

**Übungen zu  
Moderne Experimentalphysik III  
(Kerne und Teilchen)  
Sommersemester 2017**

**Übungsblatt Nr. 3: Musterlösungen**

---

**Aufgabe 1: Spurdetektoren**

a) Mit der Definition der Standardabweichung

$$\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2,$$

wobei

$$E[x] = \int_a^b dx x f(x)$$

der Erwartungswert von  $x$  unter der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  ist, folgt für zwischen 0 und  $d$  gleichverteiltes  $f(x) = 1/d$  (**2 Punkte**)

$$\begin{aligned} E[x] &= \frac{1}{d} \int_0^d dx x = \frac{1}{2}d, \\ E[x^2] &= \frac{1}{d} \int_0^d dx x^2 = \frac{1}{3}d^2 \\ \Rightarrow \sigma_x &= \frac{d}{\sqrt{12}}. \quad (\mathbf{2 \text{ Punkte}}) \end{aligned}$$

Die  $d/\sqrt{12}$ -Abhängigkeit der Ortsauflösung kann z.B. verbessert werden

- mit Driftkammern, durch Ausnutzung der Driftzeitinformation, oder
- mit Siliziumstreifendetektoren, durch Ausnutzung der Ladungsteilung zwischen den Streifen.

Es gibt sicherlich noch viele weitere Methoden. (**2 Punkte**) sofern mindestens ein korrekter Ansatz genannt wird.

b) Es ist

$$s = R \left( 1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = R \left( 1 - \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) = R \left( \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \mathcal{O} \left( \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \right),$$

und da  $R \gg L \Rightarrow \theta \ll 1$  kann man Terme höherer Ordnung vernachlässigen, also

$$s \approx \frac{1}{2} R \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Da ferner

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{L}{2R},$$

gilt

$$s = \frac{L^2}{8R}.$$

(2 Punkte) bis hierher.

Somit ist

$$p = qBR = \frac{1}{8} qBL^2 \frac{1}{s}$$

und es gilt für die Auflösung

$$\sigma_p = \frac{1}{8} qBL^2 \frac{\sigma_s}{s^2}.$$

Nun wird die Sagitta  $s$  über eine Ortsmessung bestimmt, also kann man annehmen

$$\sigma_s \propto \sigma_x. \quad (1)$$

Wildes Einsetzen ergibt dann

$$\frac{\sigma_p}{p} \propto \frac{8\sigma_x}{qBL^2} \cdot p$$

und mit  $\sigma_x$ ,  $L$  in m,  $B$  in T,  $p$  in GeV sowie  $q = e$  folgt

$$\frac{\sigma_p}{p} \propto \frac{8\sigma_x}{0,3BL^2} \cdot p.$$

Je (1 Punkt) für das Nennen von (1) und die restliche Rechnung.

Man kann zu dieser Aufgabe auch noch diskutieren, wodurch  $\sigma_x$  bestimmt wird. Bei einem Siliziumstreifendetektor wie bei CMS gibt es z.B. einen Beitrag durch die intrinsische Ortsauflösung der Module, bestimmt u.a. durch den Streifenabstand, und auch durch die Unsicherheit auf die absolute Modulposition („Alignment“).

## Aufgabe 2: Kalorimeter

Hochenergetische Elektronen und Photonen lösen im elektromagnetischen Kalorimeter einen elektromagnetischen Schauer aus. Die Schauerentwicklung endet, wenn die Energie der Sekundärteilchen in etwa unter die kritische Energie bzw. unter die zur Paarerzeugung nötige Energie fällt. Dabei kann die Anzahl  $N$  der Sekundärteilchen als im Mittel proportional zur urspr. Energie  $E$  des einfallenden Primärteilchens

angenommen werden, wie man sich anhand der Schauerentwicklung, z.B. im in der Vorlesung besprochenen Heitler-Modell, leicht überlegen kann.

Im Heitler-Modell, vgl. Abb. 1, wird angenommen, dass sich die urspr. Energie  $E$  in jeder Generation  $n$  gleichmäßig auf alle Sekundärteilchen aufteilt und dass der Schauer abbricht, sobald die Sekundärteilchenenergie kleiner als die kritische Energie  $E_c$  ist. Dann gilt für die Anzahl der Schauerteilchen nach Abbruch  $N = E/E_c$ .

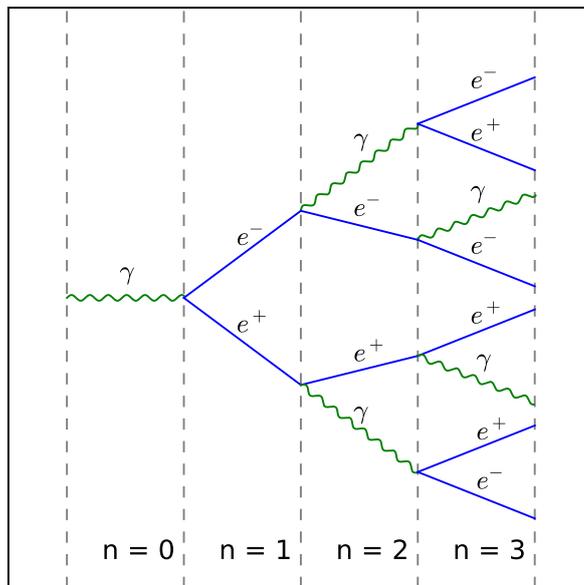


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines elektromagnetischen Schauers im Heitler-Modell, entnommen aus [1].

Die Sekundärteilchen geben ihre Energie ab durch Anregung des aktiven Mediums zur Szintillation, so dass die Signalintensität proportional zur Anzahl der Sekundärteilchen, also proportional zu  $E$  ist. Somit gilt

$$E \propto N \quad (2 \text{ Punkte})$$

$$\Rightarrow \sigma_E \propto \sigma_N$$

Da die Schauerbildungsprozesse (Bremsstrahlung und Paarerzeugung) zufällig nach dem Zerfallsgesetz erfolgen, folgt die Anzahl der Schauerteilchen der Poissonstatistik. Gleiches gilt auch für den Photonennachweis in den Photomultipliern. Also ist

$$\sigma_E \propto \sigma_N = \sqrt{N} \propto \sqrt{E} \quad (2 \text{ Punkte})$$

und damit

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{A}{\sqrt{E}}.$$

Anmerkung: hier und im folgenden wird nur dieser (in weiten Energiebereichen dominierende) stochastische Term der Kalorimetraufösung berücksichtigt.

### Aufgabe 3: CMS-Detektor

a) Mit den angegebenen Zahlenwerten ist

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p}{p} &= \sqrt{\frac{720}{N+4}} \cdot \frac{\sigma_x}{0,3BL^2} \cdot p \\ &= \underbrace{\sqrt{\frac{720}{13+4}} \cdot \frac{25 \mu\text{m}}{0,3 \cdot 3,8 \text{ T} \cdot (1,1 \text{ m})^2}}_{C_{\text{pos}}=1,18 \cdot 10^{-4} \text{ GeV}^{-1}} \cdot p \end{aligned}$$

und mit  $p = 50 \text{ GeV}$  ist

$$\frac{\sigma_p}{p} = 0,590\%.$$

Damit das Teilchen den Spurdetektor verlassen kann, muss

$$R > \frac{L}{2}$$

und somit wegen  $p = 0,3BR$

$$p > 0,3B \frac{L}{2} = 0,3 \cdot 3,8 \frac{1,1}{2} \text{ GeV} = 627 \text{ MeV}.$$

Da der erste Teil nur Einsetzen ist, insgesamt **(2 Punkte)**

b) Die relative Energieaufösung bei  $50 \text{ GeV}$  beträgt  $0,51\%$  für Elektronen im ECAL und  $17,0\%$  für Pionen im HCAL **(2 Punkte)**.

Da das ECAL nur eine Dicke von etwa  $1\lambda$  hat, werden im Mittel nur etwa  $1 - 1/e = 63\%$  der Pionenenergie im ECAL deponiert, sodass die Energiemessung verfälscht wird. Dies ist insbesondere auch aufgrund der sehr unregelmäßigen Hadronschauerentwicklung problematisch. **(2 Punkte)**

c) Gleichsetzen der Ausdrücke für die Spurdetektor- und Kalorimetraufösung ( $E = p$ ) ergibt für die Energie gleicher Aufösung

$$E_{\text{thres}} = \left( \frac{A}{C_{\text{pos}}} \right)^{2/3} = \left( \frac{0,036}{1,18 \cdot 10^{-4}} \text{ GeV}^{3/2} \right)^{2/3} = 45,3 \text{ GeV}. \quad \text{(2 Punkte)}$$

In Abb. 2 sind die relativen Energie- bzw. Impulsaufösung für Elektronen im ECAL und im Spurdetektor verglichen. Das grundsätzliche Verhalten von Spurdetektoren und Kalorimetern ist deutlich zu erkennen: die relative Aufösung von Spurdetektoren wird schlechter mit größerem Impuls, wohingegen die relative Aufösung von Kalorimetern besser wird mit höherer Energie. **(2 Punkte)** für die Darstellung und Diskussion.

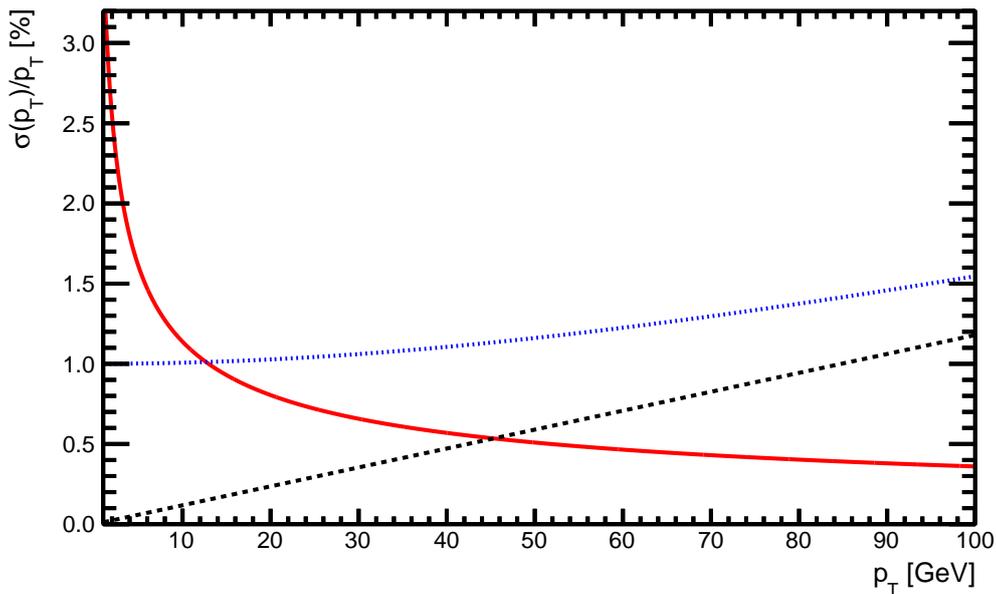


Abbildung 2: Vergleich der relativen Energie- bzw. Impulsauflösung für Elektronen im ECAL (durchgezogene, rote Linie) und im Spurdetektor ohne (gestrichelte, schwarze Linie) und mit (gepunktete, blaue Linie) Berücksichtigung der Vielfachstreuung.

- d) Die Spurdetektorauflösung unter Berücksichtigung von Vielfachstreuung ist ebenfalls in Abb. 2 gezeigt. Die Vielfachstreuung dominiert die Auflösung im Bereich niedriger Impulse und trägt auch bei 100 GeV noch etwa 1/3 zur Auflösung bei. (1 Punkt)
- e) Ein Elektron verliert durch Bremsstrahlung im Mittel

$$\frac{\Delta E}{E_0} = 1 - e^{-0,4} = 33,0\%$$

seiner urspr. Energie auf dem Weg durch den Spurdetektor.  $X_0$  entspricht etwa 7/9 der mittleren freien Weglänge von Photonen, sodass im Mittel

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-0,4 \cdot \frac{7}{9}} = 26,7\%$$

der Photonen auf dem Weg durch den Spurdetektor konvertieren. (1 Punkt), da hier obiges Plottingskript wiederverwendet werden kann.

Beide Effekte werden bei der Rekonstruktion berücksichtigt. So werden z.B. bei der Elektronrekonstruktion ECAL-Einträge, deren Ort und Energie mit Bremsstrahlungsphotonen vereinbar sind, zur primären ECAL-Messung hinzugefügt. Andererseits werden im Spurdetektor konvertierte Photonen aus von Sekundärvertizes stammenden  $e^+e^-$ -Paaren rekonstruiert.

#### Aufgabe 4: Zyklotron

Da  $E_{\text{kin}} = 25 \text{ MeV} \ll m_p = 938 \text{ MeV}$  bzw.  $E_{\text{kin}} = 100 \text{ MeV} \ll m_\alpha = 3727,4 \text{ MeV}$ , kann man a) - c) klassisch rechnen.

- a) (2 Punkte) Mit  $p = \sqrt{2m_p E_{\text{kin}}}$  folgt (Impulse in MeV):

$$R = \frac{p}{300B} = \frac{\sqrt{2m_p E_{\text{kin}}}}{300B} = \frac{\sqrt{2 \cdot 938 \cdot 25}}{300 \cdot 1} \text{ m} = \frac{216,56}{300} \text{ m} = 72,2 \text{ cm}.$$

- b) (2 Punkte) Aus  $p = mv = qBR$  folg für die Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R}$

$$\omega = \frac{qB}{m}.$$

Für eine kontinuierliche Beschleunigung muss die Spannung gerade die gleiche Frequenz haben, also

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{c^2 \cdot e \cdot 1 \text{ T}}{2\pi \cdot 938 \cdot 10^6 \text{ eV}} = \frac{9 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 1 \text{ T}}{2\pi \cdot 938 \text{ V}} = 15,3 \text{ MHz}.$$

- c) (2 Punkte) Mit  $m_\alpha = 3727,4 \text{ MeV}$  folgt mit dem gegebenen Radius  $R = 72,2 \text{ cm}$  aus a) eine maximal erreichbare kinetische Energie von

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m_\alpha} = \frac{(qBR)^2}{2m_\alpha} = \frac{(2 \cdot 300 \cdot 1 \cdot 0,72)^2}{2 \cdot 3727,4} \text{ MeV} = 25 \text{ MeV}.$$

Um  $\alpha$ -Teilchen auf 100 MeV zu beschleunigen, muss das Zyklotron (und somit insbesondere der Magnet!) einen Radius von

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{\sqrt{2m_\alpha E_{\text{kin}}}}{2eB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3727,4 \cdot 100}}{600 \cdot 1} \text{ m} = \frac{863,4 \text{ MeV}}{600} \text{ m} = 1,44 \text{ m}$$

haben.

- d) Für Elektronen ergäbe sich mit dem aus a) gegebenen Radius  $R = 72,2 \text{ cm}$  eine kinetische Energie von

$$E_{\text{kin}} = \frac{(qBR)^2}{2m_e} = \frac{(300 \cdot 1 \cdot 0,72)^2}{2 \cdot 0,5} \text{ MeV} = 46,7 \text{ GeV} \gg m_e,$$

sodass Elektronen im hochrelativistischen Bereich liegen. In dem Falle ist aber die klassische Näherung für die Umlauffrequenz nicht mehr gültig. Die in der Vorlesung hergeleitete, korrekte relativistische Behandlung ergibt

$$\omega = \frac{qB}{\gamma},$$

sodass die Frequenz nicht mehr konstant ist sondern vom Impuls abhängt. Man kann deshalb keine Beschleunigungsspannung mit konstanter Frequenz verwenden. **(2 Punkte)**

Alternativ müsste man entweder die Frequenz der Beschleunigungsspannung nachregeln, was keinen kontinuierlichen Strahl erlaubt, oder das Magnetfeld so anpassen, dass es nach außen hin stärker wird, was technisch nicht einfach ist, da man verhindern muss, dass dies den Strahl defokussiert.

### Aufgabe 5: Formfaktor

Jeweils **(1 Punkt)** pro Teilaufgabe, in der letzten Teilaufgabe **(2 Punkte)**: je einer für die Rechnung und die Grafik.

a) Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho(\vec{r}) d^3r \\ &= \rho_0 4\pi \int_0^\infty r^2 e^{-ar} dr, \end{aligned}$$

und mit

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathcal{N}, a > 0 \quad (2)$$

folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \rho_0 4\pi \frac{2}{a^3} \\ \Rightarrow \rho_0 &= \frac{a^3}{8\pi}. \end{aligned}$$

b) In Kugelkoordinaten mit der  $z$ -Achse ( $\theta = 0$ ) in Richtung von  $\vec{q}$  ist  $\vec{q} \cdot \vec{r} = qr \cos \theta$  und damit

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \rho(r) e^{\frac{iqr \cos \theta}{\hbar}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &\stackrel{x=\cos \theta}{=} -2\pi \int_1^{-1} \int_0^\infty \rho(r) e^{\frac{iqrx}{\hbar}} r^2 dr dx \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \left[ \frac{\hbar}{iqr} e^{\frac{iqrx}{\hbar}} \right]_{-1}^1 r^2 dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\hbar}{iqr} \left( e^{\frac{iqr}{\hbar}} - e^{-\frac{iqr}{\hbar}} \right) r^2 dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} r^2 dr, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ .

c) Es ist

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}) &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} r^2 dr \\
 &= \frac{\hbar a^3}{2q} \int_0^\infty e^{-ar} \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr \\
 &\stackrel{A=-a, B=\frac{q}{\hbar}}{=} -\frac{A^3}{2B} \int_0^\infty e^{-Ar} \sin Br dr
 \end{aligned}$$

und mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Identität gilt

$$\begin{aligned}
 I \equiv \int_0^\infty e^{-Ar} \sin Br dr &= \left[ \frac{r e^{Ar}}{A^2 + B^2} (A \sin(Br) - B \cos(Br)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{Ar}}{(A^2 + B^2)^2} ((A^2 - B^2) \sin(Br) - 2AB \cos(Br)) \right]_0^\infty.
 \end{aligned}$$

An der oberen Grenze ist

$$\frac{r e^{Ar}}{A^2 + B^2} \xrightarrow[A < 0]{r \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{e^{Ar}}{(A^2 + B^2)^2} \xrightarrow[A < 0]{r \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad I \rightarrow 0$$

und an der unteren Grenze ist

$$\begin{aligned}
 \frac{r e^{Ar}}{A^2 + B^2} \stackrel{r=0}{=} 0, \quad e^{Ar} \stackrel{r=0}{=} 1, \quad \sin Br \stackrel{x=0}{=} 0, \quad \cos Br \stackrel{x=0}{=} 1 \\
 \Rightarrow I = -\frac{2AB}{(A^2 + B^2)^2} = -\frac{2B}{A^3} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{B}{A}\right)^2\right)^2},
 \end{aligned}$$

und damit

$$F(\vec{q}) = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{q}{a\hbar}\right)^2\right)^2}.$$

d) Es ist

$$\begin{aligned}
 \langle r^2 \rangle &= \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3r \\
 &= 4\pi \rho_0 \int_0^\infty r^4 e^{-ar} dr \\
 &\stackrel{(2)}{=} 4\pi \rho_0 \frac{4!}{a^5} \\
 &= \frac{12}{a^2}
 \end{aligned}$$

und somit

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\sqrt{12}}{a} = 0,76 \text{ fm}.$$

e) Aus der Normierungsbedingung  $1 = \int \rho(\vec{r}) d^3r$  folgt  $C = \frac{3}{4\pi R^3}$  und damit für den Formfaktor einer kugelförmigen konstanten Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} F(\vec{q}) &= 4\pi C \int_0^R \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\left(\frac{qr}{\hbar}\right)} r^2 dr \\ &= \frac{3\hbar}{qR^3} \int_0^R r \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr \\ &\stackrel{x=\frac{q}{\hbar}r}{=} 3 \left(\frac{\hbar}{qR}\right)^3 \int_0^R x \sin x dx \end{aligned}$$

und somit wegen  $\int dx x \sin(x) = \sin(x) - x \cos(x)$

$$F(\vec{q}) = \frac{3}{\kappa^3} (\sin(\kappa) - \kappa \cos(\kappa)) , \quad \kappa \equiv \frac{qR}{\hbar} .$$

Für die beiden Formfaktoren gilt also

$$\begin{aligned} F(\vec{q})|_{\text{Proton}} &= \frac{1}{(1 + (\lambda)^2)^2} \\ F(\vec{q})|_{\text{Kugel}} &= \frac{3}{(\sqrt{12}\lambda)^3} \left( \sin(\sqrt{12}\lambda) - \sqrt{12}\lambda \cos(\sqrt{12}\lambda) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda = \frac{q}{a\hbar} = \frac{0,22 \text{ fm}}{197 \text{ MeV fm}} qc = \frac{0,22}{197} \frac{q}{\text{MeV}/c} .$$

Beide Formfaktoren sind in Abb. 3 verglichen. Die Ladungsverteilung des Protons kann mit einer homogen geladenen Kugel angenähert werden.

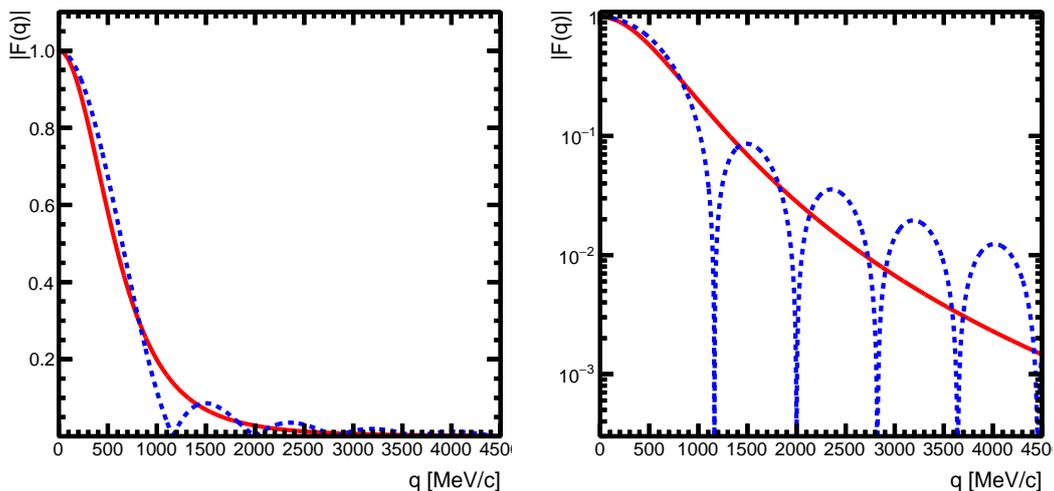


Abbildung 3: Formfaktor des Protons (durchgezogene Linie) und einer homogen geladenen Kugel, dessen Radius dem mittleren quadratischen Ladungsradius des Protons entspricht (gestrichelte Linie), in linearer und logarithmischer Darstellung.

## Literatur

- [1] S. W. Li and J. F. Beacom, “Spallation Backgrounds in Super-Kamiokande Are Made in Muon-Induced Showers”, *Phys. Rev.* **D91** (2015), no. 10, 105005, arXiv:1503.04823. doi:10.1103/PhysRevD.91.105005.