^{E_F} CA\sqrt{E} dE = CA \left[\frac{2}{3} E^{\frac{3}{2}} \right]_0^{E_F} = \frac{2}{3} CA E_F^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt für die Fermi-Energie

$$E_F = \left(\frac{3n}{2CA} \right)^{\frac{2}{3}} \tag{1}$$

Da es zwei Spin- und zwei Isospin-Zustände gibt, ist $A = 4n$, so dass

$$E_F = \left(\frac{3}{8C} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{9\sqrt{2}\pi}{32} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{mr_0^2}.$$

Für $r_0 = 1.3$ fm ergibt sich

$$E_F \approx 28 \text{ MeV}.$$

b) Für den Fermi-Impuls gilt

$$p_F = \sqrt{2mE_F} = \sqrt{2m} \left(\frac{3}{8C} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2mE_F} \left(\frac{9\pi\hbar^3}{16\sqrt{2}m^3 r_0^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar}{r_0} \approx 1.5 \frac{\hbar}{r_0}.$$

Für $r_0 = 1.3$ fm erhält man

$$p_F \approx 231 \text{ MeV.}$$

Die nach der Unschärferelation benötigte Ausdehnung Δx ist für $\Delta p = p_F$ gegeben durch

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{\hbar}{p_F} \approx \frac{r_0}{1.5}.$$

Die Nukleonen haben also genug Platz im Kern.

Der Gamma-Faktor bei der Fermi-Energie ist

$$\gamma = 1 + \frac{E}{mc^2} \approx 1.03,$$

woraus $v/c \approx 0.24$ folgt. D.h. die klassische Näherung ist gerechtfertigt.

- c) Bei N Neutronen gibt es $n = N/2$ Zustandsniveaus. Da für einen symmetrischen Kern $n = A/4$ ist, folgt aus Formel (1) für die Fermi-Energie der Neutronen

$$E_{F,n} = E_F \left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2)$$

Analog gilt für Protonen

$$E_{F,p} = E_F \left(\frac{2Z}{A} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Die Gesamtenergie für die Neutronen ergibt sich aus der Integration der Energie über die Neutronendichte (mit zwei Spinzuständen pro Niveau):

$$E_{tot,n} = \int_0^{E_{F,n}} 2E \frac{dn}{dE} dE = \int_0^{E_{F,n}} 2CAE^{\frac{3}{2}} dE = \frac{4}{5} CAE_{F,n}^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} CAE_F^{\frac{5}{2}} \left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{5}{3}}.$$

Mit der analogen Formel für die Gesamtenergie der Protonen erhält man

$$\begin{aligned} E_{tot} &= E_{tot,n} + E_{tot,p} = \frac{4}{5} CAE_F^{\frac{5}{2}} \left[\left(\frac{2N}{A} \right)^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{2Z}{A} \right)^{\frac{5}{3}} \right] \\ &= \frac{2^{\frac{11}{3}}}{5} CE_F^{\frac{5}{2}} A^{-\frac{2}{3}} \left(N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}} \right) = C' A^{-\frac{2}{3}} \left(N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}} \right) \quad \text{mit} \quad C' := \frac{2^{\frac{11}{3}}}{5} CE_F^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

- d) Mit $\Delta = N - Z$ (und $A = N + Z$) gilt

$$N = \frac{A - \Delta}{2}, \quad Z = \frac{A + \Delta}{2}.$$

Draus folgt

$$E_{tot} = 2^{-\frac{5}{3}} C' A^{-\frac{2}{3}} \left((A + \Delta)^{\frac{5}{3}} + (A - \Delta)^{\frac{5}{3}} \right) = C_0 A^{-\frac{2}{3}} \left((A + \Delta)^{\frac{5}{3}} + (A - \Delta)^{\frac{5}{3}} \right).$$

Die erste und zweite Ableitung nach Δ sind:

$$\begin{aligned}\frac{dE_{tot}}{d\Delta} &= \frac{5}{3}C_0A^{-\frac{2}{3}}\left((A+\Delta)^{\frac{2}{3}}-(A-\Delta)^{\frac{2}{3}}\right) = C_1A^{-\frac{2}{3}}\left((A+\Delta)^{\frac{2}{3}}-(A-\Delta)^{\frac{2}{3}}\right), \\ \frac{d^2E_{tot}}{d\Delta^2} &= \frac{10}{9}C_0A^{-\frac{2}{3}}\left((A+\Delta)^{-\frac{1}{3}}+(A-\Delta)^{-\frac{1}{3}}\right) = C_2A^{-\frac{2}{3}}\left((A+\Delta)^{-\frac{1}{3}}+(A-\Delta)^{-\frac{1}{3}}\right).\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Taylorentwicklung in Δ

$$E_{tot} = A^{-\frac{2}{3}}\left[C_0(A^{\frac{5}{3}}+A^{\frac{5}{3}})+C_1(A^{\frac{2}{3}}-A^{\frac{2}{3}})\Delta+\frac{1}{2}C_2(A^{-\frac{1}{3}}+A^{-\frac{1}{3}})\Delta^2+\dots\right]$$

Der erste Term ist konstant und der zweite ist Null. Der dritte Term liefert den Asymmetrieterm in der Weizsäcker-Massenformel:

$$E_{asym} = \frac{1}{2}C_2A^{-\frac{2}{3}}(A^{-\frac{1}{3}}+A^{-\frac{1}{3}})\Delta^2 = C_2A^{-1}(N-Z)^2 = C_2\frac{(A-2Z)^2}{A}.$$

- e) Bei ^{208}Pb ist $Z = 82$ und $N = 126$. Mit den Gleichungen (2) und (3) erhält man

$$E_{F,n} = 32.4 \text{ MeV}, \quad E_{F,p} = 24.3 \text{ MeV},$$

Daraus folgt

$$\Delta E = E_{F,n} - E_{F,p} = 8.1 \text{ MeV}.$$

Der Coulombterm in Weizsäcker-Massenformel ist

$$E_C = a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = 800 \text{ MeV}.$$

Pro Proton ergibt sich also ein Wert von

$$\frac{E_C}{Z} = 9.8 \text{ MeV},$$

was in etwa mit der Differenz der Potentialtopftiefen von Neutronen und Protonen übereinstimmt.

Aufgabe 2: Deuteron-Wellenfunktion

Die Masse m ist die reduzierte Masse also die halbe Nukleonmasse:

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx m_p/2$$

Für $r < r_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0)u &= 0 \quad (E + V_0 > 0, u(r=0) = 0) \\ \Rightarrow u_1(r) &= A_1 \sin kr \quad \text{mit } k = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \end{aligned}$$

Für $r > r_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}Eu &= 0 \quad (E < 0 \text{ da gebundener Zustand, } u(r \rightarrow \infty) = 0) \\ \Rightarrow u_2(r) &= A_2 e^{-\kappa r} \quad \text{mit } \kappa = \sqrt{-2mE}/\hbar \end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ und $\frac{d}{dr}u_1(r_0) = \frac{d}{dr}u_2(r_0)$ folgt

$$\begin{aligned} A_1 \sin kr_0 &= A_2 e^{-\kappa r_0} \\ A_1 k \cos kr_0 &= -A_2 \kappa e^{-\kappa r_0} \end{aligned}$$

Durch Division der zweiten durch die erste Gleichung erhält man:

$$k \cot kr_0 = -\kappa$$

Da die Wellenfunktion im Grundzustand keine Knoten hat, muss $kr_0 < \pi$ sein. Wenn die Bindungsenergie $B = -E$ viel kleiner als V_0 ist, so ist auch $\kappa \ll k$. Daraus folgt

$$\cot kr_0 \approx 0 \quad \Rightarrow \quad kr_0 \approx \frac{\pi}{2}$$

Einsetzen von k ergibt

$$\begin{aligned} \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar \cdot r_0 &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow 2m(-B + V_0) &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{4r_0^2} \\ \Rightarrow V_0 &= B + \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mr_0^2} \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{8mr_0^2} \\ \Rightarrow V_0 &= 54.5 \text{ MeV} \quad \text{bzw.} \quad V_0 \approx 52.2 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Näherung $B \ll V_0$ gerechtfertigt.

Die Wahrscheinlichkeit P , dass sich die Nukleonen in einem Volumen V , das durch die Radien r_a und r_b begrenzt ist, aufhalten, ist gegeben durch:

$$P = \int_V \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}) d^3r = 4\pi \int_{r_a}^{r_b} \psi^*(r)\psi(r) r^2 dr = \int_{r_a}^{r_b} u^2(r) dr$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ sind also:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{r_0} u_1^2(r) dr = A_1^2 \int_0^{r_0} \sin^2 kr dr \quad \text{Subst: } r = \frac{x}{k}, \quad kr_0 = \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{A_1^2}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{A_1^2}{k} \frac{\pi}{4} \\ P_2 &= \int_{r_0}^{\infty} u_2^2(r) dr = A_2^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\kappa r} dr = A_2^2 \left[-\frac{1}{2\kappa} e^{-2\kappa r} \right]_{r_0}^{\infty} = \frac{A_2^2}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $u_1(r_0) = u_2(r_0)$ kann mit der Näherung $kr_0 = \frac{\pi}{2}$ eine Beziehung zwischen den Normierungen A_1 und A_2 hergestellt werden:

$$\begin{aligned} u_1(r_0) &= A_1 \sin kr_0 = A_1 \\ &= u_2(r_0) = A_2 e^{-\kappa r_0} \\ \Rightarrow A_2 &= A_1 e^{\kappa r_0} \end{aligned}$$

Daraus folgt für P_2 :

$$P_2 = \frac{A_1^2 e^{2\kappa r_0}}{2\kappa} e^{-2\kappa r_0} = \frac{A_1^2}{2\kappa}$$

Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, gilt:

$$1 = P_1 + P_2 = A_1^2 \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right) \Rightarrow A_1^2 = \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right)^{-1}$$

Damit erhält man als Wahrscheinlichkeit P_1 , dass sich die Nukleonen innerhalb des Radius des Kastenpotentials aufhalten:

$$P_1 = \frac{\pi}{4k \left(\frac{\pi}{4k} + \frac{1}{2\kappa} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi\kappa}} = 0.25$$

Obwohl Proton und Neutron ein gebundenes System bilden, halten sie sich also überwiegend ausserhalb des bindenden Potentialtopfes auf.

Aufgabe 3: Trägheitsmoment von ^{170}Hf

Die Rotationsenergie ist

$$E(J) = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1).$$

Daraus folgt für die Energiedifferenz bei $\Delta J = 2$:

$$\Delta E(J) = E(J+2) - E(J) = \frac{\hbar^2}{2\Theta} [(J+2)(J+3) - J(J+1)] = \frac{\hbar^2}{2\Theta} [4J+6] = \frac{\hbar^2}{\Theta} (2J+3).$$

Das Trägheitsmoment ist also

$$\Theta = \frac{\hbar^2}{\Delta E} (2J+3).$$

Als Zahlenwerte erhält man $\Theta(J = 0) = 2.08 \times 10^{-54} \text{ kg m}^2$ und $\Theta(J = 16) = 3.95 \times 10^{-54} \text{ kg m}^2$.

Für eine starre Kugel ergibt sich:

$$\Theta = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} A \cdot u \cdot (r_0 \cdot A^{1/3})^2 = 5.90 \times 10^{-54} \text{ kg m}^2.$$

Übungen Moderne Experimentalphysik III

(Kerne und Teilchen)

Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 10

Bearbeitung bis 16.07.2014

Aufgabe 1: Diverses

(10 Punkte + 2 Bonuspunkte)

- a) Relativistische Kinematik:
Bei welchem Impuls ist die mittlere Zerfallslänge eines μ gleich der Lichtgeschwindigkeit mal der mittleren Eigenlebensdauer.
- b) Detektorkonzept:
Nennen Sie zwei Möglichkeiten Pionen und Kaonen auseinanderzuhalten und beschreiben Sie knapp das jeweilige Detektorkonzept.
- c) Detektorkonzept II:
Schlagen Sie einen sinnvollen Detektoraufbau für eine symmetrische *charm-*/ τ -Fabrik vor.
Hinweis: Wodurch unterscheidet sich der Detektoraufbau von einer asymmetrischen Fabrik.
- d) Wechselwirkung von Teilchen mit Materie:
Sie bauen einen Satelliten und wollen ein Bauteil mit so wenig Gewicht wie möglich vor der kosmischen Strahlung schützen. Welches Material verwenden Sie? Begründen Sie Ihre Antwort.
- e) Luminosität:
Diskutieren Sie mögliche Vor- und Nachteile die Luminosität einerseits durch höhere Teilchenströme, andererseits durch stärkere Fokussierung zu erhöhen.
- f) Rutherford Streuung:
Wie ist die Proportionalität der Zählrate in Abhängigkeit vom Winkel der Streuung gegen die Strahlachse? Was würden sie qualitativ im Gegensatz dazu erwarten, wenn das Thomsonsche Atommodell der Wahrheit entspräche?
- g) Weizsäcker Massenformel:
Begründen Sie die Proportionalität zu A für die verschiedenen Terme der Formel.

- h) *B*-Zerfälle:
Schätzen Sie das Verhältnis der Zerfallsbreiten $B^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ und $B_s \rightarrow \mu\mu$ grob ab.
Schätzen Sie das Verhältnis der Zerfallsbreiten $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$ und $B_s \rightarrow e^+e^-$ grob ab.
Schätzen Sie das Verhältnis der Zerfallsbreiten $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$ und $B_s \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$ grob ab.
- i) Kaonen:
Schlagen Sie eine Möglichkeit vor einen K_L Strahl zu produzieren. Wie kann man aus einem K_L -Strahl wieder K_S Mesonen bekommen? Erklären Sie in Grundzügen den Mechanismus.
- j) Kernmodell:
Welche Potentialmodelle werden eingesetzt, um Kerne zu modellieren? Reicht das, um (alle bzw. einige) magische Zahlen zu erklären?
- k) Higgs:
Wie ist es möglich, dass das Higgs im Zerfall $\gamma\gamma$ gefunden wird, wenn es doch an Masse koppelt und Photonen masselos sind?
- l) Dunkle Materie:
Woher weiß man, dass es Dunkle Materie gibt?

Übungen Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2014

Übungsblatt Nr. 10

Musterlösungen

Aufgabe 1: Diverses

a) Relativistische Kinematik:

Wir wollen, dass gilt $\beta\gamma c\tau = c\tau$, also $\beta\gamma = 1$.

Es gibt sicher verschiedene Wege zur Lösung zu kommen, aber einer ist der folgende:

$$\begin{aligned}\beta\gamma &= 1 \\ \beta \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} &= 1 \\ \beta &= \sqrt{1-\beta^2} \\ \beta^2 &= 1-\beta^2 \\ \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar $\gamma = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}\gamma &= E/m \\ \gamma^2 &= E^2/m^2 = \frac{p^2 + m^2}{m^2} = \frac{p^2}{m^2} + 1\end{aligned}$$

Mit $\gamma^2 = 2$ folgt unmittelbar $p = m$.

b) Detektorkonzept:

Mögliche Antworten (2):

- Ein Flugzeitdetektor macht sich die unterschiedliche Geschwindigkeit mit der Pionen und Kaonen bei gegebenem Impuls (der in fast jedem Detektor über Spurdetektoren gemessen wird) fliegen zu nutze.
- Ein Cherenkov-Detektor misst den Winkel, unter dem Licht von den jeweiligen Mesonen abgestrahlt wird, wenn das betreffende Teilchen mit einer Geschwindigkeit größer der Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium unterwegs ist.

- Der Energieverlust im Gas, z.B. einer Driftkammer, kann gemessen werden. Dieser ist unterschiedlich (approximativ der Bethe-Bloch-Formel entsprechend).
- ... Kink-Finding in großen Tracking-Volumen...

c) Detektorkonzept II:

Ein sinnvoller Aufbau eines solchen Detektors ist:

- Gas-Spurdetektor (Driftkammer oder Zeitprojektionskammer);
- PID-Detektor (ARICH + TOF, DIRC, oder ähnliches);
- Electromagnetisches Kalorimeter;
- "KLM"

Ein Vertexdetektor ergibt bei einer solchen symmetrischen Fabrik nur wenig Sinn, da sich die Ds und τ s nicht weit genug bewegen, um ihre Zerfallslänge vernünftig aufzulösen. Ein echtes Hadron-Kalorimeter ist nicht sinnvoll, da bei den niedrigen Energien ohnehin kaum eine Energieauflösung möglich ist, zumal diese extrem teuer sind.

d) Wechselwirkung von Teilchen mit Materie:

(not yet complete) Mögliche Antworten (1):

- Kosmische Strahlung besteht überwiegend aus Hadronen, wir suchen daher nach einem Stoff der bei geringem Gewicht eine geringe hadronische Strahlungslänge hat. Flüssiger Wasserstoff z.B. hat eine nuclear interaction length" von $52 \frac{g}{cm^2}$, Lithium $71 \frac{g}{cm^2}$. Für diesen Zweck weniger (falls das zu schtzende Objekt eine große geometrische Ausdehnung hat) geeignet sind z.B. Blei ($200 \frac{g}{cm^2}$)
- Gamma Strahlung z.B. von der Sonne könnte ein Problem sein. Falls man diese abwehren will, sollte man sich besser auf hohe Z^2 , eben z.B. Blei konzentrieren.

Bei dieser Aufgabe sollte die Erklärung was man abwehren will mit der Wahl des Materials zusammenpassen.

e) Luminosität:

Höhere Teilchenströme

- können mit weniger Aufwand beim Beschleunigerbau erreicht werden,
- sind teurer im Betrieb,
- erhöhen einige Typen von Untergründen stärker, z.B. Beam-Gas Stöße, Halo-Effekte, und Wechselwirkungen mit dem Magnetfeld (Synchrotron, Radiative Bhabhai,...).

Stärkere Fokussierung

- ermöglicht gute Beamspot-Constraints,
- erhöht Untergrund aus intra-bunch scattering,
- bedeutet, dass man mit den Final-Focussing Magneten sehr nah an den Wechselwirkungspunkt ran muss und tendenziell große Kreuzungswinkel braucht, die dazu führen, dass die eingehenden Teilchenstrahlen in größerem Winkel zum Magnetfeld stehen und entsprechend mehr Untergrund entsteht.

f) Rutherford Streuung:

Die Proportionalität ist gegeben durch $\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}$. Große Streuwinkel wären bei einer breiten Verteilung der positiven Ladung und insbesondere Masse nicht zu erwarten, sondern eher ein Gaußssches Profil.

g) Weizsäcker Massenformel:

Der Volumenteil bezieht sich auf einen Beitrag für Teilchen, die mitten im Kernvolumen sind, umgeben von anderen Nukleonen. Da die Reichweite der Wechselwirkung nur etwa so hoch wie ein Nukleonen-Durchmesser ist, spielt es keine Rolle, wie viele Schichten weiterer Nukleonen sich um das betrachtete Nukleon schließen. Dieser Teil gibt also einen konstanten Wert pro Nukleon und ist somit linear in A .

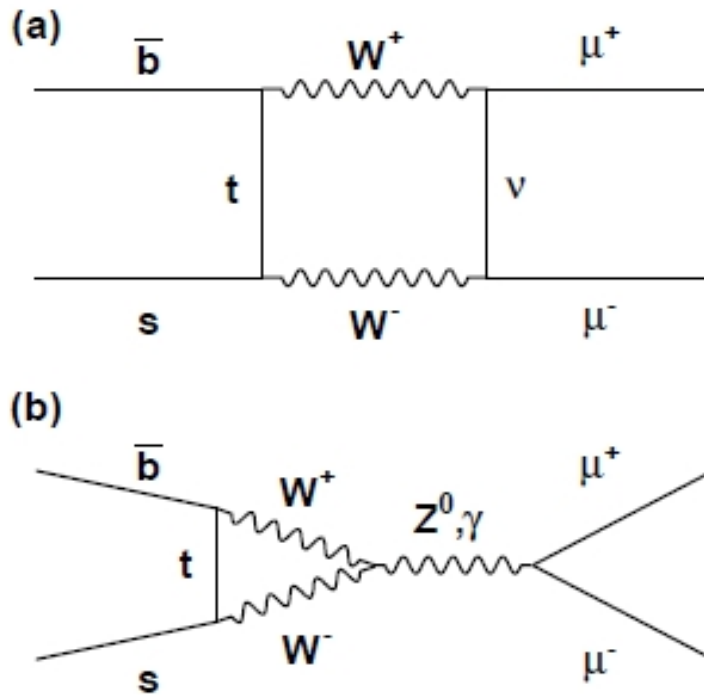
Nukleonen an der Oberfläche haben weniger Nachbarn als solche inmitten des Volumens. Der Oberflächenanteil ist proportional zur Zahl der Nukleonen am Rand. Die Oberfläche wächst mit R^2 , während das Volumen und damit die Gesamtzahl der Nukleonen mit R^3 wächst. Insgesamt ist dieser Teil daher proportional zu $A^{\frac{2}{3}}$.

Der Coulomb-Anteil hängt vor allem an den Protonen. Wenn jedes Proton alle anderen Protonen "zieht", ist der Beitrag proportional zu $Z \cdot (Z - 1)$, also etwa A^2 , da $Z \approx \frac{A}{2}$. Die typische Distanz der Protonen voneinander ist invers zu $A^{\frac{1}{3}}$. Damit ist die Gesamtproportionalität $A^{\frac{5}{3}}$.

Der Symmetrieteil ist nur schwach von A abhängig, da stabile Kerne mit großem A auch etwas asymmetrischer werden.

Der Paarungsanteil sinkt mit großem A , da der Paarungseffekt in einem Kern mit vielen Teilchen weniger wichtig ist, aber eine anschauliche Erklärung für die exakte Proportionalität ist nicht so einfach. ($A^{-\frac{1}{2}}$)

h) B -Zerfälle:



Für den ersten Teil sehen wir uns obige Feynman-Graphen an. Man erkennt leicht, dass ein CKM-Element V_{tq} mit $q = s, d$ eingeht und entsprechend ein einfach Cabibbo unterdrückter Zerfall in einem Fall relativ zum anderen vorliegt.

$B_s \rightarrow \mu^+\mu^-$ hat einen BR von ca. $3 \cdot 10^{-9}$, $B^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ hat einen BR von etwas mehr als $1 \cdot 10^{-10}$.

Beim Verhältnis der Zerfälle in Elektronen oder Myonen ist die Helizitätsunterdrückung zu berücksichtigen, wie in Aufgabe 4 auf Blatt 5. Den unterschiedlichen Phasenraum können wir ignorieren und uns auf das Matrixelement konzentrieren. Es gilt, dass der Zerfall in Myonen um etwa den Faktor $\frac{m_\mu}{m_e}$ größer ist.

Beim letzten zu betrachtenden Zerfall mehr oder weniger das gleiche wie in Blatt 6, Aufgabe 2, wobei es hier zwei Teilchen gibt, die im Spin flippen könnten. Daher erwarten wir etwa einen Faktor 5 höheres Verzweungsverhältnis für den Zerfall mit Photon.

i) Kaonen:

Um einen K_L Strahl zu produzieren kann man z.B. einen Proton Strahl auf ein Target schießen, geladene Teilchen mit Hilfe eines Magnetfelds ablenken und darauf warten, dass die K_S -Teilchen zerfallen.

Um wieder K_S Mesonen zu bekommen, kann man diesen Strahl einfach durch ein Material schicken. Durch die unterschiedliche Wechselwirkung von K^0 und $\bar{K}^0$ Mesonen mit dem Material

(siehe auch <http://en.wikipedia.org/wiki/Kaon#Regeneration>) ändert sich die Phase der K_L und man erhält einen Anteil K_S zurück.

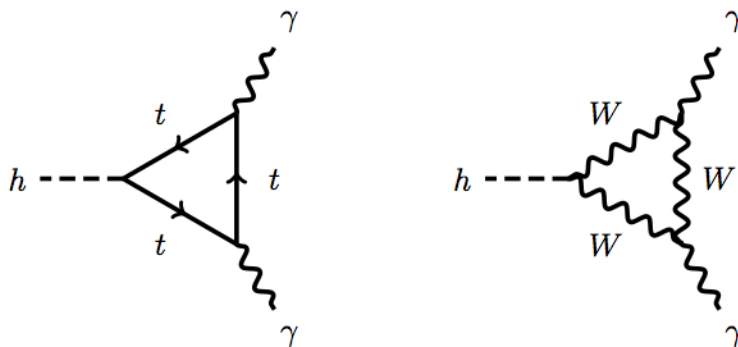
j) Kernmodell:

Für leichte Kerne kann ein Gauß-Potential angenommen werden. Für schwere Kerne kann das (nur numerisch lösbare) Woods-Saxon (VL 17, Seite 8) Potential benutzt werden, womit die ersten 3 magischen Zahlen erklärt werden können.

Um die weiteren magischen Zahlen zu erklären muss auch die Spin-Bahn Kopplung berücksichtigt werden.

k) Higgs:

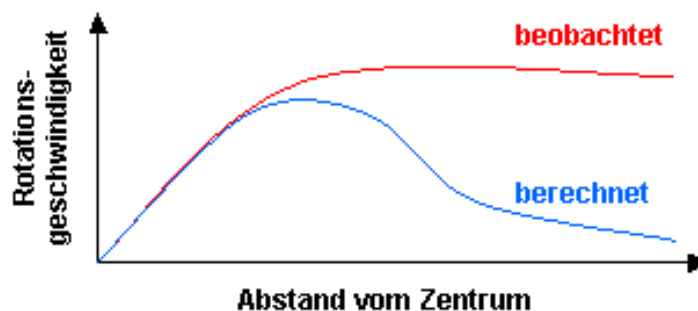
Virtuelle Schleifen schwerer Teilchen, am stärksten des Top-Quarks können 2 Photonen abstrahlen.



l) Dunkle Materie:

Mögliche Antworten (2):

- Rotationskurven in der Galaxie.

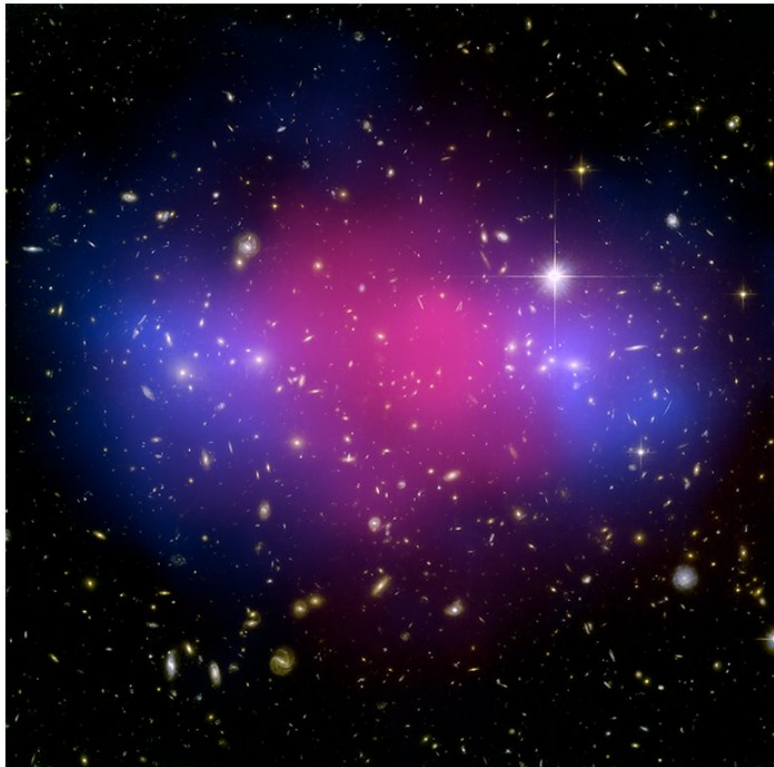


Die berechnete Kurve entsteht durch die Annahme, dass die leuchtende Materie die gesamte Materie in der Galaxis ist, die beobachtete passt zu der Annahme, dass es einen deutlich größeren Halo von klumpender Materie um die leuchtende Materie herum gibt.

- Strukturbildung des Universums

Die Struktur des Universums suggeriert, dass relativ früh in der Entwicklung des Universums nichtrelativistische Klumpen entstanden sind, so dass kleine Strukturen wie Galaxien entstehen konnten ohne ausgewaschen zu werden (kalte, schwere Dunkle Materie).

- kollidierende Galaxien...



© X-ray(NASA/CXC/Stanford/S.Allen); Optical/Lensing(NASA/STScI/UC Santa Barbara/M.Bradac)

Galaxienkollision zeigt Dunkle Materie

MACS J0025.4-1222 (auch bekannt als Bullet-Cluster, oder deutsch "Geschosshaufen") entstand durch eine Kollision von zwei riesigen Galaxienhaufen. Dabei entmischten sich scheinbar gewöhnliche Materie (rosa markiert) und Dunkle Materie (blau markiert). Letzere zeigt sich nur durch ihre Schwerkraft, die das Licht der dahinter liegenden Objekte verzerrt.

Durch den Gravitationslinseneffekt kann die Dunkle Materie beobachtet werden, die weit weniger bei der Galaxienkollision abgebremst wird.

- Die Gesamtdichte des Universums ist nahe der kritischen Dichte (siehe VL). Die leuchtende Materie macht nur etwa 4% aus. (Dunkle Materie 30%, Dunkle Energie 70%).