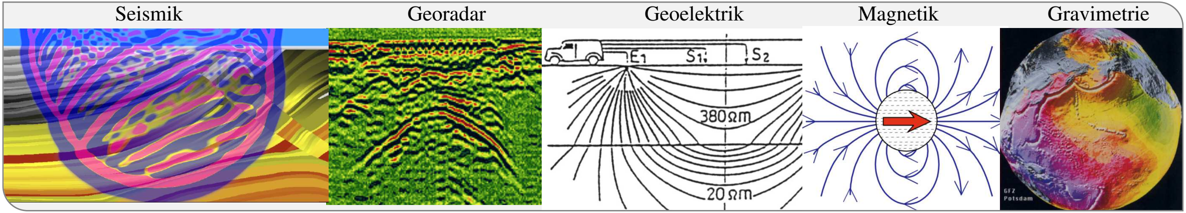
Karlsruher Institut für Technologie

Einführung in die Geophysik I

Eigenschaften und Wechselwirkung elektromagnetischer Felder

Thomas Bohlen, Ellen Gottschämmer, Geophysikalisches Institut, Fakultät für Physik



Inhalte der Vorlesung im Semester WS 2020/21

Karlsruher Institut für Technologie

1 Einführung	(20.10)
2 Seismische Wellenausbreitung	(20.10, 27.10)
3 Refraktionsseismik	(03.11)
4 Reflexionsseismik	(10.11)
5 Elektromagnetische Verfahren	(17.11, 24.11)
6 Geoelektrik	(01.12)
7 Gravimetrie	(08.12, 15.12)
8 Magnetik	(12.01, 19.01)
9 weitere Themen	(26.01, 02.02)

Agenda

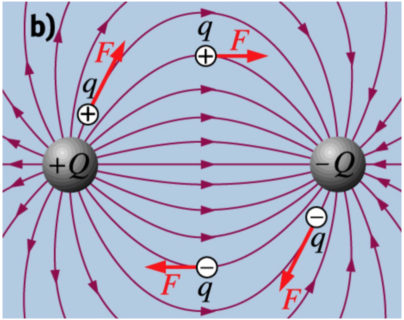
- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Das elektrische Feld

- Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
- Es beschreibt die auf eine Probeladung q wirkende Kraft $\vec{F} = \vec{E}q$.



Das elektrische Feld eines Dipols und die Kraft auf eine Probeladung

Relevant für die geophysikalische Erkundung

1. Ein vorhandenes E-Feld erzeugt Ladungstransport = Strom.
2. Vorhandene atomare Dipole in einem Dielektrikum verändern den Fluss, d.h. die Durchlässigkeit (Permittivität) für das E-Feld.

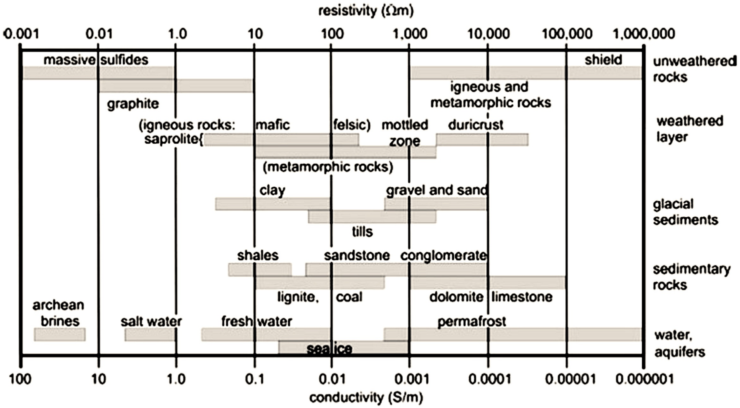
Ladungstransport - Ohmsches Gesetz

In einem leitfähigen Material entsteht Ladungstransport wenn ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}$ existiert. Das Ohmsche Gesetz für ein Medium lautet:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E} = \varrho^{-1}\vec{E}}$$

- σ: spezifische elektrische Leitfähigkeit (Einheit $(\Omega m)^{-1}$).
- $\varrho = \sigma^{-1}$: spezifische elektrischer Widerstand
- $\vec{j} = \vec{I}/A$: Stromdichte (A=Querschnitt)
- $\vec{I} = dQ/dt$: Strom=Ladungsmenge/Zeit.

Elektrische Leitfähigkeit für Geomaterialien



(Quelle:BGR)

Die elekrische Flussdichte $\vec{D}$

Ein Material kann den Fluss (Dichte der Feldlinien) des elektrischen Feldes $\vec{E}$ verändern:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ beschreibt die Dichte der Feldlinien pro Fläche. Im Vakuum gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon_0 = 8.85418...10^{-12} N/m \quad \text{elektr. Feldkonstante}$$

In einem isotropen Dielektrikum kann es zu einer Verstärkung um den Faktor ϵ_r kommen:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

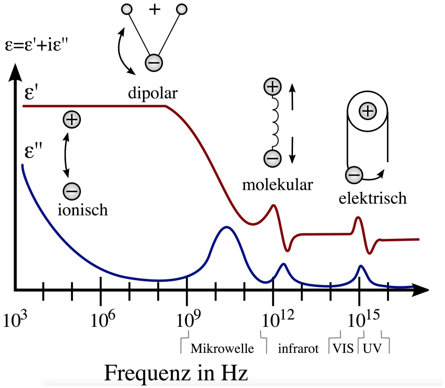
ϵ_r ist ein Materialparameter und wird als relative Permittivität (relative Dielektrizitätszahl) bezeichnet.

Relative Dielektrizitätszahl ϵ_r

Relative Permittivität einiger Stoffe
bei 18 °C und einer Frequenz von 50 Hz, sofern nicht anders angegeben

Medium	ε_r	Medium	ε_r
Vakuum	1,0	Luft	1,00059
Acrylnitril-Butadien-Styrol (ABS) (30 °C)	4,3	Aluminiumoxid (Tonerde)	9
Ammoniak (0 °C)	1,007	Bariumtitanat	10^3–10^4
Benzol	2,28	Trockene Erde	3,9
Feuchte Erde	29	Germanium	16,6
Glas	6–8	Glycerin	42,5
Gummi	2,5–3	Holz (darrtrocken)	2–3,5
Kaliumchlorid	4,94	Methanol	32,6
Petroleum	2	Polyethylen (PE) (90 °C)	2,4
Polypropylen (PP) (90 °C)	2,1	Porzellan	2–6
Propanol	18,3	Paraffin	2,2
Papier	1–4	Polytetrafluorethylen (PTFE oder auch Teflon)	2
FR2, FR4	4,3–5,4	Polystyrol-Schaum (Styropor ® BASF)	1,03
Tantalpentoxid	27	Wasser (20 °C, 0–3 GHz)	80
Wasser (sichtbarer Bereich)	1,77	Wasser (0 °C, 0–1 GHz)	88
Eis (0 bis –50 °C, Niederfrequenz)	≈ 90–150	Eis (über 100 kHz)	3,2

Werte für ϵ_r



Starke Frequenzabhängigkeit von ϵ_r

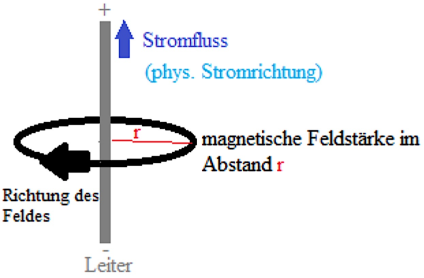
(Wikipedia)

Agenda

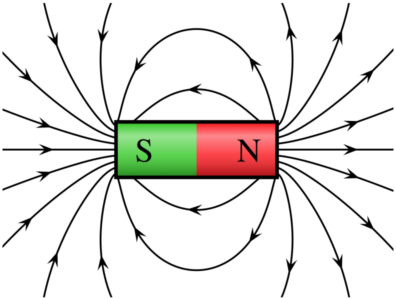
- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Das magnetische Feld $\vec{H}$

- Ein vom Strom durchflossener Leiter erzeugt im Abstand r ein magnetisches Feld $|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$
- Die magnetische Feldstärke hat die Einheit Ampere/Meter (A/m).



Magnetfeld H eines Leiters



Magnetfeld eines Stabmagneten

(Wikipedia)

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Karlsruher Institut für Technologie

Ein Material kann den Fluss (die Dichte der Feldlinien) des Erreger-Feldes $\vec{H}$ verändern. Die Feldlinien werden unterschiedlich gebündelt bzw. verdichtet.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ beschreibt die resultierende Dichte der Feldlinien pro Fläche. $\vec{B}$ kann daher als eigentliches Wirkungsfeld aufgefasst werden. Im Vakuum gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} N/A^2 \quad \text{magn. Feldkonstante}$$

In Materialien kann es zu einer Verstärkung/Abschwächung von $\vec{B}$ um den Faktor μ_r kommen.

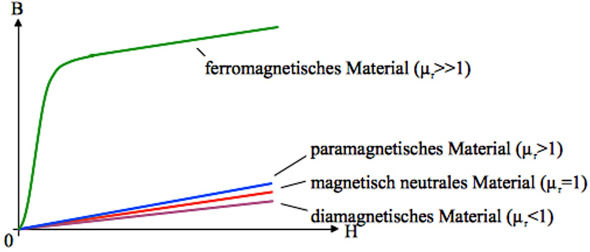
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

μ_r ist ein Materialparameter und wird als relative Permeabillitätszahl bezeichnet.

Relative Permeabillitätszahl μ_r

1. $\mu_r < 1$: Diamagnetismus - Verdrängung des Magnetfeldes (z.B. Wasser)
2. $\mu_r \approx 1$: neutral - gilt für die meisten Gesteine
3. $\mu_r > 1$: Paramagnetismus - Verstärkung durch Ausrichtung magnetischer Momente (z.B. Luft)
4. $\mu_r >> 1$: Ferromagnetismus - Starke parallele Ausrichtung zahlreicher magnetischer Momente und Bildung von "Weißscher Bezirke" (z.B. Eisen, Ferrit).

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$



(Wikipedia)

Agenda

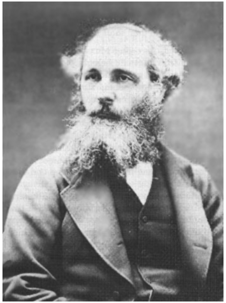
- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Die Maxwell-Gleichungen

Karlsruher Institut für Technologie

- Um 1860 erstellte der schottische Physiker eine mathematisch knappe Zusammenfassung des
  1. Faraday'schen Gesetzes
  2. Ampére'schen Gesetzes
  3. Gauss'schen Gesetzes für $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$
  4. Gauss'schen Gesetzes für $\vec{H}$, bzw. $\vec{B}$

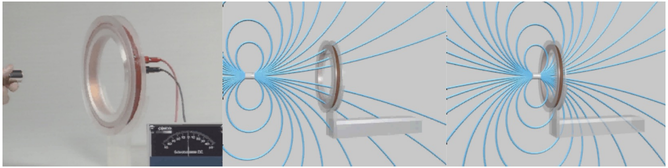
  $\rightarrow$ Maxwell-Gleichungen
- Sie besitzen in der klassischen Elektrodynamik eine ähnliche Bedeutung wie die Newton'schen Axiome in der klassischen Mechanik
- Sie bilden die Grundlage für die geophysikalischen Verfahren: Geolekektrik, Magnetik, EM, Georadar



James Clerk Maxwell 1831-1879

1. Maxwellgleichung

- Induktionsgesetz nach Faraday



- Beobachtung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ induziert eine Spannung
- Erklärung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ erzeugt eine Veränderung von $\vec{E}(\vec{r}, t)$, dies erzeugt eine Ladungsbewegung und dies induziert einen Spannungsabfall

Michael Faraday 1770-1845

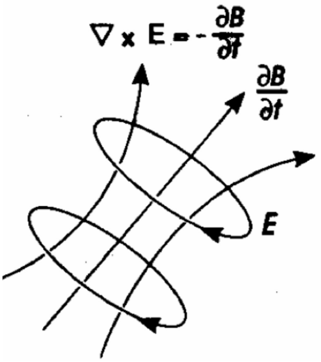
1. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Induktionsgesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Ein zeitlich variabler magnetischer Fluss verursacht ein senkrecht dazu stehendes elektrisches Feld.
- Anwendung: Generator (rotierender Magnet erzeugt Strom)

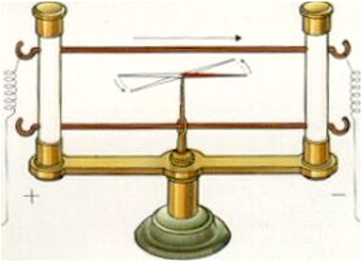
$\vec{E}$: elektrisches Feld (V/m), $\vec{B}$: magnetische Fluss (T)



1. Maxwellgleichung: Induktionsgesetz

2. Maxwellgleichung

- Experiment



- Beobachtung: Strom in elektrischem Leiter verursacht Ablenkung einer Kompass-Nadel
- Erklärung: Eine Magnetfeld entsteht durch bewegte Ladungen (Ströme)

Hans Christian Oersted & André Marie Ampére

1820

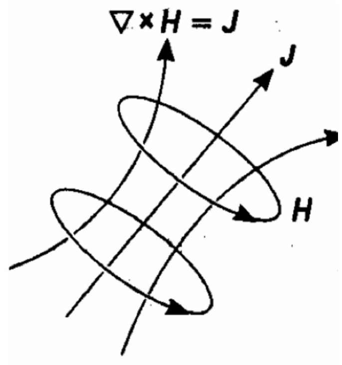
2. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Ampére'schen Gesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

- Verschiebungs- und Leitungsströme induzieren ein senkrecht auf dem Stromfluss stehendes magnetisches Feld.
- Anwendung: Elektromagnet (stromduchflossene Spule mit EIsenkern)

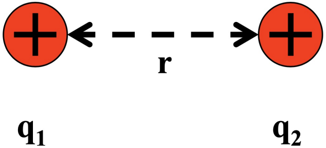
$\vec{H}$: Magnetfeld (A/m), $\vec{D}$: dielektrische Verschiebung (C/m^2), $\vec{j}$: Stromleitungsdichte (A/m^2)



2. Maxwellgleichung: Ampére'sches Gesetz

3. Maxwellgleichung

- 1785 Experimente zur Messung der Kraft durch geladene Kugeln



- Beobachtung

$$|\vec{F}| = \pm K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- inverses quadratisches Gesetz

Charles Augustin de Coulomb 1736-1806

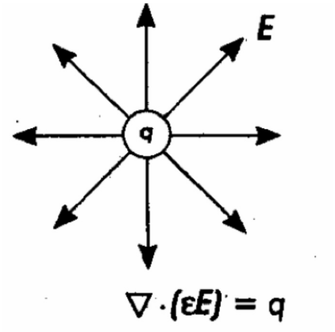
3. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Coloumb'schen Gesetzes nach Maxwell als Gauss'sches Gesetz für das elektrische Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}$$

- Das elektrische Feld muss geschlossene Feldlinien bilden oder an der Ladung enden.

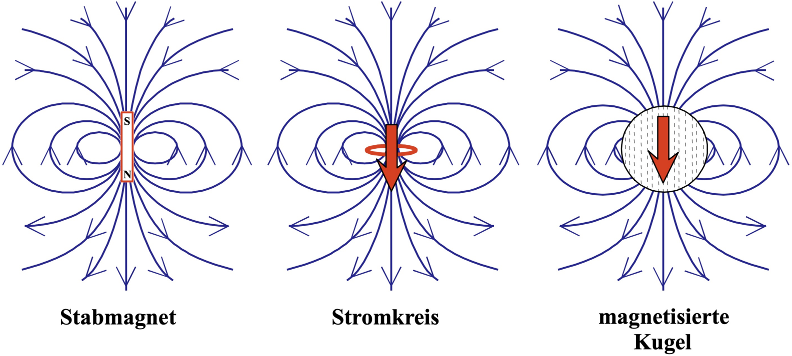
$\vec{E}$: elektrisches Feld (V/m, $\vec{q}$: Ladungsdichte (C/m^3))



3. Maxwellgleichung: Gauss'sches Gesetz für $\vec{E}$

4. Maxwellgleichung

- Beobachtung



- Die Magnetfeldlinien sind immer in in sich geschlossen

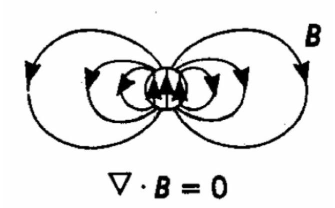
4. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Gauss'schen Gesetzes für das Magnetfeld nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

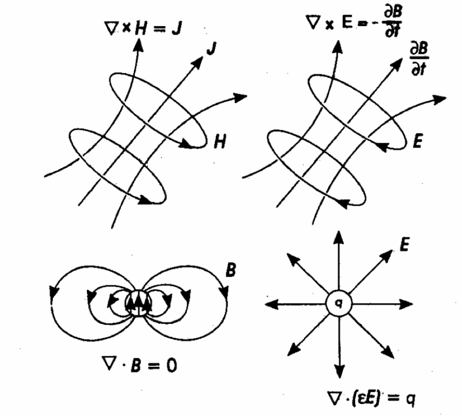
- Es gibt weder Quellen noch Senken für das magn. Feld, d.h. keine isolierten magn. Ladungen oder Monopole

$\vec{B}$: magnetische Fluss (T)



4. Maxwellgleichung: Gauss'sches Gesetz für $\vec{B}$

Die Maxwell-Gleichungen



Veranschaulichung der Maxwell-Gleichungen

1. Induktionsgesetz
$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$
2. Duchflutungsgesetz
$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}}$$
3. Coulomb'sches Gesetz
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}}$$
4. Gauss'sches Gesetz
$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Materialgleichungen

Die Materialgleichungen beschreiben die Veränderung der Felder in Materialien.

1. Elektrische Permittivität in einem Dielektrikum: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$
2. Magnetische Permeabilität: $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$
3. Stromleitung: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Die (geophysikalisch) relevanten Materialparameter sind

1. ϵ_r: relative dielektrische Permittivität (Vs/Am)
2. μ_r: relative magnetische Permeabilität (Vs/Am)
3. σ: elektrische Leitfähgkeit (S/m)

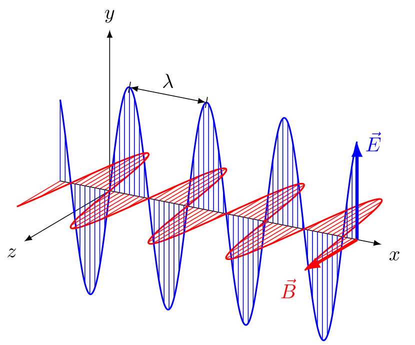
Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Lösung für eine ebene EM-Welle

Wir wollen nun die Lösung der Maxwellgleichungen für eine ebene elektromagnetische Welle berechnen:

$$E_y(x) = E_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$
$$H_z(x) = H_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$



Ebene EM-Welle (Wikipedia)

Lösung für eine ebene EM-Welle

Für diesen Fall der ebenen Welle vereinfacht sich die ersten Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}|_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Wir differenzieren nochmal nach x $\quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} \tag{1}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Karlsruher Institut für Technologie

Ebenso vereinfacht sich die zweite Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}|_y = \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y$$

Wir differenzieren nochmal nach $t \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t} \tag{2}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Wir setzen nun Gl. 2 in Gl. 1 ein:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \mu^{-1} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t}$$

Damit ergibt sich die Telegraphengleichung für E_y:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Karlsruher Institut für Technologie

Fallunterscheidungen

1 **Optik/Licht, Georadar (bei kleinem σ)**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \lll \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies is bei hohen Frequenzen $> 10^6 Hz$ und sehr kleinem σ der Fall. Dann gilt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Diese beschreibt eine ungedämpfte EM-Welle mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \approx \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \mu_r \approx 1$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$.

Lösung für eine ebene EM-Welle

Fallunterscheidungen

2 **Georadar (bei großem σ)**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \approx \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies is bei Frequenzen $10^6 Hz - 10^9 Hz$ und signifikanter Leitfähigkeit der Fall. Es breitet sich dann eine gedämpfte EM-Welle aus.

3 **Elektromagnetik**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \ggg \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies ist bei sehr geringen Frequenzen $\lll 10^6 Hz$ der Fall. Es tritt dann Diffusion und keine Wellenausbreitung mehr auf. Diese niederfrequenten Verfahren werden mit dem Begriff "Elektromagnetik" beschrieben.

Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Geophysikalische Verfahren

Karlsruher Institut für Technologie

Methode	Frequenz	Grundgl.	Materialpar.	Quelle	Messgr.
Geoelektrik	0	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	σ	Stromeinspeisung	E_z
Magnetik	0	$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$	μ_r	Erdmagnetfeld	$\vec{B}$
Elektromagnetik	$\lll 10^3 Hz$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$	σ	künstl. E-Felder	$\vec{E}$
Georadar	$10^6 - 10^9 Hz$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_r^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$	ϵ_r, σ	Antennen	$\vec{E}$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Thomas.Bohlen@kit.edu
http://www.gpi.kit.edu/