

**Übungen zu
Moderne Experimentalphysik III
(Kerne und Teilchen)
Sommersemester 2017**

Übungsblatt Nr. 10: Musterlösungen

Aufgabe 1: Universalität der schwachen Wechselwirkung

- a) Im folgenden wird der Zerfall von μ^- - und τ^- -Leptonen betrachtet; die Argumentation ist analog für μ/τ^+ .

Das μ^- - und das τ^- -Lepton zerfallen in ein Neutrino des entsprechenden Flavors sowie ein W^- -Boson. Das W^- kann nun grundsätzlich wie folgt zerfallen (**1 Punkt**):

$$\begin{aligned} W^- &\rightarrow l\bar{\nu}_l & l \in e^-, \mu^-, \tau^- \\ W^- &\rightarrow \bar{q}_1 q_2 & \bar{q}_1 \in \bar{u}, \bar{c}, \bar{t} \text{ und } q_2 \in d, s, b. \end{aligned}$$

Aufgrund der Energieerhaltung sind aber nur folgende Endzustände möglich, bei Massen von $m_\mu = 106 \text{ MeV}$ und $m_\tau = 1,777 \text{ GeV}$ (**1 Punkt**):

$$\begin{aligned} \mu^- &: l = e \\ \tau^- &: l = e, \mu \text{ und } (\bar{q}_1, q_2) = (\bar{u}, d), (\bar{u}, s). \end{aligned}$$

Dabei muss berücksichtigt werden, dass Quarks nicht frei existieren sondern hadronisieren und bei obiger Betrachtung somit nicht die Masse der freien Quarks sondern die entsprechende größere Masse des Mesons entscheidend ist. Bereits die Masse von $m_{\pi^\pm} = 140 \text{ MeV}$ des leichtesten Mesons, des Pions, ist größer als die des Myons. Mesonen mit c - und b -Quarks haben Massen größer als das τ -Lepton.

Die Quarks aus dem (W^- -Zerfall aus dem) τ -Zerfall können dabei unterschiedlich hadronisieren und z.B. Endzustände mit π^- , $\pi^-\pi^0$ oder $\pi^-\pi^+\pi^-$ bilden. Für die folgende Diskussion genügt aber die Betrachtung der Quarks aus dem W^- -Zerfall. Die Tatsache, dass die Quarks schlussendlich Hadronen bilden, ist nur für das kinematische Argument oben zu berücksichtigen.

- b) Im folgenden sei der stark „CKM-unterdrückte“ Zerfall $W^- \rightarrow \bar{u}s$ vernachlässigt. Die totale Zerfallsbreite des τ ist dann $\Gamma_\tau^{\text{tot}} = \Gamma_{\tau \rightarrow e\bar{\nu}} + \Gamma_{\tau \rightarrow \mu\bar{\nu}} + \Gamma_{\tau \rightarrow \bar{u}d}$ (**1 Punkt**).

Vernachlässigt man die Massen der Teilchen im Endzustand, gilt aufgrund der Universalität der schwachen Wechselwirkung

$$\Gamma_{\tau \rightarrow e\bar{\nu}} = \Gamma_{\tau \rightarrow \mu\bar{\nu}} = \frac{1}{3}\Gamma_{\tau \rightarrow u\bar{d}},$$

wobei der Faktor $\frac{1}{3}$ die Farbfreiheitsgrade berücksichtigt, also

$$\Gamma_{\tau}^{\text{tot}} = 5\Gamma_{\tau \rightarrow e\bar{\nu}}.$$

(1 Punkt)

Aufgrund der Universalität der schwachen Wechselwirkung kann man annehmen, dass die Kopplungsterme im $\tau \rightarrow e\bar{\nu}$ und $\mu \rightarrow e\bar{\nu}$ Zerfall gleich sind und deshalb die Zerfallsbreite des τ analog zu $\Gamma_{\mu \rightarrow e\bar{\nu}}$ gegeben ist durch

$$\Gamma_{\tau \rightarrow e\bar{\nu}} = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_{\tau}^5,$$

sich also nur durch den Phasenraum-/Massenterm unterscheidet **(1 Punkt)**.

Die Lebensdauer ist durch die inverse totale Zerfallsbreite gegeben. Für das Verhältnis der τ - und μ -Lebensdauern folgt also

$$\frac{\tau_{\tau}}{\tau_{\mu}} = \frac{\Gamma_{\mu}^{\text{tot}}}{\Gamma_{\tau}^{\text{tot}}} = \frac{\Gamma_{\mu \rightarrow e\bar{\nu}}}{5\Gamma_{\tau \rightarrow e\bar{\nu}}} = \frac{1}{5} \left(\frac{m_{\mu}}{m_{\tau}} \right)^5 = \frac{1}{5} \left(\frac{0,106 \text{ GeV}}{1,777 \text{ GeV}} \right)^5 = 1,5 \cdot 10^{-7}.$$

Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert von

$$\frac{2,9 \cdot 10^{-13} \text{ s}}{2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 1,3 \cdot 10^{-7}.$$

(1 Punkt)

- c) Das leichteste Meson mit einem c -Quark ist das D^+ . Das c -Quark zerfällt durch $c \rightarrow sW^+$. Der Zerfall $c \rightarrow dW^+$ ist CKM-unterdrückt und wird vernachlässigt. Unter Berücksichtigung der Energieerhaltung ergeben sich die folgenden Zerfallsprodukte des W^+ :

$$\bar{l}' = e^+, \mu^+, (q_1, \bar{q}_2) = (u, \bar{d}),$$

wobei wieder der (energetisch mögliche) CKM-unterdrückte Zerfall $W^+ \rightarrow u\bar{s}$ vernachlässigt wird. Analog zum τ -Zerfall stehen also fünf Zerfallskanäle (Farbe!) mit gleicher Breite offen, sodass mit $m_c = 1,3 \text{ GeV}$

$$\tau_c = \frac{\Gamma_{\mu}^{\text{tot}}}{\Gamma_c^{\text{tot}}} \tau_{\mu} = \frac{1}{5} \left(\frac{m_{\mu}}{m_c} \right)^5 \tau_{\mu} = \frac{1}{5} \left(\frac{0,106 \text{ GeV}}{1,3 \text{ GeV}} \right)^5 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 1,6 \cdot 10^{-12},$$

was recht gut mit der Lebensdauer des D^+ -Mesons übereinstimmt. **(1 Punkt)**

Für das b -Quark liefert die analoge Rechnung mit $m_b = 4,2 \text{ GeV}$ eine Lebensdauer von $\tau_b = 4,5 \cdot 10^{-15} \text{ s} \ll \tau_{B^{\pm}}$. Im Falle des b -Quarks ist aber die oben

gemachte Annahme, dass keine Quarkmischung auftritt, nicht zulässig. Da $m_b < m_t$ ist, sind nur die Zerfälle $b \rightarrow uW^-$ und $b \rightarrow cW^-$ möglich. Da diese aber stark CKM-unterdrückt sind, ist die Lebensdauer des b -Quarks bzw. der b -Mesonen deutlich höher als naiv aufgrund der schwachen Wechselwirkung und der Massen erwartet. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Geladene Ströme bei HERA

- a) Wenn nur die Valenzquarks an der tiefinelastischen Streuung teilnehmen, finden in führender Ordnung die folgenden Prozesse statt:

$$\begin{aligned} \text{Neutraler Strom:} \quad & e^\pm u \xrightarrow{\gamma, Z^0} e^\pm u \\ & e^\pm d \xrightarrow{\gamma, Z^0} e^\pm d \\ \text{Geladener Strom:} \quad & e^- u \xrightarrow{W^\pm} \nu_e d \\ & e^+ d \xrightarrow{W^\pm} \bar{\nu}_e u \end{aligned}$$

Beispielprozesse sind in Abb. 1 gezeigt. (1 Punkt)

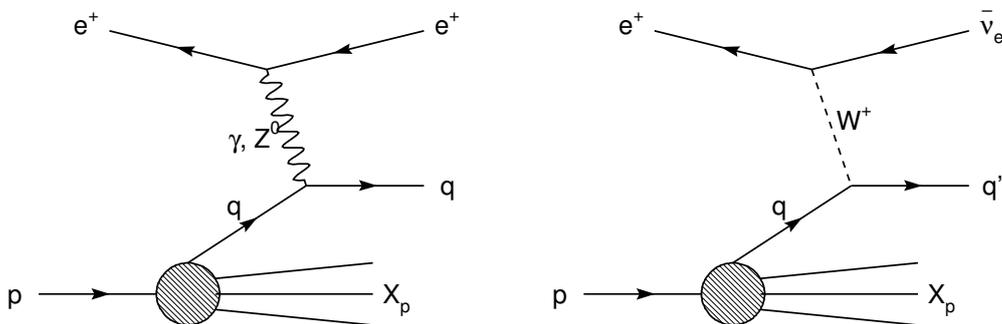


Abbildung 1: Beispiele für Prozesse mit neutralem (links) und geladenem (rechts) Strom bei HERA.

- b) Das W -Boson koppelt nur an linkshändige Elektronen (1 Punkt). Da $\beta \approx 1$ für die Elektronen und Positronen, entspricht die Helizität in guter Näherung der Chiralität¹, und der Prozess $e^- p \rightarrow \nu_e X$ findet nur für den Anteil

$$\frac{N_L}{N_R + N_L} \approx \frac{N_{LH}}{N_{RH} + N_{LH}} = \frac{1}{2}(1 - P_e)$$

¹Hier werden analog zum Vorlesungsskript die Indizes „LH“, „RH“ für die Helizitätszustände und „L“, „R“ für die Chiralitätszustände verwendet.

der Elektronen statt, sodass der gemessene Wirkungsquerschnitt wie

$$\sigma_{CC,e^-}(P_e) = \frac{1}{2}(1 - P_e)\sigma_{CC,e^-}^{\max}$$

skaliert, wobei das Maximum für einen vollständig linkshändig polarisierten Strahl erreicht wird. Analog folgt für Positronen

$$\sigma_{CC,e^+}(P_e) = \frac{1}{2}(1 + P_e)\sigma_{CC,e^+}^{\max},$$

da das W -Boson nur an rechtshändige Positronen koppelt. **(1 Punkt)**

- c) Ein hypothetisches neues W_R -Boson, das nur an rechtshändige Fermionen und linkshändige Antifermionen koppelt, würde sich durch Beiträge zum polarisierten Wirkungsquerschnitt zeigen, die gerade umgekehrt mit P_e skalieren als im Standardmodell **(1 Punkt)**. Wenn die Kopplungsstärke des W_R -Bosons gleich der schwachen Kopplung ist, würde man gar keine P_e -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts messen, weil die W - und W_R -Beiträge gerade genau die gleiche Amplitude aber gegensätzliche P_e -Abhängigkeit hätten.
- d) Die Wirkungsquerschnitte sind gegeben durch das Produkt aus PDF, Matrixelementbetragsquadrat und Phasenraum:

$$\begin{aligned}\sigma(e^-p \rightarrow \nu_e X) &= f_{u/p}(x, Q^2) \cdot |\mathcal{M}_{e^-}|^2 \cdot \text{PS}_{e^-} \\ \sigma(e^+p \rightarrow \bar{\nu}_e X) &= f_{d/p}(x, Q^2) \cdot |\mathcal{M}_{e^+}|^2 \cdot \text{PS}_{e^+},\end{aligned}$$

wobei hier wieder nur die im Bereich hoher Q^2 dominanten Valenzquarkbeiträge berücksichtigt werden. Wegen der gleichen Massen und der Universalität der schwachen Wechselwirkung ist

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{e^-} &= \mathcal{M}_{e^+} \\ \text{PS}_{e^-} &= \text{PS}_{e^+}\end{aligned}$$

(die e^\pm -Strahlen sind unpolarisiert, die Händigkeit ist für den Vergleich irrelevant!) **(1 Punkt)**. Somit hängt das Verhältnis nur von den Valenzquark-PDFs ab, für die

$$\frac{\sigma(e^-p \rightarrow \nu_e X)}{\sigma(e^+p \rightarrow \bar{\nu}_e X)} = \frac{f_{u/p}(x, Q^2)}{f_{d/p}(x, Q^2)} = 2.$$

(1 Punkt)

Bei $P_e \neq 0$ findet man bei entsprechender Berücksichtigung auch wieder das Verhältnis $\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sigma(e^-p \rightarrow \nu_e X)|_{P_e}}{\sigma(e^+p \rightarrow \bar{\nu}_e X)|_{-P_e}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3: Zerfallsbreite des J/ψ

- a) Relevante Beiträge zu σ entstehen wegen $\Gamma \ll m$ nur in einem schmalen Bereich $\sqrt{s} = m \pm \epsilon$, $\epsilon \ll m$, sodass

$$s - m^2 = (\sqrt{s} + m) \underbrace{(\sqrt{s} - m)}_{=\epsilon} = 2m\epsilon + \epsilon^2 \stackrel{\epsilon \ll m}{\approx} 2m\epsilon = 2m(\sqrt{s} - m),$$

woraus sich die verwendete nichtrelativistische Form der Breit-Wigner-Verteilung begründet. **(1 Punkt)**

Strenggenommen müsste man im Ansatz für Σ_f noch die Verteilungsfunktion von \sqrt{s} berücksichtigen. Der Verlauf der Breit-Wigner-Verteilung ist aber konzentriert auf den Bereich der Resonanz bei $\sqrt{s} = m$, die dominanten Beiträge zu Σ_f entstehen also in einem schmalen Bereich $\approx \Gamma$ um $\sqrt{s} = m$. Da $\Gamma \ll \Delta E$, kann man die Verteilungsfunktion als konstant annehmen; ihr Beitrag kürzt sich also heraus.

Mit dem Spin des $J = 1$ des J/ψ und $A = 6\pi^2/m^2$ ist also

$$\Sigma_f = \int_0^\infty \sigma(e^+e^- \rightarrow J/\psi \rightarrow f\bar{f}) d\sqrt{s} = \frac{A}{2\pi} \Gamma_e \Gamma_f \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{s} - m)^2 + \frac{\Lambda^2}{4}} d\sqrt{s}.$$

Substitution $x = \sqrt{s} - m$ ergibt

$$\begin{aligned} \Sigma_f &= \frac{A}{2\pi} \Gamma_e \Gamma_f \int_{-m}^\infty \frac{1}{x^2 + \frac{\Lambda^2}{4}} dx \\ &= \frac{A}{2\pi} \Gamma_e \Gamma_f \left[\frac{2}{\Gamma} \arctan\left(\frac{2x}{\Gamma}\right) \right]_{-m}^\infty \\ &= \frac{A}{\pi} \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{\Gamma} \left[\underbrace{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-2m}{\Gamma}\right)}_{\approx -\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= A \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{\Gamma}. \end{aligned}$$

(1 Punkt) Somit ist

$$\Sigma_e = A \frac{\Gamma_e \Gamma_e}{\Gamma} \quad (1)$$

$$\Sigma_\mu = A \frac{\Gamma_e \Gamma_\mu}{\Gamma} \quad (2)$$

$$\Sigma_{\text{had}} = A \frac{\Gamma_e \Gamma_{\text{had}}}{\Gamma}. \quad (3)$$

Außerdem ist $\Gamma = \Gamma_e + \Gamma_\mu + \Gamma_{\text{had}}$. Es gibt also vier Gleichungen für vier Unbekannte, nach denen sich auflösen lässt.

Unter der Annahme von Leptonuniversalität gilt ferner $\Gamma_e = \Gamma_\mu$, also

$$\Gamma = 2\Gamma_e + \Gamma_{\text{had}}, \quad (4)$$

und das Problem vereinfacht sich zu drei Unbekannten.

Somit folgt (ii):

$$\frac{\Sigma_e}{\Sigma_{\text{had}}} = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_{\text{had}}} \Rightarrow \Gamma_{\text{had}} = \frac{\Sigma_{\text{had}}}{\Sigma_e} \Gamma_e. \quad (5)$$

Aus (5) und (4) folgt

$$\Gamma = \left(2 + \frac{\Sigma_{\text{had}}}{\Sigma_e}\right) \Gamma_e. \quad (6)$$

Mit (1) und (6) folgt (i):

$$\Gamma_e = \frac{1}{A} \left(2 + \frac{\Sigma_{\text{had}}}{\Sigma_e}\right) \Sigma_e, \quad (7)$$

und wegen $\Gamma_e = \Gamma_\mu$ gilt das analog für Γ_μ . Aus (6) und (7) folgt dann noch (iii):

$$\Gamma = A \frac{\Gamma_e^2}{\Sigma_e}.$$

(2 Punkte)

- b) Man betrachte zunächst $\Gamma_e = \frac{1}{A} \left(2 + \frac{\Sigma_{\text{had}}}{\Sigma_e}\right) \Sigma_e$. Γ_e hat die Einheit Energie und Σ_f die Einheit Energie \times Fläche. $A = 6\pi^2/m^2$ ist aber in Einheiten von $1/\text{Energie}^2$ gegeben, deshalb

$$\begin{aligned} A \rightarrow A &= \frac{6\pi^2}{m^2} (\hbar c)^2 \\ &= \frac{6\pi^2}{(3,097 \text{ GeV})^2} (0,197 \text{ GeV fm})^2 \\ &= 0,24 \text{ fm}^2 = 0,24 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2 = 0,24 \cdot 10^{-2} \text{ b}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\Gamma_e = \frac{1}{0,24 \cdot 10^{-2} \text{ b}} \left(2 + \frac{11,8 \text{ eV b}}{0,79 \text{ eV b}}\right) 0,79 \text{ eV b} = 5,6 \text{ keV}.$$

Daraus ergibt sich mit (ii)

$$\Gamma_{\text{had}} = \frac{11,8 \text{ eV b}}{0,79 \text{ eV b}} 5,6 \text{ keV} = 83,6 \text{ keV},$$

und mit (iii)

$$\Gamma = 0,24 \cdot 10^{-2} \text{ b} \frac{(5,6 \text{ keV})^2}{0,79 \text{ eV b}} = 95,3 \text{ keV}.$$

(1 Punkt)

- c) Die Schwerpunktsenergie ergibt sich aus der Strahlenergie $E = E_{e^-} = E_{e^+}$ zu $\sqrt{s} = 2E$. Die Unsicherheit $\Delta\sqrt{s}$ auf die Schwerpunktsenergie folgt dann aus der Strahlenergieunsicherheit durch gaußsche Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta\sqrt{s} = 2\Delta E = 2 \text{ MeV}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Für eine dreieckige Resonanzkurve der Fläche Γ_{had} mit FWHM-Breite von $\Delta\sqrt{s}$ folgt für die Höhe

$$\hat{\sigma} = \frac{\Gamma_{\text{had}}}{\Delta\sqrt{s}} = \frac{11,8 \text{ eV b}}{2 \text{ MeV}} = 5,9 \mu\text{b}. \quad (1 \text{ Punkt})$$

Der QED-Kontinuumswirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s} = m$ beträgt dagegen

$$\begin{aligned} \sigma_K &= \frac{4\pi\alpha^2(\hbar c)^2}{3s} \cdot \sum_q N_c z_q^2 \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{137^2} (0,197 \text{ GeV fm})^2 \frac{1}{(3,097 \text{ GeV})^2} \cdot \frac{10}{3} \\ &= 8,7 \cdot 10^{-6} \text{ GeV}^2 10^{-2} \text{ b} \frac{1}{(3,097 \text{ GeV})^2} \cdot \frac{10}{3} \\ &= 30,2 \text{ nb}, \end{aligned}$$

wobei sich der Faktor $10/3$ aus den aktiven Quarkflavors $q = u, d, s, c$ und den drei Farbfreiheitsgraden N_c ergibt. (1 Punkt)

Der Wirkungsquerschnitt bei der Resonanz ist also etwa $\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_K} = 195$ mal höher als für den reinen Kontinuumsuntergrund.