Karlsruher Institut für Technologie

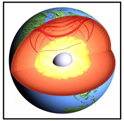
Einführung in die Geophysik I

Eigenschaften und Wechselwirkung elektromagnetischer Felder

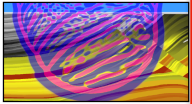
Thomas Bohlen, Geophysikalisches Institut, Fakultät für Physik

Elektromagnetische Felder

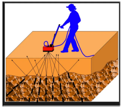
Seismologie



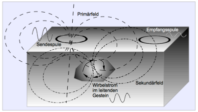
Seismik



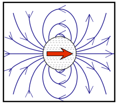
Georadar



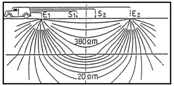
Elektromagnetik



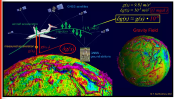
Magnetik



Geoelektrik



Gravimetrie



Inhalte der Vorlesung

Einführung in die Geophysik I, WS 2023/24, Kl. HS B			
#	Datum	Vorlesung (09:45-11:15h)	Übungen (11:30-12:30h)
1	25.10.23	Einführung, Wellenausbreitung	
	01.11.23	Feiertag	
2	08.11.23	Wellenausbreitung	
3	15.11.23	Refraktionsseismik	Ü1: Moduln
	22.11.23	Studieninformationstag, Keine Vorlesung	
4	29.11.23	Reflexionsseismik I	
	06.12.23	Reflexionsseismik II	Ü2: Refraktionsseismik
5	13.12.23	Elektromagnetische Felder	Ü3: Reflexionsseismik
6	20.12.23	Goradar	
7	10.01.24	Geoelektrik	Ü4: Georadar
8	17.01.24	Gravimetrie	Ü5: Geoelektrik
9	24.01.24	Gravimetrie	
10	31.01.24	Magnetik	Ü6: Gravimetrie
11	07.02.24	Magnetik	Ü7: Magnetik
	14.02.24	Klausur	

Evaluation Einführung in die Geophysik WS 2023/24

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung: Link

Übungen: Link

Agenda

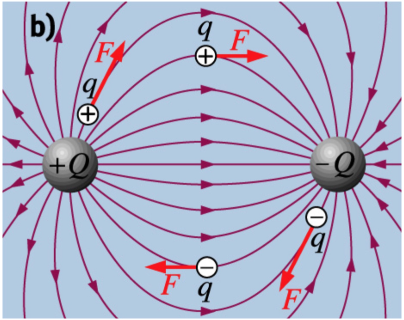
- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Das elektrische Feld

- Das elektrische Feld ist ein Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
- Es beschreibt die auf eine Probeladung q wirkende Kraft $\vec{F} = \vec{E}q$.



Das elektrische Feld eines Dipols und die Kraft auf eine Probeladung

Relevant für die geophysikalische Erkundung

1. Ein vorhandenes E-Feld erzeugt Ladungstransport = Strom.
2. Vorhandene atomare Dipole in einem Dielektrikum verändern den Fluss, d.h. die Durchlässigkeit (Permittivität) für das E-Feld.

Ladungstransport - Ohmsches Gesetz

In einem leitfähigen Material entsteht Ladungstransport wenn ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}$ existiert. Das Ohmsche Gesetz für ein Medium lautet:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E} = \varrho^{-1} \vec{E}}$$

- σ: spezifische elektrische Leitfähigkeit (Einheit $(\Omega m)^{-1}$).
- $\varrho = \sigma^{-1}$: spezifische elektrischer Widerstand
- $\vec{j} = \vec{I}/A$: Stromdichte (A=Querschnitt)
- $\vec{I} = dQ/dt$: Strom=Ladungsmenge/Zeit.

Die elekrische Flussdichte $\vec{D}$

Ein Material kann den Fluss (Dichte der Feldlinien) des elektrischen Feldes $\vec{E}$ verändern:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Die elektrische Flussdichte $\vec{D}$ beschreibt die Dichte der Feldlinien pro Fläche. Im Vakuum gilt

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon_0 = 8.85418...10^{-12} N/m \quad \text{elektr. Feldkonstante}$$

In einem isotropen Dielektrikum kann es zu einer Verstärkung um den Faktor ϵ_r kommen:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

ϵ_r ist ein Materialparameter und wird als relative Permittivität (relative Dielektrizitätszahl) bezeichnet.

Elektrische Eigenschaften Geo-Materialien

Material	ε_r	σ *(mS/m)*
Luft	1	0
Asphalt	2-12	1-100
Lehm	4-40	2-1000
Kohle	4-25	10-100
Zement	4-20	1-100
Granit	4-7	0.01-5
Eis	3-4	0.01-1
Kalk	4-8	0.1-5
Permafrost	4-8	0.01-10
Steinsalz	5-7	0.01-1
Sand (trocken)	3-6	0.01-0.1

Material	ε_r	σ *(mS/m)*
Sandstein	2-10	0.01-10
Silt	5-30	1-100
Schnee	8-12	0.1-1000
Distilliertes Wasser	80	0.01
Grundwasser	80	0.1-5
Meerwasser	80	1000-4000

Veränderung mit

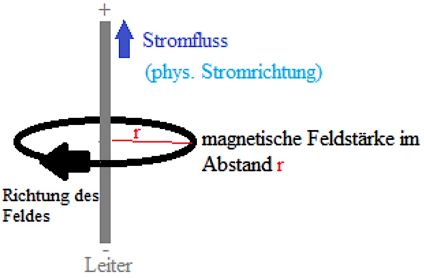
- Wassergehalt
- Porosität
- Metalle/Erze
- Tongehalt

Agenda

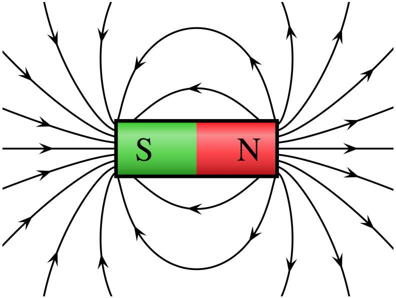
- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Das magnetische Feld $\vec{H}$

- Ein vom Strom durchflossener Leiter erzeugt im Abstand r ein magnetisches Feld $|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$
- Die magnetische Feldstärke hat die Einheit Ampere/Meter (A/m).



Magnetfeld H eines Leiters



Magnetfeld eines Stabmagneten

(Wikipedia)

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Ein Material kann den Fluss (die Dichte der Feldlinien) des Erreger-Feldes $\vec{H}$ verändern. Die Feldlinien werden unterschiedlich gebündelt bzw. verdichtet.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ beschreibt die resultierende Dichte der Feldlinien pro Fläche. $\vec{B}$ kann daher als eigentliches Wirkungsfeld aufgefasst werden. Im Vakuum gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} N/A^2 \quad \text{magn. Feldkonstante}$$

In Materialien kann es zu einer Verstärkung/Abschwächung von $\vec{B}$ um den Faktor μ_r kommen.

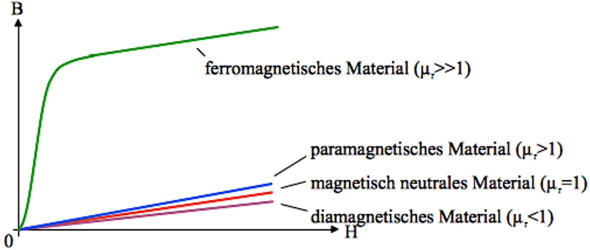
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

μ_r ist ein Materialparameter und wird als relative Permeabillitätszahl bezeichnet.

Relative Permeabillitätszahl μ_r

1. $\mu_r < 1$: Diamagnetismus - Verdrängung des Magnetfeldes (z.B. Wasser)
2. $\mu_r \approx 1$: neutral - gilt für die meisten Gesteine
3. $\mu_r > 1$: Paramagnetismus - Verstärkung durch Ausrichtung magnetischer Momente (z.B. Luft)
4. $\mu_r >> 1$: Ferromagnetismus - Starke parallele Ausrichtung zahlreicher magnetischer Momente und Bildung von "Weißscher Bezirke" (z.B. Eisen, Ferrit).

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$



(Wikipedia)

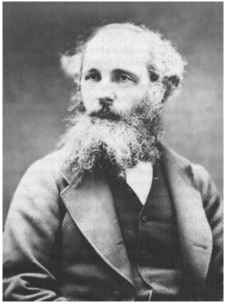
Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Die Maxwell-Gleichungen

- Um 1860 erstellte der schottische Physiker eine mathematisch knappe Zusammenfassung des
  1. Faraday'schen Gesetzes
  2. Ampére'schen Gesetzes
  3. Gauss'schen Gesetzes für $\vec{E}$ bzw. $\vec{D}$
  4. Gauss'schen Gesetzes für $\vec{H}$, bzw. $\vec{B}$

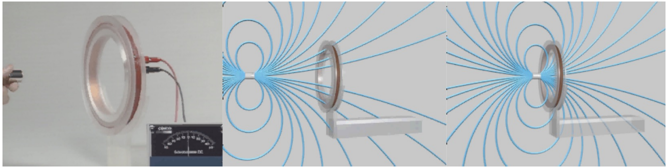
  $\rightarrow$ Maxwell-Gleichungen
- Sie besitzen in der klassischen Elektrodynamik eine ähnliche Bedeutung wie die Newton'schen Axiome in der klassischen Mechanik
- Sie bilden die Grundlage für die geophysikalischen Verfahren: Geolekektrik, Magnetik, EM, Georadar



James Clerk Maxwell 1831-1879

1. Maxwellgleichung

- Induktionsgesetz nach Faraday



- Beobachtung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ induziert eine Spannung
- Erklärung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ erzeugt eine Veränderung von $\vec{E}(\vec{r}, t)$, dies erzeugt eine Ladungsbewegung und dies induziert einen Spannungsabfall

Michael Faraday 1770-1845

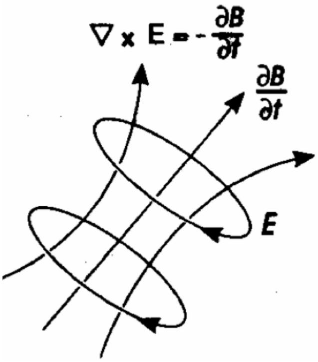
1. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Induktionsgesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Ein zeitlich variabler magnetischer Fluss verursacht ein senkrecht dazu stehendes elektrisches Feld.
- Anwendung: Generator (rotierender Magnet erzeugt Strom)

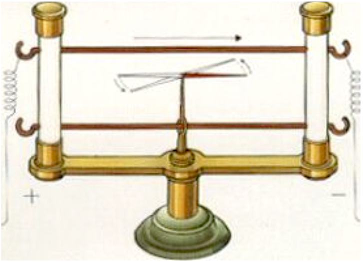
$\vec{E}$: elektrisches Feld (V/m), $\vec{B}$: magnetische Fluss (T)



1. Maxwellgleichung: Induktionsgesetz

2. Maxwellgleichung

- Experiment



- Beobachtung: Strom in elektrischem Leiter verursacht Ablenkung einer Kompass-Nadel
- Erklärung: Eine Magnetfeld entsteht durch bewegte Ladungen (Ströme)

Hans Christian Oersted & André Marie Ampére

1820

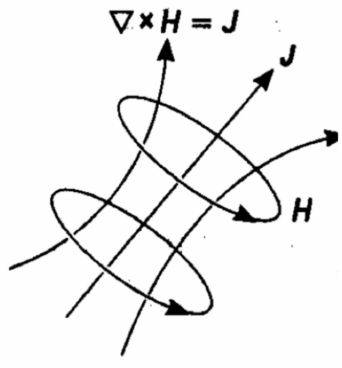
2. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Ampére'schen Gesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

- Verschiebungs- und Leitungsströme induzieren ein senkrecht auf dem Stromfluss stehendes magnetisches Feld.
- Anwendung: Elektromagnet (stromduchflossene Spule mit EIsenkern)

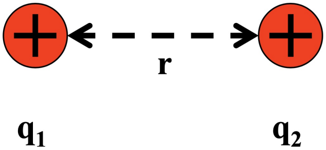
$\vec{H}$: Magnetfeld (A/m), $\vec{D}$: dielektrische Verschiebung (C/m^2), $\vec{j}$: Stromleitungsdichte (A/m^2)



2. Maxwellgleichung: Ampére'sches Gesetz

3. Maxwellgleichung

- 1785 Experimente zur Messung der Kraft durch geladene Kugeln



- Beobachtung

$$|\vec{F}| = \pm K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- inverses quadratisches Gesetz

Charles Augustin de Coulomb 1736-1806

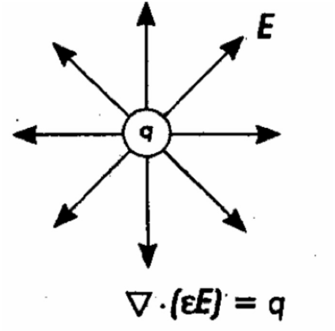
3. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Coloumb'schen Gesetzes nach Maxwell als Gauss'sches Gesetz für das elektrische Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}$$

- Das elektrische Feld muss geschlossene Feldlinien bilden oder an der Ladung enden.

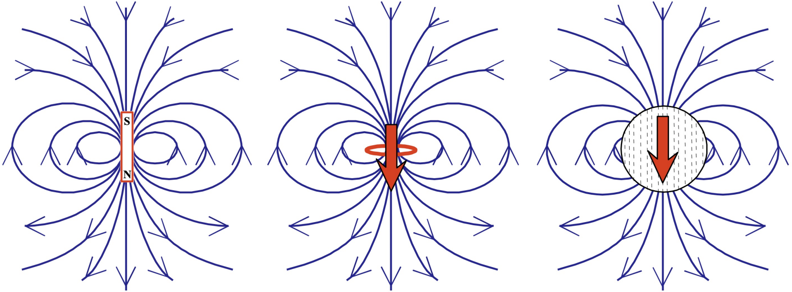
$\vec{E}$: elektrisches Feld (V/m, $\vec{q}$: Ladungsdichte (C/m^3))



3. Maxwellgleichung: Gauss'sches Gesetz für $\vec{E}$

4. Maxwellgleichung

- Beobachtung



Stabmagnet | Stromkreis | magnetisierte Kugel

- Die Magnetfeldlinien sind immer in in sich geschlossen

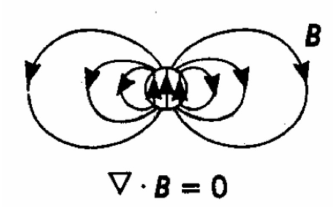
4. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Gauss'schen Gesetzes für das Magnetfeld nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

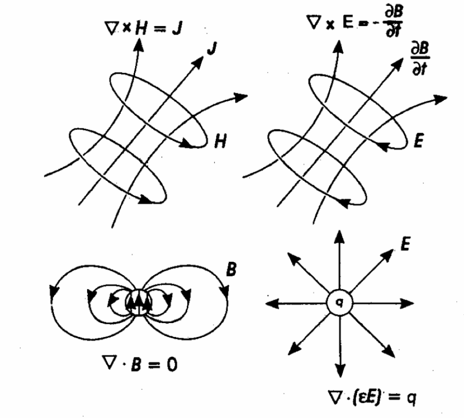
- Es gibt weder Quellen noch Senken für das magn. Feld, d.h. keine isolierten magn. Ladungen oder Monopole

$\vec{B}$: magnetische Fluss (T)



4. Maxwellgleichung: Gauss'sches Gesetz für $\vec{B}$

Die Maxwell-Gleichungen



Veranschaulichung der Maxwell-Gleichungen

1. Induktionsgesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

2. Duchflutungsgesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}}$$

3. Coulomb'sches Gesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}}$$

4. Gauss'sches Gesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Materialgleichungen

Die Materialgleichungen beschreiben die Veränderung der Felder in Materialien.

1. Elektrische Permittivität in einem Dielektrikum: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$
2. Magnetische Permeabilität: $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$
3. Stromleitung: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Die (geophysikalisch) relevanten Materialparameter sind

1. ϵ_r: relative dielektrische Permittivität (Vs/Am)
2. μ_r: relative magnetische Permeabilität (Vs/Am)
3. σ: elektrische Leitfähgkeit (S/m)

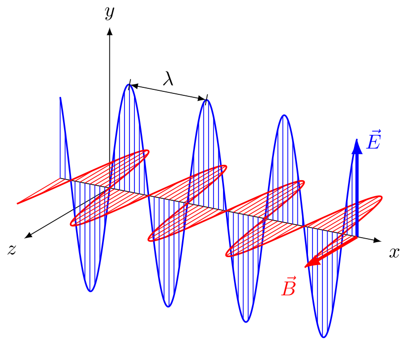
Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Lösung für eine ebene EM-Welle

Wir wollen nun die Lösung der Maxwellgleichungen für eine ebene elektromagnetische Welle berechnen:

$$E_y(x) = E_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$
$$H_z(x) = H_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$



Ebene EM-Welle (Wikipedia)

Lösung für eine ebene EM-Welle

Für diesen Fall der ebenen Welle vereinfacht sich die ersten Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}|_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Wir differenzieren nochmal nach x $\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} \tag{1}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Karlsruher Institut für Technologie

Ebenso vereinfacht sich die zweite Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}|_y = \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y$$

Wir differenzieren nochmal nach $t \quad \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t} \tag{2}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Wir setzen nun Gl. 2 in Gl. 1 ein:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \mu^{-1} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t}$$

Damit ergibt sich die Telegraphengleichung für E_y:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}}$$

Lösung für eine ebene EM-Welle

Fallunterscheidungen

1 **Optik/Licht, Georadar (bei kleinem σ)**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \lll \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies is bei hohen Frequenzen $> 10^6 Hz$ und sehr kleinem σ der Fall. Dann gilt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Diese beschreibt eine ungedämpfte EM-Welle mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \approx \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \mu_r \approx 1$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$.

Lösung für eine ebene EM-Welle

Fallunterscheidungen

2 **Georadar (bei großem σ)**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \approx \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies is bei Frequenzen $10^6 Hz - 10^9 Hz$ und signifikanter Leitfähigkeit der Fall. Es breitet sich dann eine gedämpfte EM-Welle aus.

3 **Elektromagnetik**

$$\mu\sigma\frac{E_y}{\partial t} \ggg \mu\epsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies ist bei sehr geringen Frequenzen $\lll 10^6 Hz$ der Fall. Es tritt dann Diffusion und keine Wellenausbreitung mehr auf. Diese niederfrequenten Verfahren werden mit dem Begriff "Elektromagnetik" beschrieben.

Agenda

- Das elektrische Feld
- Das magnetische Feld
- Maxwell-Gleichungen
- Telegraphengleichung
- Geophysikalische Verfahren

Geophysikalische Verfahren

Methode	Frequenz	Grundgl.	Materialpar.	Quelle	Messgr.
Geoelektrik	0	$\vec{j} = \sigma \vec{E}$	σ	Stromeinspeisung	E_z
Magnetik	0	$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$	μ_r	Erdmagnetfeld	$\vec{B}$
Elektromagnetik	$\lll 10^3 Hz$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$	σ	künstl. E-Felder	$\vec{E}$
Georadar	$10^6 - 10^9 Hz$	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_r^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$	ϵ_r, σ	Antennen	$\vec{E}$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Thomas.Bohlen@kit.edu

http://www.gpi.kit.edu/