KIT-Fakultät für Physik
Institut für Experimentelle Teilchenphysik
Institut für Kernphysik
Prof. Dr. Ulrich Husemann (ETP)
Prof. Dr. Kathrin Valerius (IKP)
Dr. Nils Faltermann (ETP)

Übungen zu Moderne Experimentalphysik III (Teilchen und Hadronen)

Sommersemester 2020

Übungsblatt Nr. 3 Bearbeitung bis 18.05.2020

Aufgabe 1: Kerneigenschaften (2+1+1=4 Punkte)

Die Eigenschaften von Atomkernen lassen sich oft anhand elementarer Quantenmechanik oder Erhaltungsgrößen untersuchen:

a) Die beim Betazerfall entstehenden Elektronen haben üblicherweise eine kinetische Energie im Bereich von wenigen MeV. Verwenden Sie die Heisenbergsche Unschärferelation um zu zeigen, dass das Elektron nicht innerhalb eines Atomkerns existieren kann.

b) Zeigen Sie anhand des Lithiumisotops ^{6}Li, dessen Gesamtspin im Grundzustand Null ist, dass Atomkerne nicht aus einer Kombination von Protonen und Elektronen aufgebaut sind.

c) Das Stickstoffisotop ^{14}N besitzt ein magnetisches Moment von $\mu = 0{,}4035\mu_\mathrm{N}$, wobei $\mu_\mathrm{N} = \frac{e\hbar}{2m_\mathrm{p}}$ als Kernmagneton bezeichnet wird. Warum kann durch eine Betrachtung des magnetischen Moments ein Kernaufbau von Protonen und Elektronen ausgeschlossen werden?

Aufgabe 2: Zerfallsreihen und radioaktives Gleichgewicht (1+4+3+2 =10 Punkte)

In nuklearen Zerfallsreihen $K_0 \to K_1 \to K_2 \to \ldots$ hängt die Zerfallsrate $\mathrm{d}N_i(t)/\mathrm{d}t$ eines Nuklids K_i von der Anzahl $N_i(t)$ der K_i-Kerne sowie der Anzahl $N_{i-1}(t)$ der Mutterkerne (K_{i-1}-Kerne) ab. Dies lässt sich darstellen als System gekoppelter Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)_i}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i N(t)_i + \lambda_{i-1} N(t)_{i-1}\,,$$

wobei für das erste Nuklid $i = 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}N(t)_0}{\mathrm{d}t} = -\lambda_0 N(t)_0 \,.$$

a) Begründen Sie die Vorzeichen von λ_i und λ_{i-1}.

b) Lösen Sie numerisch das Differentialgleichungssystem für eine Zerfallsreihe mit drei Nukliden mit den Zerfallskonstanten $\lambda_0 = 0.01\,\mathrm{s}^{-1}$, $\lambda_1 = 1.5\,\mathrm{s}^{-1}$ und $\lambda_2 = 0.3\,\mathrm{s}^{-1}$. Sie können dazu ein Programmpaket Ihrer Wahl zur numerischen Integration von Differentialgleichungen verwenden, z.B. die Methode `odeint` aus der `scipy.integrate`-Bibliothek in Python oder Mathematica. (Geben Sie als Lösung die wesentlichen Programmschritte an, z.B. in Textform mit dem Namen der wichtigen Routinen oder als Screenshot des gut kommentierten Quelltextes, und erläutern Sie die einzelnen Schritte.)

c) Wählen Sie für die Zerfallsreihe in a) als Anfangsbedingungen $N_0 = 100$ und $N_1 = N_2 = 0$ und stellen Sie den zeitlichen Verlauf der N_i sowie der Aktivitäten $A_i = \lambda_i N_i$ grafisch dar, für einen Zeitraum von $t = 0\,\mathrm{s}$ bis $t = 25\,\mathrm{s}$. Welche Besonderheit beobachtet man für die Aktivität der jeweiligen Kerne gegen Ende des Zeitraums und wodurch wird diese hervorgerufen?

d) Welche Zerfallsreihen treten in der Natur auf? Warum sind es gerade vier?

Aufgabe 3: Radiometrische Altersbestimmung (0 Punkte)

Nur für aktiven Beitrag: Eine der bekanntesten Methoden zur Altersbestimmung durch radioaktive Nuklide ist die Radiokarbondatierung mithilfe des Kohlenstoffisotops ^{14}C. Aufgrund der Halbwertszeit von ^{14}C ist der maximale Zeitraum der Datierung jedoch auf ein Alter von ca. 50.000 Jahren begrenzt, daher müssen für noch ältere Objekte andere Verfahren verwendet werden. Machen Sie sich mit der Kalium-Argon-Datierung (^{40}K) vertraut und präsentieren Sie das Verfahren und die Anwendungen in einem kleinen Vortrag.

Aufgabe 4: Radionuklidbatterie (0 Punkte)

Nur für aktiven Beitrag: Eine auch heute noch verbreitete Anwendung von radioaktiven Nukliden ist die Umwandlung von thermischer in elektrischer Energie. Dies erfolgt zum einen in großem Maßstab mithilfe von Kernreaktoren, zum anderen aber auch durch sogenannte Radionuklidbatterien. Präsentieren Sie die Funktionsweise, Verwendung und Historie von Radionuklidbatterien in einem kurzen Vortrag.

Aufgabe 5: Phasenraum beim Betazerfall (2+3+1=6 Punkte)

Das Impulsspektrum von Elektronen aus dem Betazerfall ist durch Fermis goldene Regel gegeben:

$$N(p_\mathrm{e})\mathrm{d}p_\mathrm{e} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot |M_\mathrm{fi}|^2 \cdot \frac{\mathrm{d}n_\mathrm{e}\,\mathrm{d}n_\nu}{\mathrm{d}E}\,.$$

Dabei ist p_e der Impuls der Elektronen, M_fi das Übergangsmatrixelement vom Anfangszustand in den Endzustand und $\mathrm{d}n_\mathrm{e}\mathrm{d}n_\nu/\mathrm{d}E$ die Dichte der Endzustände im Phasenraumintervall $\mathrm{d}E$. Zur Erinnerung, die Zustandsdichte ist gegeben durch:

$$\mathrm{d}n = \frac{4\pi p^2\,V}{(2\pi\hbar)^3}\,\mathrm{d}p\,.$$

Da das Matrixelement nur schwach von der Energie abhängt, ist das Impulsspektrum im Wesentlichen durch den Phasenraumfaktor gegeben.

a) Welche Hinweise auf das Neutrino gab es bereits lange Zeit vor dem ersten experimentellen Nachweis im Jahr 1956 durch Reines und Cowan?

b) Berechnen Sie den Phasenraumfaktor als Funktion des Impulses bzw. der Energie des Elektrons für masselose und für massive Neutrinos. Vernachlässigen Sie dabei die Rückstoßenergie des Tochterkerns und nehmen Sie eine feste Elektronenergie an, d.h. $\mathrm{d}E_\mathrm{e} = 0$. Betrachten Sie Elektronen und Neutrinos als ununterscheidbare Teilchen und behandeln Sie deren Impulse als unkorreliert.

c) Wie kann man aus der Messung des Impulsspektrums der Elektronen etwas über die Masse der Neutrinos lernen?