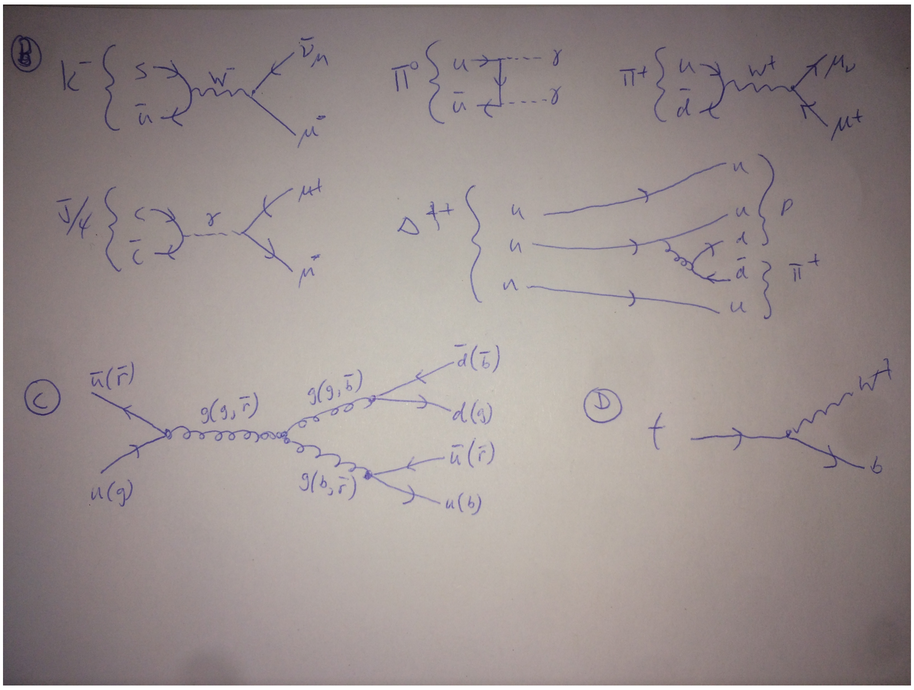
Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017

Übungsblatt Nr. 4: Musterlösungen

Aufgabe 1: Reaktionen der Teilchenphysik

a) (**1 Punkt**); b) (**2 Punkte**); c) (**1 Punkt**); d) (**1 Punkt**)

Zerfall	Lebensdauer[1]	Quarkzusammensetzung[2]	Zerfallsart[3]
$K^- \to \overline{\nu}_\mu \mu^-$	10^{-8} s	$\overline{u}s$	Weak
$\pi^0 \to \gamma\gamma$	10^{-17} s	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(u\overline{u} + d\overline{d} + s\overline{s}\right)$	EM
$\pi^+ \to \nu_\mu \mu^+$	10^{-8} s	$\overline{d}u$	Weak
$J/\psi \to \mu^+\mu^-$	$\overline{d}u$	$\overline{u}s$	EM
$\Delta^{++} \to p\pi^+$	10^{-28} s	uuu	Strong



Aufgabe 2: Fermigasmodell des Atomkerns

a) Im Grundzustand sind alle Zustände mit Impulsen von 0 bis zum Fermiimpuls besetzt. Die Anzahl der Zustände ist dann, vgl. Vorlesungsskript,

$$n = \int \mathrm{d}n = \int_0^{p_F} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p = \frac{Vp_F^3}{6\pi^2\hbar^3}\,,$$

separat für Neutronen und Protonen. Jeder Zustand ist dabei bzgl. des Spin entartet, kann also mit zwei Nukleonen mit unterschiedlichem Spin besetzt werden. Somit gilt für die Anzahl der Neutronen, N, bzw. die Anzahl der Protonen, Z,

$$N, Z = 2 \cdot n = \frac{Vp_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{4}{9\pi}\left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^2 Ap_F^3\,, \tag{1}$$

und also ist bei symmetrischen Kernen mit $N = Z = \frac{A}{2}$

$$\begin{aligned} p_F &= \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{hbar}{R_0} \\ &= \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \cdot \frac{197}{1,2}\frac{\mathrm{MeV}}{c} \\ &= 1,52 \cdot 164,2\,\mathrm{MeV}/c \\ &= 249,6\,\mathrm{MeV}/c\,. \qquad (\mathbf{1\ Punkt}) \end{aligned}$$

p_F ist unabhängig von A. Wird A größer, bleibt p_F konstant, aber die Energieniveaus rücken enger zusammen, sodass $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p}$ ansteigt.

Die Ortsunschärfe eines Nukleons mit Impulsunschärfe $\Delta p = p_F$ beträgt

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{p_F} = \frac{197\,\mathrm{MeV\,fm}}{249,6\frac{\mathrm{MeV}}{c}c} = 1,27\,\mathrm{fm} \approx R_0 \leq R\,.$$

Das Nukleon kann sich also im Kern aufhalten. (**1 Punkt**)

b) Für das Ferminiveau gilt mit dem Ergebnis aus a)

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{p_F^2}{2m} = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{R_0}\right)^2 \\ &= 1,52^2 \cdot \frac{c^2}{2 \cdot 938\,\mathrm{MeV}}(164,2\,\mathrm{MeV}/c)^2 \\ &= 33,2\,\mathrm{MeV}\,. \qquad (\mathbf{1\ Punkt}) \end{aligned}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + E_{\text{kin}}}{mc^2} \\
&= 1 + \frac{E_{\text{kin}}}{mc^2} = 1 + \frac{E_F}{mc^2} \\
&= 1 + \frac{33,2\,\text{MeV}}{938\,\text{MeV}} = 1 + 0,035\,.
\end{aligned}
$$

Die klassische Rechnung ist also gerechtfertigt. (**1 Punkt**)

c) (**1 Punkt**) Aus (1) folgt

$$
\begin{aligned}
p_F^{N,Z} &= \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{N,Z}{A}\right)^{1/3} \\
&= \underbrace{\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{R_0}}_{p_F^{N=Z}} \left(\frac{2N,Z}{A}\right)^{1/3} \\
\Rightarrow p_F^N &= p_F^{N=Z} \cdot \left(\frac{2N}{A}\right)^{1/3}, \quad p_F^Z = p_F^{N=Z} \cdot \left(\frac{2Z}{A}\right)^{1/3} \\
\Rightarrow E_F^N &= E_F^{N=Z} \cdot \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3}, \quad E_F^Z = E_F^{N=Z} \cdot \left(\frac{2Z}{A}\right)^{2/3}
\end{aligned}
$$

d) (**1 Punkt**) Die kinetische Energie aller Neutronen im Kern ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}}^N &= \underbrace{2}_{\text{Spin!}} \cdot \int_0^N E(p)\,\mathrm{d}n \\
&= 2 \cdot \int_0^{p_F^N} \frac{p^2}{2m} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p \\
&= \frac{V}{2\pi^2\hbar^3 m} \cdot \int_0^{p_F^N} p^4\, difp \\
&= \frac{2}{15\pi} \left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^3 \frac{A}{m} (p_F^N)^5
\end{aligned}
$$

und mit c)

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}}^N &= \frac{2}{15\pi} \left(\frac{R_0}{\hbar}\right)^3 \frac{A}{m} \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{5/3} \left(\frac{\hbar}{R_0}\right)^5 \left(\frac{2N}{A}\right)^{5/3} \\
&= \frac{3}{10m} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar}{R_0}\right)^2 \left(\frac{N^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}\right)
\end{aligned}
$$

und analog für E_{kin}^Z, also

$$
E_{\text{kin}}^{\text{tot}} = E_{\text{kin}}^N + E_{\text{kin}}^Z = \frac{3}{10m} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar}{R_0}\right)^2 \left(\frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}\right). \tag{2}
$$

e) (**1 Punkt**) Mit $\Delta = N - Z$ und $A = N + Z$ folgt $N = \frac{1}{2}(A+\Delta)$ und $Z = \frac{1}{2}(A-\Delta)$. Somit lässt sich (2) schreiben als

$$E_{\text{kin}}^{\text{tot}} \equiv E \propto A^{-\frac{2}{3}} \left[(A+\Delta)^{\frac{5}{3}} + (A-\Delta)^{\frac{5}{3}}\right]$$

und es ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\Delta} &\propto A^{-\frac{2}{3}} \left[(A+\Delta)^{\frac{2}{3}} + (A-\Delta)^{\frac{2}{3}}\right] \\ \frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\Delta^2} &\propto A^{-\frac{2}{3}} \left[(A+\Delta)^{-\frac{1}{3}} + (A-\Delta)^{-\frac{1}{3}}\right] . \end{aligned}$$

Entwicklung um $\Delta = 0$ ergibt

$$\begin{aligned} E(\Delta)|_{\Delta_0=0} &= A^{-\frac{2}{3}} \left[C_0(A^{\frac{5}{3}} + A^{\frac{5}{3}})C_1(A^{\frac{2}{3}} - A^{\frac{2}{3}})\Delta\frac{1}{2}C_2(A^{-\frac{1}{3}} + A^{-\frac{1}{3}})\Delta^2\right] \\ &= 2C_0A + C_2\frac{\Delta^2}{A} \\ &= \underbrace{2C_0A}_{\propto A\text{: Volumenterm}} + \underbrace{C_2\frac{(N-Z)^2}{A}}_{\propto\frac{(N-Z)^2}{A}\text{: Asymmetrieterm}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Tröpfchenmodell

Für die Bindungsenergien$E_{b,K}(A,Z)$ der Kerne vorher und nachher gilt, in MeV,

$$\begin{aligned} E_{b,K}(40,20) &= 15,8\cdot 40 - 18,3\cdot 40^{2/3} - \frac{0,714\cdot 20\cdot 19}{40^{1/3}} - 0 + \frac{12}{40^{3/4}} \\ &= 339,4 \\ E_{b,K}(39,20) &= 15,8\cdot 39 - 18,3\cdot 39^{2/3} - \frac{0,714\cdot 20\cdot 19}{39^{1/3}} - 23,2\frac{-0,5^2}{39} - 0 \\ &= 325,6 \end{aligned}$$

Die Bindungsenergie des Neutrons folgt aus der Differenz von $E_{b,K}(39,20)$ und $E_{b,K}(40,20)$ zu $E_B(n) = -13.8\,\text{MeV}$. Diese Energie ist nötig, um das Neutron vom Kern zu trennen.

Je (**2 Punkte**) für den Ansatz, die Energie aus der Differenz von $E_{b,K}(39,20)$ und $E_{b,K}(40,20)$ zu berechnen und für die Rechnung.

Aufgabe 4: Schalenmodell des Atomkerns

a) Für ${}^{15}_{7}\mathrm{N}_8$ sind die Besetzungszahlen

Neutron: $(1\mathrm{s}_{1/2})^2(1\mathrm{p}_{3/2})^4(1\mathrm{p}_{1/2})^2 \rightarrow$ abgeschlossene Schalen

Proton: $(1\mathrm{s}_{1/2})^2(1\mathrm{p}_{3/2})^4(1\mathrm{p}_{1/2})^1 \rightarrow$ unpaariges Nukleon, $J = \frac{1}{2}, l = 1$

Damit folgt für den Kern: Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$, Parität $\mathrm{P} = (-1)^1 = -1$: $J^{\mathrm{P}} = \frac{1}{2}^-$. (**1 Punkt**)

Für ${}^{17}_{9}\mathrm{F}_8$ sind die Besetzungszahlen

$$\begin{aligned} \text{Neutron:} \quad & \ldots(1\mathrm{p}_{1/2})^2 \rightarrow \text{abgeschlossene Schale} \\ \text{Proton:} \quad & \ldots(1\mathrm{d}_{5/2})^1 \rightarrow \text{unpaariges Nukleon, } J = \frac{5}{2}, l = 2 \end{aligned}$$

Damit folgt für den Kern: Gesamtdrehimpuls $J = \frac{5}{2}$, Parität $\mathrm{P} = (-1)^2 = +1$: $J^{\mathrm{P}} = \frac{5}{2}^+$. (**1 Punkt**)

Fluor tritt natürlich nur als Isotop ${}^{19}_{9}\mathrm{F}_{10}$ auf, für das das Schalenmodell ebenfalls $\frac{5}{2}^+$ vorhersagt (unvollständig aber paarige Besetzung der $1\mathrm{d}_{5/2}$ Schale durch Neutronen). Tatsächlich ist der Spin von ${}^{19}_{9}\mathrm{F}_{10}$ aber $\frac{1}{2}^+$; in dieser Konfiguration, weiter entfernt vom doppelt-magischen ${}^{16}_{8}\mathrm{O}_8$ funktioniert das Schalenmodell nicht mehr so gut.

b) Für uu-Kerne mit Bahndrehimpuls $l_{N/P}$ und Gesamtdrehimpuls $J_{N/P}$ des unpaarigen Neutrons/Protons gilt für die möglichen Gesamtdrehimpulse J und Parität P:

$$\begin{aligned} |J_N - J_P| \leq J &\leq J_N + J_P \\ P &= (-1)^{l_N} \cdot (-1)^{l_P} \end{aligned}$$

Für ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}_3$ sind die Besetzungszahlen

$$\begin{aligned} \text{Neutron:} \quad & (1\mathrm{s}_{1/2})^2(1\mathrm{p}_{3/2})^1 \rightarrow \text{unpaariges Nukleon, } J = \frac{3}{2}, l = 1 \\ \text{Proton:} \quad & (1\mathrm{s}_{1/2})^2(1\mathrm{p}_{3/2})^1 \rightarrow \text{unpaariges Nukleon, } J = \frac{3}{2}, l = 1 \end{aligned}$$

Damit folgt für den Kern: mögliche Gesamtdrehimpulse $0, 1, 2, 3$, Parität $\mathrm{P} = (-1)^1 \cdot (-1)^1 = +1$: $J^{\mathrm{P}} = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$. (**1 Punkt**)

Für ${}^{40}_{19}\mathrm{K}_{21}$ sind die Besetzungszahlen

$$\begin{aligned} \text{Neutron:} \quad & \ldots(1\mathrm{f}_{7/2})^1 \rightarrow \text{unpaariges Nukleon, } J = \frac{7}{2}, l = 3 \\ \text{Proton:} \quad & \ldots(1\mathrm{d}_{3/2})^1 \rightarrow \text{unpaariges Nukleon, } J = \frac{3}{2}, l = 2 \end{aligned}$$

Damit folgt für den Kern: mögliche Gesamtdrehimpulse $2, 3, 4, 5$, Parität $\mathrm{P} = (-1)^3 \cdot (-1)^2 = -1$: $J^{\mathrm{P}} = 2^-, 3^-, 4^-, 5^-$. (**1 Punkt**)