KIT-Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Kernphysik
Prof. Dr. Günter Quast
Priv. Doz. Dr. Roger Wolf
Dr. Pablo Goldenzweig

Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017

Übungsblatt Nr. 5

Ausgabe: Di, 06.06.2017

Abgabe: Di, 13.06.2017 (13:30) Briefkasten Geb. 30.23

Name des Übungsgruppenleiters und Gruppenbuchstabe:

Namen der bearbeitenden Gruppe:

Aufgabe 1: Mesonenaustauschmodell des Atomkerns (3 Punkte)
Das Yukawa-Potential zur Beschreibung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Mesonenaustauschmodell sei gegeben durch

$$V_0(r) = -g^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \, .$$

Man interpretiert die Kernkraft hier als durch den Austausch von massiven skalaren virtuellen Teilchen („Mesonen“) hervorgerufen. Die Konstante λ entspricht dabei der reduzierten Compton-Wellenlänge des ausgetauschten Mesons,

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_{\text{Meson}} c} \, ,$$

und lässt sich als effektive Reichweite der Kernkraft auffassen.

a) Für reale Nukleonen beträgt λ etwa 1,5 fm. Stellen Sie den Verlauf des Potentials graphisch dar. Welche Masse hat das ausgetauschte Meson?

b) Die Streuamplitude ist für kugelsymmetrische Potentiale gegeben durch

$$f(\theta) = \frac{2m_{\text{Nukleon}}}{\hbar^2} \int_0^\infty V(r) \frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}} r^2 \, \mathrm{d}r \, ,$$

wobei $q = |\vec{q}|$ der Betrag des Impulsübertrags des gestreuten Nukleons ist. Bestimmen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} \equiv |f(\theta)|^2$$

für das Yukawa-Potential.

c) Setzen Sie $-g^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$ und machen Sie den Grenzübergang $m_{\text{Meson}} \to 0$. Welches Potential ergibt sich damit? Wie lautet der Wirkungsquerschnitt in diesem Fall?

Aufgabe 2: Altersbestimmung mit der Radiokarbonmethode (4 Punkte)
Das in der kosmischen Höhenstrahlung aus ^{14}N gebildete ^{14}C-Isotop besitzt eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Es wird über den pflanzlichen Stoffwechsel in organische Materialien eingebaut und ist in lebender Substanz mit einer Häufigkeit von $1,5 \cdot 10^{-12}$ relativ zu den stabilen Kohlenstoffisotopen ^{12}C und ^{13}C vorhanden.

Für die Altersbestimmung werde eine zu untersuchende Probe in Form von CO_2-Gas, das 0,6 g Kohlenstoff enthalte, in einem Zählrohr verwendet.

a) Wie viele Zerfälle registriert man im Mittel pro Stunde aus einer frischen Probe?

b) Wie viele Zerfälle registriert man im Mittel pro Stunde aus einer Holzprobe mit einem Alter von 2 500 Jahren?

c) Ein 1973 bei der Elbinsel Hahnöfersand gefundenes Stirnbein („Schädel von Hahnöfersand") wurde zunächst auf ein Alter von 36 000 Jahren datiert. Bei einer Analyse mit „Ihrem Messaufbau" finden Sie 254 Zerfälle pro Stunde. Können Sie die Altersangabe bestätigen?

Aufgabe 3: Kaon-Zerfall (10 Punkte)

Geladene Kaonen können sowohl in ein Elektron und ein Neutrino also auch in ein Myon und ein Neutrino zerfallen. Berechnen Sie das Verhältnis

$$\frac{\Gamma(K^+ \to e^+\nu_e)}{\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)}$$

der Partialbreiten der beiden Zerfälle, unter der Verwendung von Fermis Goldener Regel

$$\Gamma(K^+ \to l^+\nu_l) \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho_f(E_f)\,.$$

Rechnen Sie im Ruhesystem des Kaons und gehen Sie wie folgt vor[1] (im Folgenden wird das Superskript + in den Teilchenbezeichnungen der Lesbarkeit halber weggelassen, es ist also z.B. $l \equiv l^+$):

a) Zeigen Sie, dass für Impuls und Energie des geladenen Leptons gilt

$$\begin{aligned} p_l &= \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \\ E_l &= \frac{m_K^2 + m_l^2}{2m_K}\,, \end{aligned}$$

wobei $m_K = 493.6\,\mathrm{MeV}$ die Kaonmasse und m_l die Masse des geladenen Leptons ist. Das Neutrino kann hier als masselos angenommen werden.

b) Zeigen Sie unter Verwendung der Beziehung $|\mathcal{M}_{fi}|^2 \propto 1 - \beta_f$, dass für das Verhältnis der Matrixelementquadrate der beiden Zerfälle gilt

$$\frac{|\mathcal{M}_{K\to e\nu_e}|^2}{|\mathcal{M}_{K\to\mu\nu_\mu}|^2} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\cdot\frac{m_K^2 + m_\mu^2}{m_K^2 + m_e^2}\,.$$

[1] Die Aufgabe folgt „Teilchen und Kerne" von Povh et al.

c) Zeigen Sie, dass für das Verhältnis der Dichten der Zustände im Phasenraum gilt

$$\frac{\rho_e(E_f)}{\rho_\mu(E_f)} = \left(\frac{m_K^2 - m_e^2}{m_K^2 - m_\mu^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{m_K^2 + m_e^2}{m_K^2 + m_\mu^2}\right) .$$

Verwenden Sie bei Ihrer Rechnung, dass die Zustandsdichte angenommen werden kann als $\rho(E_f) = \rho(E_i) \propto p_l^2 \mathrm{d}p_l / \mathrm{d}E_i$.

d) Vergleichen Sie das Ergebnis mit den gemessenen Verzweigungsverhältnissen von

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(K^+ \to e^+\nu_e) &= (1,55 \pm 0,07) \cdot 10^{-5} \\ \mathcal{B}(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) &= (63,43 \pm 0,17) \cdot 10^{-2} . \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Geiger-Nuttall-Regel (3 Punkte)

Das Radium-Isotop ^{226}Ra, das Polonium-Isotop ^{210}Po („Radium F“) und das Polonium-Isotop ^{214}Po („Radium C’“) gehören alle zur selben radioaktiven Zerfallsreihe. Die Flugweite in Luft unter Normalbedingungen von α-Teilchen aus dem ^{226}Ra-Zerfall (Halbwertszeit 1 622 Jahre) beträgt 3,36 cm und bei α-Teilchen aus dem ^{210}Po-Zerfall (Halbwertszeit 138 Tage) 3,85 cm. Berechnen Sie die Halbwertszeit für α-Teilchen aus dem ^{214}Po-Zerfall, die in Luft bei Normalbedingungen 5,78 cm weit fliegen, unter Verwendung der Geiger-Nuttall-Regel. Verwenden Sie die folgende Form der Geiger-Nuttall-Regel: $\ln\lambda = k \cdot \ln x + c$, wobei $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ die Zerfallskonstante, x die Reichweite und k und c Konstanten sind.