

Übungen zu Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2017

Übungsblatt Nr. 6: Musterlösungen

Aufgabe 1: Zerfallsreihen und radioaktives Gleichgewicht

- a) Die Anzahl der Nuklide in einer radioaktiven Zerfallsreihe wird durch den Zerfall in den Tochterkern erniedrigt und durch den Zerfall des Mutterkerns erhöht,

$$\frac{dN(t)_i}{dt} = -\lambda_i N(t)_i + \lambda_{i-1} N(t)_{i-1},$$

wobei für das erste Nuklid $i = 0$ gilt

$$\frac{dN(t)_0}{dt} = -\lambda_0 N(t)_0.$$

(1 Punkt)

- b) Für den gegebenen Fall mit drei Nukliden ist das zu lösende System aus Differentialgleichungen gegeben als

$$\frac{d\mathbf{N}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & 0 & 0 \\ \lambda_0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{N}(t)$$

mit $\mathbf{N}(t) = (N_0(t), N_1(t), N_2(t))$, und lässt sich z.B. mit dem in Abb. 1 gezeigten Python-Programm lösen.

(4 Punkte) für das richtige Lösen der DGLs.

- c) Mit den Anfangsbedingungen $N_0 = 100$ und $N_1 = N_2 = 0$ ergibt sich für Anzahl der Kerne N_i und die Aktivitäten $A_i = \lambda_i N_i$ der in Abb. 2 gezeigte Verlauf. Je **(1 Punkt)** für die Darstellung von N_i und A_i .

Die Zerfallskonstante des K_0 ist deutlich kleiner als die der anderen Nuklide, es ist also deutlich langlebiger, und die Aktivität ist während der Anfangsphase im Vergleich somit praktisch konstant. Die Aktivität der Tochternuklide dagegen erhöht sich in der Anfangsphase durch die Zerfälle der Mutternuklide stark, die daraufhin A_1 bzw. A_2 bestimmen, welche sich somit asymptotisch A_0 nähern. Man spricht von "säkularem Gleichgewicht".

(1 Punkt)

```

1  #!/usr/bin/env python
2
3  import numpy as np
4  from scipy.integrate import odeint
5  import matplotlib.pyplot as plt
6
7  # the differential equation is given by
8  # dN/dt = A*N = f(N,t)
9  # with N a 3-dim vector, A a 3x3 matrix,
10 # and f:R^{4}->R^{3} a function
11
12 # decay constants
13 lb = [ 0.01, 1.5, 0.3 ]
14
15 # start values: N_i(t=0)
16 N0 = [ 100, 0, 0 ]
17
18 # function f
19 def f(N,t):
20     return [ -lb[0]*N[0],
21              lb[0]*N[0] - lb[1]*N[1],
22              lb[1]*N[1] - lb[2]*N[2] ]
23
24 # points in time to evaluate
25 times = np.linspace(0,25,1000)
26
27 # get numerical solutions at the points in 'times'
28 Nt = odeint(f,N0,times)

```

Abbildung 1: Beispielpythonprogramm zur numerischen Lösung der DGL.

- d) Zerfallsreihen entstehen aus aufeinanderfolgenden radioaktiven Zerfällen. Dabei verringern α -Zerfälle die Massenzahl A um 4 und β -Zerfälle verändern lediglich die Anzahl der Protonen und Neutronen, wobei A konstant bleibt. Für die Massenzahl innerhalb einer Zerfallsreihe gilt also

$$A = 4n + m$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0, 1, 2, 3$, wobei m dann immer konstant bleibt. Es ergeben sich somit vier Zerfallsreihen:

- Thorium-Reihe ($A = 4n$): $^{232}\text{Th} \rightarrow ^{208}\text{Pb}$
- Neptunium-Reihe ($A = 4n + 1$): $^{237}\text{Np} \rightarrow ^{205}\text{Tl}$
- Uran-Reihe ($A = 4n + 2$): $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$
- Actinium-Reihe ($A = 4n + 3$): $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$

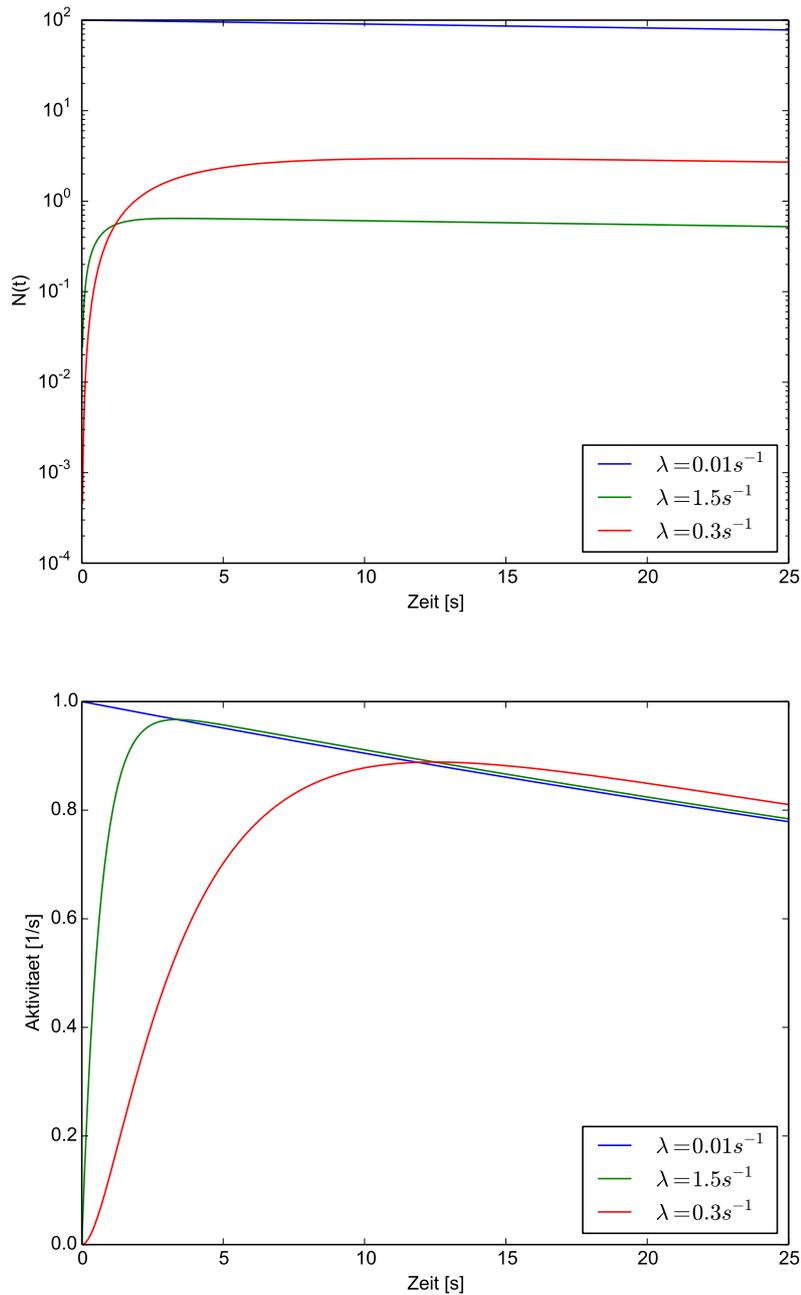


Abbildung 2: Anzahl Kerne und Aktivität.

Je (1 Punkt) für die Nennung der Zerfallsreihen und die Begründung, warum es vier gibt.

Die Anfangsnuklide der Neptunium-Reihe kommen aufgrund ihrer kurzen Halbwertszeit natürlich auf der Erde nicht mehr vor. Ihr letzter Zerfallsschritt von $^{209}\text{Bi} \rightarrow ^{205}\text{Tl}$ hat eine extrem hohe Halbwertszeit von 10^{18} Jahren, weshalb häufig auch ^{209}Bi als Endnuklid angegeben wird.

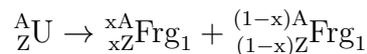
Manche der beteiligten Nuklide können alternativ auch durch Spontanspaltung außerhalb der Zerfallsreihen zerfallen. Dies geschieht aber extrem selten und wird hier nicht betrachtet.

Aufgabe 2: Spontane Kernspaltung

Die Masse eines Kerns mit $A = Z + N$ ergibt sich aus

$$M(Z, N) = Z \cdot m_P + N \cdot m_N - E_B(Z, N). \quad (1)$$

Bei der spontanen Spaltung von ${}_{92}^{235}\text{U}$ in zwei Fragmente Frg,



wird somit die Energie

$$\begin{aligned} \Delta E &= M_U(Z, N) - (M_{\text{Frg}_1}(Z, N) + M_{\text{Frg}_2}(Z, N)) \\ &\stackrel{(1)}{=} E_{B, \text{Frg}_1}(Z, N) + E_{B, \text{Frg}_2}(Z, N) - E_{B, U}(Z, N) \end{aligned} \quad (2)$$

frei. (1 Punkt)

Die Bindungsenergie wird hier mit der Bethe-Weizsäcker-Formel

$$E_B(Z, N) = a_V A - a_O A^{2/3} - \frac{a_C Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \frac{a_P}{A^{3/4}}$$

berechnet, wobei

$$\begin{aligned} a_V &= 15,8 \text{ MeV}, \\ a_O &= 18,3 \text{ MeV}, \\ a_C &= 0,714 \text{ MeV}, \\ a_A &= 23,2 \text{ MeV}, \\ a_P &= \begin{cases} 12 \text{ MeV} & \text{gg-Kerne} \\ 0 & \text{ug/gu-Kerne} \\ -12 \text{ MeV} & \text{uu-Kerne} \end{cases} . \end{aligned}$$

Die Paarungsenergie (Term mit a_P) ist hier vernachlässigbar gering aufgrund der großen A und Z .

Die Fragmentmassen werden zu $x \cdot A$ und $(1-x) \cdot A$, $0 < x < 1$, angenommen und $Z/A = \text{konst.}$ Damit heben sich die Beiträge der Volumen- und Asymmetrieterme (Terme mit a_V bzw. a_A) in (2) auf, und es tragen nur noch die Beiträge der Oberflächen- und Coulombterme bei:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left(-a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z}{A^{1/3}} \right) [x^{2/3} + (1-x)^{2/3} - 1] \\ &\quad - a_C \frac{Z}{A^{1/3}} [x^{5/3} + (1-x)^{5/3} - 1] . \end{aligned}$$

Damit folgt für die freiwerdende Energie

$$\begin{aligned} {}^{235}_{92}\text{U} &\rightarrow {}^{117}_{46}\text{Pd} + {}^{118}_{46}\text{Pd} (A = 235; x = 0, 5) : \Delta E = -183,9 \text{ MeV} + 362,4 \text{ MeV} = 178,5 \text{ MeV} \\ {}^{235}_{92}\text{U} &\rightarrow {}^{94}_{37}\text{Rb} + {}^{141}_{55}\text{Cs} (A = 235; x = 0, 4) : \Delta E = -179,9 \text{ MeV} + 348,7 \text{ MeV} = 168,8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Mit der BW-Formel ist energetisch also die symmetrische Spaltung bevorzugt. Tatsächlich spaltet Uran spontan auch unsymmetrisch u.a. als Folge der nicht kugelförmigen Gestalt von ${}^{235}\text{U}$ vor der Spaltung, die nicht mit der BW-Formel beschrieben wird.

Aufgabe 3: Kernspintomographie

- a) Die Energie eines magnetischen Moments (hier der Kernspin) im homogenen äußeren Feld beträgt

$$E(s_z) = -\vec{\mu} \vec{B} = -g_P \mu_K s_z B$$

mit dem Kernmagneton $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_P} = 3,152 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$ und dem g -Faktor des Protons $g_P = 5,586$ (**1 Punkt**). Die Energiedifferenz der beiden Zustände beträgt also

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(s_z = -\frac{1}{2}) - E(s_z = +\frac{1}{2}) = g_P \mu_K B \\ &= 5,586 \cdot 3,152 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T} \cdot 1,2 \text{ T} \\ &= 2,109 \cdot 10^{-13} \text{ MeV}. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

- b) Im thermischen Gleichgewicht können die Besetzungszahlen als Boltzmann-verteilt angenommen werden, also

$$N(s_z) \propto \exp\left(-\frac{-g_P \mu_K s_z B}{k_B T}\right)$$

(1 Punkt) und somit

$$\frac{N(s_z = -\frac{1}{2})}{N(s_z = +\frac{1}{2})} = \frac{\exp\left(-\frac{g_P \mu_K \frac{1}{2} B}{k_B T}\right)}{\exp\left(+\frac{g_P \mu_K \frac{1}{2} B}{k_B T}\right)} = \exp\left(-\frac{g_P \mu_K B}{k_B T}\right).$$

Nun ist

$$\frac{g_P \mu_K B}{k_B T} = \frac{2,109 \cdot 10^{-13} \text{ MeV}}{8,6171 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/K} \cdot 310 \text{ K}} = 7,90 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

und mit $e^{-x} = 1 - x$ für $x \ll 1$ ist

$$\frac{N(s_z = -\frac{1}{2})}{N(s_z = +\frac{1}{2})} = 1 - 7,90 \cdot 10^{-6}.$$

(1 Punkt) Beide Niveaus sind also nahezu gleich besetzt.

Das aus dem kleinen Unterschied resultierende makroskopische magnetische Moment von $N_{\text{tot}} = N(s_z = +\frac{1}{2}) + N(s_z = -\frac{1}{2})$ Wasserstoffkernen beträgt

$$\begin{aligned} \mu_{\text{tot}} &= \left(N(s_z = +\frac{1}{2}) - N(s_z = -\frac{1}{2}) \right) \cdot g_P \mu_K |s_z| \\ &= N_{\text{tot}} \cdot \frac{N(s_z = +\frac{1}{2}) - N(s_z = -\frac{1}{2})}{N(s_z = +\frac{1}{2}) + N(s_z = -\frac{1}{2})} \cdot g_P \mu_K |s_z| \\ &\approx N_{\text{tot}} \frac{g_P \mu_K |s_z| B}{k_B T} g_P \mu_K |s_z| \end{aligned}$$

(1 Punkt)

Die Dichte von Wasser beträgt bei Körpertemperatur etwa 1 g/cm^3 , also befinden sich in 1 cm^3 etwa $\frac{1}{18} N_A$ H_2O -Moleküle und somit $\frac{2}{18} N_A$ Wasserstoffkerne. Damit ist

$$\mu_{\text{tot}} = \frac{2}{18} \cdot 6,023 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{2} 7,90 \cdot 10^{-6} \cdot 8,804 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T} = 2,32 \cdot 10^4 \text{ MeV/T}.$$

(1 Punkt)

c) Die Frequenz muss der Energie des Übergangs entsprechen,

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2,109 \cdot 10^{-13} \text{ MeV}}{4,1355 \cdot 10^{-21} \text{ MeV s}} = 51,0 \text{ MHz}.$$

(1 Punkt)