Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017

Übungsblatt Nr. 5: Musterlösungen

Aufgabe 1: Mesonenaustauschmodell des Atomkerns
Jeweils (**1 Punkt**) pro Teilaufgabe.

a) Das Yukawa-Potenzial ist für $g = 1$ und $\lambda = 1,5\,\text{fm}$ in Abb. 1 dargestellt.

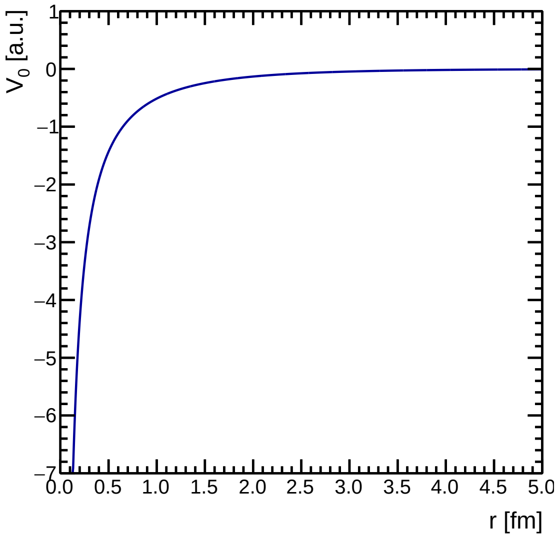

Abbildung 1: Yukawa-Potenzial für $g = 1$ und $\lambda = 1,5\,\text{fm}$.

Mit $\lambda = 1,5\,\text{fm}$ (und mit $\hbar c = 197\,\text{MeV fm}$) gilt für die Masse des ausgetauschten Teilchens $m = 131,3\,\text{MeV}/c^2 \approx m_\pi$.

b) Für das Yukawa-Potenzial ist

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{2m_\text{N}}{\hbar^2}\int_0^\infty \left(-g^2\frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}\right)\frac{\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)}{\frac{qr}{\hbar}}r^2\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{2m_\text{N}g^2}{\hbar q}\int_0^\infty e^{-\frac{r}{\lambda}}\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2m_\text{N}g^2}{\hbar q}\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{q}{\hbar}\right)^2}\frac{q}{\hbar}
\end{aligned}
$$

wegen

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= |f(\theta)|^2 = \left(\frac{2m_\mathrm{N}g^2}{\hbar^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{q}{\hbar}\right)^2}\right)^2 \\
\lambda = \frac{\hbar}{m_\pi c} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \left(2m_\mathrm{N}g^2\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{m_\pi^2 c^2 + q^2}\right)^2
\end{aligned}$$

c) Mit $-g^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}$ und $m_\pi \rightarrow 0$ wird

$$V_0(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(2m_\mathrm{N}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{q^4}\,,$$

und mit $q = 2p\sin\frac{\theta}{2}$ und $E = \frac{p^2}{2m_N}$ findet man

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}\,.$$

Im Grenzfall $m_\pi \rightarrow 0$ geht das Yukawa-Potenzial in das Coulomb-Potenzial über, wie es von masselosen Photonen erzeugt wird, und man findet den Rutherford-Streuquerschnitt.

Aufgabe 2: Altersbestimmung mit der Radiokarbonmethode

Die Anzahl der Kerne zur Zeit t ist gegeben durch

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,, \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

und die Aktivität durch

$$A(t) = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda\cdot N(t)\,.$$

a) Die Anzahl der ^{14}C-Kerne in 0,6 g Kohlenstoff in einer frischen Probe betragen

$$\begin{aligned}
N(t=0) = N_0 &= \frac{0,6}{12}\cdot N_A \cdot 1,5\cdot 10^{-12} \\
&= \frac{0,6}{12}\cdot 6,022\cdot 10^{23}\cdot 1,5\cdot 10^{-12} \\
&= 4,5\cdot 10^{10}\,. \quad (\mathbf{1\ Punkt}) \\
\Rightarrow A(0) &= \lambda N(0) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot N_0 \\
&= \frac{\ln 2}{5730\cdot 365\cdot 24\,\mathrm{h}}\cdot 4,5\cdot 10^{10} \\
&= 621/\,\mathrm{h} \quad (\mathbf{1\ Punkt})
\end{aligned}$$

b) In der Zeit Δt nach der Abtrennung vom Stoffwechsel reduziert sich der ^{14}C-Gehalt um den Faktor

$$\begin{aligned} \frac{N(\Delta t)}{N(0)} &= e^{-\lambda \Delta t} = e^{-\frac{\ln 2 \Delta t}{T_{1/2}}} = 2^{-\frac{\Delta t}{T_{1/2}}} \\ &= 2^{-\frac{2500}{5730}} = 0,739\,. \\ \Rightarrow A(\Delta t) &= 0,739 \cdot A(0) = 0,739 \cdot 621/\,\mathrm{h} = 459/\,\mathrm{h}\,. \quad (\textbf{1 Punkt}) \end{aligned}$$

c) Aus

$$\frac{A(\Delta t)}{A(0)} = \frac{N(\Delta t)}{N(0)} = e^{-\lambda \Delta t}$$

folgt für das Alter des Knochens

$$\begin{aligned} \Delta t &= -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N(\Delta t)}{N(0)}\right) = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(\frac{N_0}{N(\Delta t)}\right) \\ &= \frac{5730}{\ln 2} \ln\left(\frac{621}{254}\right) = 7357\,\text{Jahre}\,. \quad (\textbf{1 Punkt}) \end{aligned}$$

Tatsächlich war das urspr. ermittelte Alter von 36 000 Jahren Resultat eines Fälschungsskandals und wurde später auf 5400 v. Chr. korrigiert[1].

Aufgabe 3: Kaon-Zerfall und Goldene Regel Im Ruhesystem des Kaons ist aufgrund der Impulserhaltung $|\vec{p}_l| = |\vec{p}_\nu| \equiv p$ (**1 Punkt**).

a) Aufgrund der Energieerhaltung folgt $E_K = m_K = E_\nu + E_l$ (**1 Punkt**), also

$$\begin{aligned} E_K &= m_K = E_\nu + E_l = p + \sqrt{p^2 + m_l^2} \\ \Rightarrow (m_K - p)^2 &= m_K^2 - 2m_K p + p^2 = p^2 + m_l^2 \\ \Rightarrow p &= \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K}\,. \quad (\textbf{1 Punkt}) \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich für die Energie des Leptons zu

$$\begin{aligned} E_l &= \sqrt{p^2 + m_l^2} \\ &= \frac{1}{2m_K}\sqrt{m_K^4 - 2m_K^2 m_l^2 + m_l^4 + 4m_K^2 m_l^2} \\ &= \frac{1}{2m_K}\sqrt{(m_K^2 + m_l^2)^2} \\ &= \frac{m_K^2 + m_l^2}{2m_K}\,. \quad (\textbf{1 Punkt}) \end{aligned}$$

[1]https://de.wikipedia.org/wiki/Schädel_von_Hahnöfersand

b) Aus Imupls und Energie folgt

$$\beta_l = \frac{p}{E_l} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{2m_K} \cdot \frac{2m_K}{m_K^2 + m_l^2} = \frac{m_K^2 - m_l^2}{m_K^2 + m_l^2} . \quad (\textbf{1 Punkt})$$

Daraus folgt für das Verhältnis der Matrixelementsquadrate

$$\begin{aligned}
\frac{|\mathcal{M}_{K\to e\nu_e}|^2}{|\mathcal{M}_{K\to\mu\nu_\mu}|^2} &= \frac{1-\beta_e}{1-\beta_\mu} \\
&= \frac{(m_K^2 + m_e^2 - m_K^2 + m_e^2)/(m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 + m_\mu^2 - m_K^2 + m_\mu^2)/(m_K^2 + m_\mu^2)} \\
&= \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \cdot \frac{m_K^2 + m_\mu^2}{m_K^2 + m_e^2} \quad (\textbf{1 Punkt}) \\
&= 2,37 \cdot 10^{-5}
\end{aligned}$$

c) Die Zustandsdichte ist proportional zu $p_l^2 \mathrm{d}p_l/\mathrm{d}E_i$ mit $E_i = E_K = m_K$. Mit (1) folgt

$$\frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}E_K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_K}\frac{E_K^2 - m_l^2}{2E_K} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_K}\frac{1}{2}\left(E_K - \frac{m_l^2}{E_K}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_l^2}{E_K^2}\right) . \quad (\textbf{1 Punkt})$$

Mit $E_K = m_K$ folgt

$$p_l^2 \frac{\mathrm{d}p_l}{\mathrm{d}E_K} = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2}{4m_K^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_l^2}{m_K^2}\right) = \frac{(m_K^2 - m_l^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_l^2)}{8m_K^4} .$$

Das Verhältnis der Zustandsdichten ist also

$$\frac{\rho_e(E_K)}{\rho_\mu(E_K)} = \frac{p_e^2 \mathrm{d}p_e/\mathrm{d}E_K}{p_\mu^2 \mathrm{d}p_\mu/\mathrm{d}E_K} = \frac{(m_K^2 - m_e^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_e^2)}{(m_K^2 - m_\mu^2)^2 \cdot (m_K^2 + m_\mu^2)} = 1,05 . \quad (\textbf{1 Punkt})$$

d) Mit b) und c) erhält man für das Verhältnis der partiellen Zerfallsbreiten

$$\frac{\Gamma(K^+ \to e^+\nu_e)}{\Gamma(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)} = \frac{|\mathcal{M}_{Ke}|^2}{|\mathcal{M}_{K\mu}|^2} \cdot \frac{\rho_e(E_K)}{\rho_\mu(E_K)} = 2,49 \cdot 10^{-5} . \quad (\textbf{1 Punkt})$$

e) Da das Verzweigungsverhältnis proportional zur partiellen Zerfallsbreite ist, ist das Ergebnis aus d) zu vergleichen mit

$$\frac{\mathcal{B}(K^+ \to e^+\nu_e)}{\mathcal{B}(K^+ \to \mu^+\nu_\mu)} = \frac{1.55 \cdot 10^{-5}}{0.6343} = 2,44 \cdot 10^{-5} . \quad (\textbf{1 Punkt})$$

Die Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert ist also recht gut.

Aufgabe 4: Geiger-Nuttall-Regel (α-Zerfall)

Die Geiger-Nuttall-Regel ist

$$\ln\lambda = k \cdot \ln x + c ,$$

wobei $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$ die Zerfallskonstante, x die Reichweite und k und c Konstanten sind. Daraus folgt

$$k \cdot \ln x + \ln T_{1/2} = \underbrace{\ln(\ln 2) - c}_{\equiv c_1} \tag{2}$$

mit c_1 =konstant. (**1 Punkt**)

Einsetzen für die $^{226}_{88}$Ra- und $^{210}_{84}$Po-Zerfälle ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 &= k \ln 3,36 + \ln(1622 \cdot 365) \\ c_1 &= k \ln 3,85 + \ln 138\,. \end{aligned}$$

Auflösen ergibt für $k = 61,44$ and $c_1 = 87,75$ (**1 Punkt**). Damit und mit (2) folgt bei einer Reichweite von $x = 5,78\,\text{cm}$ für $T_{1/2} = 1,898 \cdot 10^{-9}$ Tage, also $T_{1/2} = 171\,\mu$s. (**1 Punkt**)