

# Übungen zu Moderne Experimentalphysik III (Kerne und Teilchen) Sommersemester 2017

## Übungsblatt Nr. 9: Musterlösungen

---

### Aufgabe 1: Quarkmodell

a) Das Quarkmodell wird u.a. durch die folgenden experimentellen Befunde gestützt:

- Die Ergebnisse der tiefunelastischen Streuung von Elektronen an Nukleonen weisen auf Substruktur der Nukleonen hin.
- Die SU(3)-Symmetrie der Hadronen kann mit Hilfe des Quarkmodells erklärt werden.
- Das Quarkmodell sagt die korrekten Verhältnisse hadronischer Reaktionen vorher.

(1 Punkt) für mindestens eine richtige Antwort.

b) Im Quarkmodell, wie es von Gell-Mann und Ne'eman eingeführt wurde, werden Hadronen als aus verschiedenen Kombinationen von drei Quarks (u,d,s) aufgebaut beschrieben. Dabei werden Hadronen mit demselben Spin und Parität  $J^P$  aber unterschiedlicher Strangeness und Isospin in dasselbe Multiplett eingeordnet. Die (ungefähre) Flavor-SU(3)-Symmetrie der starken Wechselwirkung bedeutet, dass physikalische Gesetze invariant sind unter Rotationen in diesem dreidimensionalen Vektorraum.

Im Falle perfekter Flavor-SU(3)-Symmetrie müssten die Teilchen im selben Supermultiplet die selbe Masse haben. Tatsächlich treten (z.T. große) Massenunterschiede auf, sodass die Symmetrie nicht exakt ist sondern gebrochen. Man vergleiche bspw. die Massen der neutralen Pionen und Kaonen im Supermultiplet der pseudoskalaren Mesonen ( $J^P = 0^-$ ):

$$\begin{aligned}m(\pi^0) &= 135 \text{ MeV} \\m(K^0) &= 498 \text{ MeV} .\end{aligned}$$

(1 Punkt)

c) Die Teilchen und ihre Quantenzahlen sind in Tabelle 1 aufgelistet. (1 Punkt)

d) Farbe wurde als weiterer Freiheitsgrad eingeführt, um Schwierigkeiten mit der Spinstatistik bei einigen Baryonen zu lösen. Im Quarkmodell hat jedes Quark Spin  $\frac{1}{2}$ , sodass Baryonen insgesamt Fermionen sind. Die Gesamtwellenfunktion des Baryons muss also antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks sein. Dies ist aber z.B. beim  $\Omega^{-1}$ -Baryon ( $sss$ ) nicht der Fall, wenn man nur die folgenden Anteile der Wellenfunktion betrachtet:

- Ortsanteil:  $P(\Omega^{-1}) = +1 \rightarrow$  symmetrisch
- Spinanteil:  $J(\Omega^{-1}) = \frac{3}{2} (|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle) \rightarrow$  symmetrisch
- Flavoranteil: das  $\Omega^{-1}$  ( $|sss\rangle$ ) ist Teil eines Baryonendekupletts  $\rightarrow$  symmetrisch

Um diesen Widerspruch aufzulösen, wurde eine weitere Quantenzahl Farbe mit drei möglichen Zuständen eingeführt. **(1 Punkt)**

Die Existenz von drei Farb-Zuständen kann z.B. durch Messung des Verhältnisses

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_q z_q^2 \quad (1)$$

der Wirkungsquerschnitte für Myon- und Hadronproduktion in Elektron-Positron-Kollisionen gezeigt werden, s. Abb. 1. Dabei ist  $N_c$  die Anzahl der Farbladungen und  $z_q$  die Ladungszahl des Quarks  $q$ , wobei die Summe über alle Quarks läuft, die aufgrund der gegebenen Kinematik paarerzeugt werden können („aktive Quarkflavors“). Zum Beispiel, wenn die Energie des  $e^+e^-$ -Systems ausreicht, um u,d,s,c-Quarks paarweise zu erzeugen, d.h.  $\sqrt{s} \gtrsim 3.7 \text{ GeV}$ , erwartet man

$$R = \frac{10}{9} N_c.$$

Tabelle 1: Teilchen der pseudoskalaren Mesonen-Multipletts ( $0^-$ ) und Vektormesonen-Multipletts ( $1^-$ ) im Quarkmodell und ihre Quantenzahlen.

	$0^-$	$1^-$	$T$	$T_3$	$Y$	$S$
Oktett	$\pi^+$	$\rho^+$	1	+1	0	0
	$\pi^0$	$\rho^0$	1	0	0	0
	$\pi^-$	$\rho^-$	1	-1	0	0
	$K^+$	$K^{*+}$	1/2	+1/2	+1	+1
	$K^-$	$K^{*-}$	1/2	-1/2	-1	-1
	$K^0$	$K^{*0}$	1/2	-1/2	+1	+1
	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^{*0}$	1/2	+1/2	-1	-1
	$\eta_8$		0	0	0	0
Singulett		$\omega$	0	0	0	0
	$\eta_1$	$\phi$	0	0	0	0

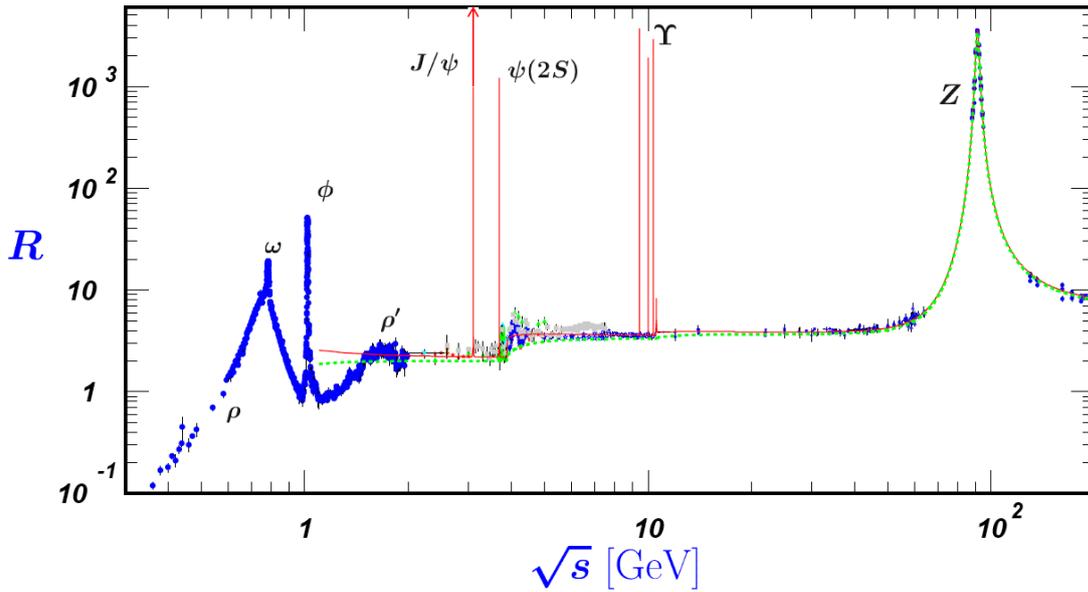


Abbildung 1: Verhältnis  $R$  der Wirkungsquerschnitte für Myon- und Hadronproduktion in Elektron-Positron-Kollisionen.

Ohne Farbe ( $N_c = 1$ ) erwartet man also  $R = \frac{10}{9}$ . Tatsächlich misst man  $R = \frac{10}{3}$ , vgl. Abb. 1, in Übereinstimmung mit der Annahme  $N_c = 3$ .

$N_c$  kann auch aus dem Laufen von  $\alpha_s$  abgeleitet werden, für das gilt

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{12\pi}} (11N_c - 2N_f) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right),$$

mit der Zahl  $N_f$  der aktiven Quarkflavors. **(1 Punkt)**

## Aufgabe 2: $e^+e^-$ -Collider

a) Integration über den Raumwinkel liefert den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{(\alpha\hbar c)^2}{4s} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{2\pi(\alpha\hbar c)^2}{4s} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &\stackrel{x=\cos\theta}{=} \frac{2\pi(\alpha\hbar c)^2}{4s} \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx \\ &= \frac{2\pi(\alpha\hbar c)^2}{4s} \left[ x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi(\alpha\hbar c)^2}{3s}. \end{aligned}$$

**(1 Punkt)**

b) Die Rate ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt} &= \sigma \cdot L \\
 &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cdot (197 \text{ MeV fm})^2 \cdot \frac{1}{(8 \text{ GeV})^2} \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{197}{137}\right)^2 \cdot \frac{1}{64} \cdot 10^{-6} \cdot (10^{-13} \text{ cm})^2 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{197}{137}\right)^2 \cdot \frac{1}{64} \text{ s}^{-1} \\
 &= 0,14 \text{ s}^{-1},
 \end{aligned}$$

wobei für die Schwerpunktsenergie gilt  $\sqrt{s} = 2E = 8 \text{ GeV}$ . (1 Punkt)

c) Das Verhältnis  $R$  der Wirkungsquerschnitte für Myon- und Hadronproduktion in Elektron-Positron-Kollisionen ist gegeben durch (1). Die Schwerpunktsenergie beträgt  $\sqrt{s} = 8 \text{ GeV}$ , also können u, d, s und c paarweise erzeugt werden, also

$$R = 3 \cdot \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{10}{3}.$$

Somit folgt

$$\frac{dN}{dt}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) = R \cdot \frac{dN}{dt}(\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)) = \frac{10}{3} \cdot 0,14 \text{ s}^{-1} = 0,47 \text{ s}^{-1}.$$

(1 Punkt)

d) Für eine statistische Unsicherheit von 10% benötigt man  $N_{\text{had}} = 100$  Ereignisse. (1 Punkt) Dabei ist  $N_{\text{had}}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}
 N_{\text{had}} &= \frac{dN}{dt}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \cdot \Delta t \\
 &= \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \cdot L \cdot \Delta t
 \end{aligned}$$

mit  $\Delta t = 2$  Stunden, also

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{N_{\text{had}}}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \cdot \Delta t} \\
 &= \frac{N_{\text{had}}}{R \cdot \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \cdot \Delta t}.
 \end{aligned}$$

Bei  $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$  können alle 6 Quark-Flavours paarweise erzeugt werden, also ist  $R = 5$ , und es ist

$$\begin{aligned}
 \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{197}{137}\right)^2 \cdot \frac{1}{500^2} \cdot 10^{-32} \text{ cm}^2 \\
 &= 3,5 \cdot 10^{-37} \text{ cm}^2.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} L &= \frac{100 \cdot 10^{37}}{5 \cdot 3,5 \text{ cm}^2 \cdot 7200 \text{ s}} \\ &= 7,9 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

(1 Punkt)

### Aufgabe 3: Invariante Zwei-Myonen-Masse bei CMS

a) Es handelt sich um die ersten Anregungszustände des  $\Upsilon$ -Mesons ( $b\bar{b}$ ):

	Masse [MeV]	volle Breite $\Gamma$ [keV]
$\Upsilon(1S)$	9460,30	54,02
$\Upsilon(2S)$	10023,26	31,98
$\Upsilon(3S)$	10355,2	20,32

(1 Punkt)

b) Die gemessene Breite der Resonanz von 94 MeV ist sehr viel größer als die natürliche Zerfallsbreite und ist somit durch die Detektorauflösung bestimmt.

(1 Punkt)

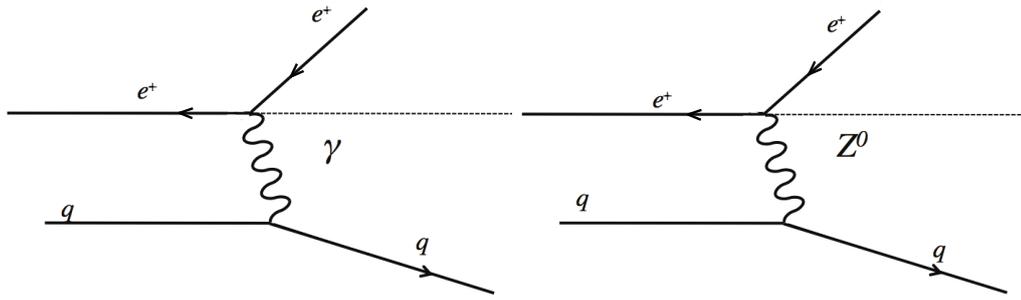
Als Abschätzung der Detektorauflösung nehme man als Beispiel an, dass die  $\Upsilon(1S)$ -Mesonen in Ruhe im Detektor produziert werden und sich die Myonen in der transversalen Ebene entlang der  $x$ -Achse bewegen. Dann gilt für die Vierervektoren der Myonen  $p_1 = (p, p, 0, 0)$  und  $p_2 = (p, -p, 0, 0)$  und die rekonstruierte invariante Masse ist  $m_{\mu\mu} = 2p$ . Die Auflösung aufgrund der Impulsauflösung ist also  $\delta m_{\mu\mu} = 2\delta p$ . Außerdem ist  $p = p_T = 4,7 \text{ GeV}$ . In diesem  $p_T$ -Bereich ist die Myon- $p_T$ -Auflösung durch den inneren Spurdetektor bestimmt und beträgt etwa 1%. Somit erwartet man

$$\delta m_{\mu\mu} = 2 \cdot \delta p = 2 \cdot 1\% \cdot 4,7 \text{ GeV} = 94 \text{ MeV},$$

in (geradezu unglaublich guter) Übereinstimmung mit der Messung. (1 Punkt)

### Aufgabe 4: Tiefinelastische Streuung bei HERA

a) Bei einem Elektron im Endzustand wurde entweder ein Photon oder ein  $Z^0$ -Boson ausgetauscht (1 Punkt) („neutral current“):



(1 Punkt)

- b) Der Impuls  $\vec{p}_q$  des streuenden Quarks ist gegeben durch die Bjorken-Skalierungsvariable  $x$  und den Impuls des einlaufenden Protons  $\vec{P}$ ,

$$\vec{p}_q = x\vec{P}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Dabei ist  $x$  gegeben durch, vgl. Vorlesung.,

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q},$$

mit den Viererimpulsen  $P$  des einlaufenden Protons und  $q$  des ausgetauschten Vektorbosons sowie dem Viererimpulsübertrag

$$Q^2 = -q^2 = -(p - p')^2,$$

wobei  $p$  und  $p'$  den Elektronviererimpuls vor bzw. nach der Streuung bezeichnet.

Im folgenden wird das Koordinatensystem so gewählt, dass das Elektron in Richtung der positiven  $z$ -Achse einläuft und in der  $xz$ -Ebene gestreut wird (vgl. Abb. auf dem Aufgabenblatt). Somit sind die Viererimpulse der Teilchen im Anfangs- und Endzustand

$$\begin{aligned} \text{Elektron (Anfangszustand):} \quad p &= (E_e, 0, 0, E_e) \\ \text{Elektron (Endzustand):} \quad p' &= (E'_e, E'_e \sin \theta, 0, E'_e \cos \theta) \\ \text{Proton (Anfangszustand):} \quad P &= (E_p, 0, 0, -E_p) \end{aligned}$$

wobei  $|\vec{p}| = E$  wegen  $m \ll E$  verwendet wurde.

Damit folgt

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(p - p')^2 = 2pp' \\ &= 2(E_e E'_e - E_e E'_e \cos \theta) \\ &= 2E_e E'_e (1 - \cos \theta), \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} Pq &= P(p - p') \\ &= E_p(E_e - E'_e) - (-E_p(E_e - E'_e \cos \theta)) \\ &= 2E_p E_e - E_p E'_e (1 + \cos \theta), \quad (1 \text{ Punkt}) \end{aligned}$$

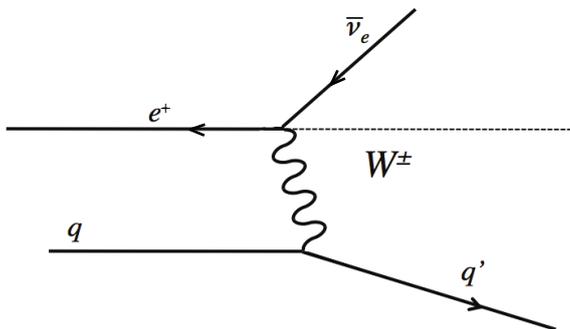
und somit

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{E_e E'_e (1 - \cos \theta)}{2E_p E_e - E_p E'_e (1 + \cos \theta)} \\
 &= \frac{27,5 \cdot 35 \cdot (1 - \cos 85^\circ)}{2 \cdot 920 \cdot 27,5 - 2 \cdot 920 \cdot 35 \cdot (1 + \cos 85^\circ)} \\
 &= 0,056.
 \end{aligned}$$

Damit folgt für den Impuls des einlaufenden Quarks

$$|\vec{p}_q| = x \cdot |\vec{P}| = 0,056 \cdot 920 \text{ GeV} = 51,5 \text{ GeV}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

- c) Unter der Annahme von 100% Detektionseffizienz folgt, dass kein Elektron im Endzustand produziert wurde. Da es aber im Anfangszustand ein Elektron gab, folgt aufgrund der Elektronen-Leptonzahlerhaltung, dass ein Elektronneutrino erzeugt wurde. Da Neutrinos keine direkten Signale im ZEUS-Detektor hinterlassen, ist dies mit der Messung verträglich. Da Neutrinos nur über den schwachen Anteil der elektroschwachen Wechselwirkung reagieren und außerdem die Ladung am Vertex erhalten sein muss, folgt, dass ein  $W$ -Boson ausgetauscht wurde („charged current“):



(1 Punkt)