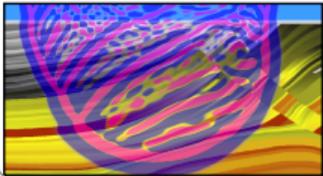


Einführung in die Geophysik I

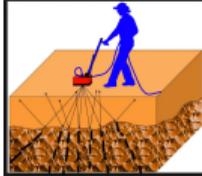
Elektromagnetische Felder

T. Bohlen, Geophysikalisches Institut, Fakultät für Physik

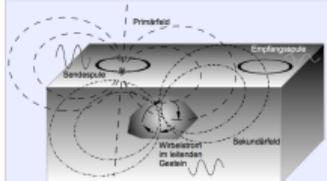
Seismik



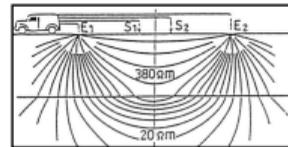
Georadar



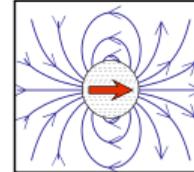
Elektromagnetik



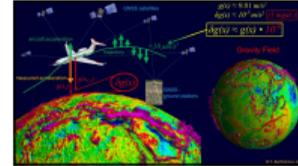
Geoelektrik



Magnetik



Gravimetrie



Inhalte der Vorlesung

Einführung in die Geophysik I, WS 2024/25

	Datum	Vorlesung (09:45-11:15h) Kl. HS B	Übungen (11:30-12:30h Kl. HS B oder 17:30-18:30h Physikhochhaus Raum 2/17)
1	23.10.24	Einführung, Wellenausbreitung	
2	30.10.24	Wellenausbreitung	
3	06.11.24	Refraktionsseismik	U1: Moduln
4	13.11.24	Reflexionsseismik	Ü2: Refraktionsseismik
	20.11.24	Studieninformationstag	
5	27.11.24	Elektromagnetische Wechselwirkungen	Ü3: Reflexionsseismik
6	04.12.24	Georadar	
7	11.12.24	Elektromagnetik	Ü4: Georadar
8	18.12.24	Elektromagnetik	
9	08.01.25	Geelektrik	
10	15.01.25	Magnetik	Ü5: Geoelektrik
11	22.01.25	Magnetik	
12	29.01.25	Gravimetrie	Ü6: Magnetik
13	05.02.25	Gravimetrie	Ü7: Gravimetrie
	12.02.25	Klausur	

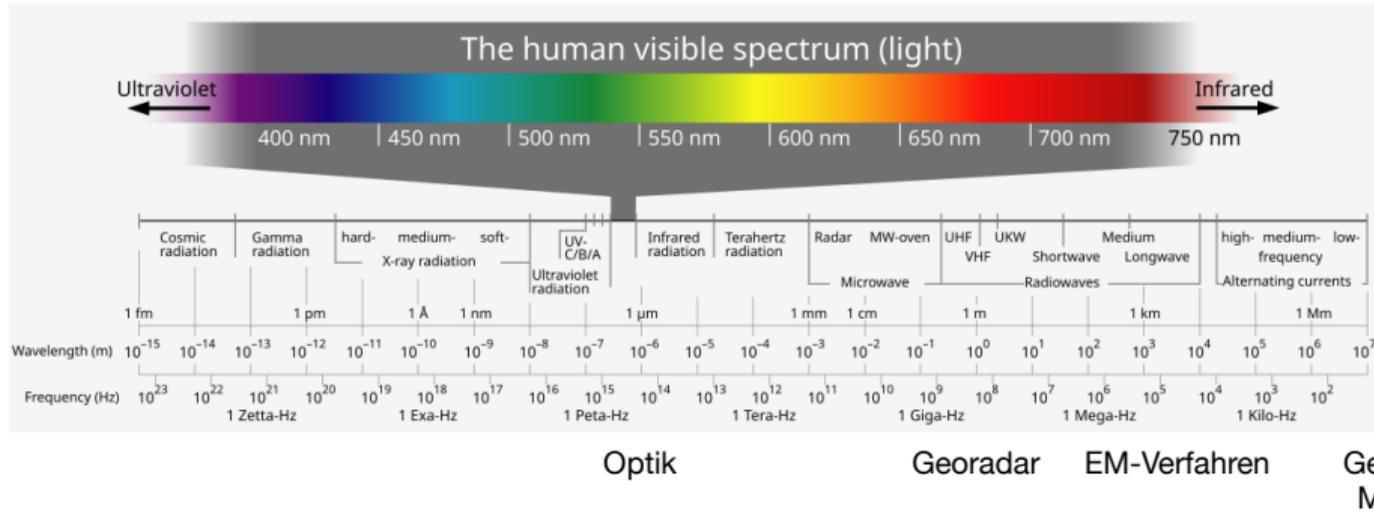
Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Elektromagnetische Phänomene und Verfahren



Physikalische Grundlage sind die Maxwellgleichungen und Materialgleichungen. Deren Lösungen sind stark frequenzabhängig.

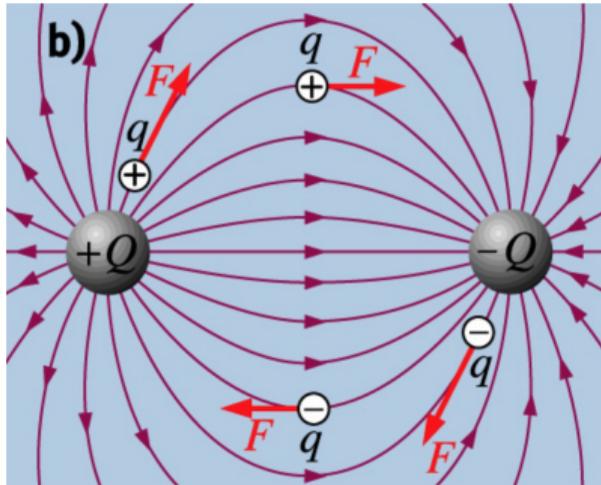
Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Das elektrische Feld

- Das elektrische Feld beschreibt die auf eine Probeladung q wirkende Coulomb-Kraft

$$\vec{F} = \vec{E}q.$$



Das elektrische Feld eines Dipols und die Kraft auf eine Probeladung

Die resultierende Stromdichte (=Ladungsmenge pro Zeit pro Querschnitt) ist

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D$$

- \vec{J}_C : Leitungsstrom (conduction current)
- \vec{J}_D : Verschiebungsstrom (displacement current)

Leitungsstrom \vec{J}_C

Conduction Currents

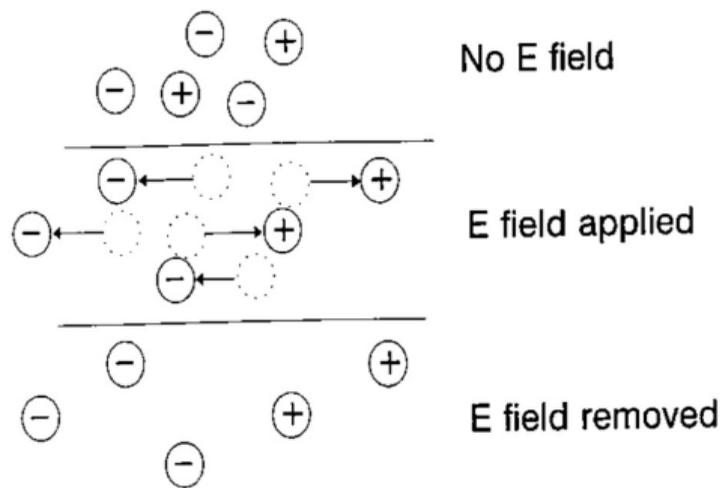


Illustration des Leitungsstroms (Annan [2003])

- **Freie** Ladungen bewegen sich über größere Distanzen.
- Bei diesem Ladungstransport geht durch Reibung Energie verloren (Wärme)
- Ohmsches Gesetz für Kontinua:

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$$

- σ : spezifische elektrische Leitfähigkeit (Siemens/m)
- $\rho = \sigma^{-1}$: spezifischer elektrischer Widerstand (Ωm)

Verschiebungsstrom \vec{J}_D

Displacement Currents

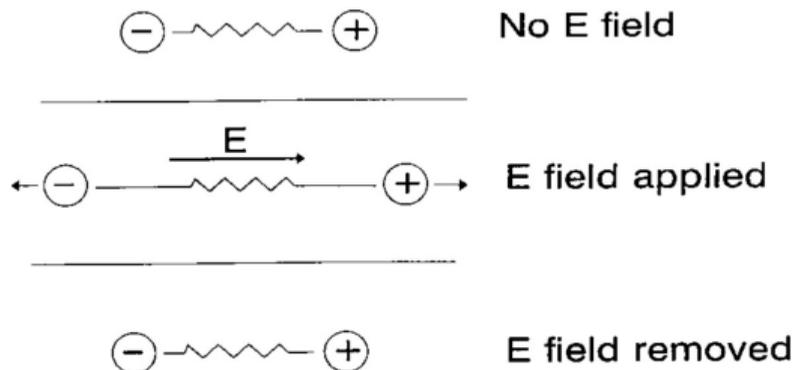
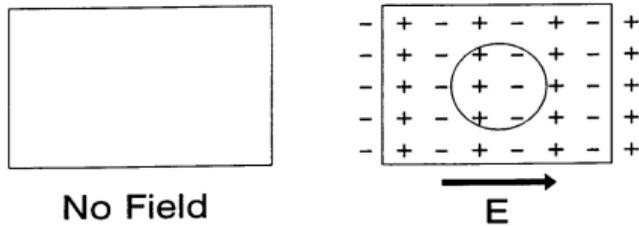


Illustration des Verschiebungsstromes (Annan [2003])

- **Gebundene** Ladungen schwingen bei zeitabhängigen E-Feld um einen Mittelpunkt.
- Mechanismen: Ladungstrennung an Oberflächen, Orientierung molekularer Dipole,...
- Energieverlust ist gering

Verschiebungsstrom \vec{J}_D

Dipole Moment Density



\vec{D} = Dipol Momenten Dichte

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ϵ = elektrische Permittivität

Im Vakuum gilt

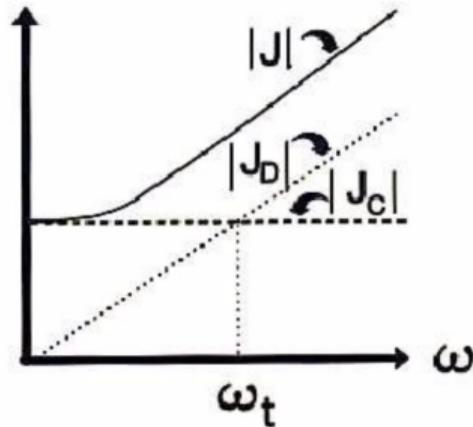
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon_0 = 8.85418...10^{-12} N/m$$

In einem Dielektrikum kommt es zu einer Verstärkung um den Faktor ϵ_r :

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

ϵ_r wird als relative elektrische Permittivität (relative Dielektrizitätszahl) bezeichnet.

Frequenzabhängigkeit von \vec{J}_C und \vec{J}_D



Frequenzabhängigkeit des Verschiebungsstromes \vec{J}_D und des Leitungsstromes \vec{J}_C (Annan [2003])

$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{J}_D = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \propto \omega$$

$$\omega_t = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$\omega < \omega_t : \vec{J}_C > \vec{J}_D$ (EM-Verfahren)

$\omega > \omega_t : \vec{J}_C < \vec{J}_D$ (GPR)

Elektrische Eigenschaften Geo-Materialien

<i>Material</i>	ϵ_r	σ (mS/m)
Luft	1	0
Asphalt	2-12	1-100
Lehm	4-40	2-1000
Kohle	4-25	10-100
Zement	4-20	1-100
Granit	4-7	0.01-5
Eis	3-4	0.01-1
Kalk	4-8	0.1-5
Permafrost	4-8	0.01-10
Steinsalz	5-7	0.01-1
Sand (trocken)	3-6	0.01-0.1

<i>Material</i>	ϵ_r	σ (mS/m)
Sandstein	2-10	0.01-10
Silt	5-30	1-100
Schnee	8-12	0.1-1000
Distilliertes Wasser	80	0.01
Grundwasser	80	0.1-5
Meerwasser	80	1000-4000

Veränderung mit

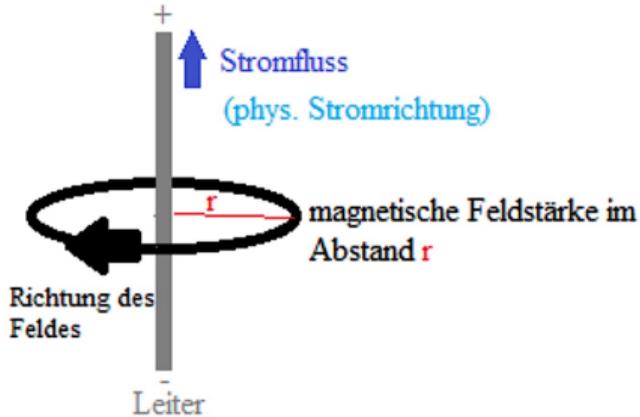
- Wassergehalt
- Porosität
- Metalle/Erze
- Tongehalt

Agenda

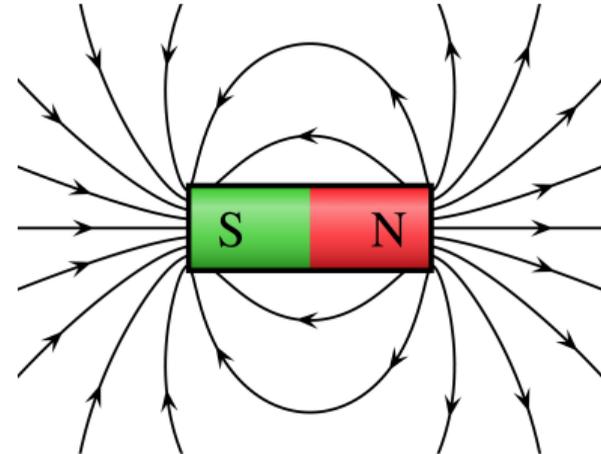
1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Das magnetische Feld \vec{H}

- Ein vom Strom durchflossener Leiter erzeugt im Abstand r ein magnetisches Feld $|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$
- Die magnetische Feldstärke hat die Einheit Ampere/Meter (A/m).



Magnetfeld H eines Leiters



Magnetfeld eines Stabmagneten

(Wikipedia)

Die magnetische Flussdichte \vec{B}

Ein Material kann den Fluss (die Dichte der Feldlinien) des Erreger-Feldes \vec{H} verändern. Die Feldlinien werden unterschiedlich gebündelt bzw. verdichtet.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Die magnetische Flussdichte \vec{B} beschreibt die resultierende Dichte der Feldlinien pro Fläche. \vec{B} kann daher als eigentliches Wirkungsfeld aufgefasst werden. Im Vakuum gilt

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad \text{magn. Feldkonstante}$$

In Materialien kann es zu einer Verstärkung/Abschwächung von \vec{B} um den Faktor μ_r kommen.

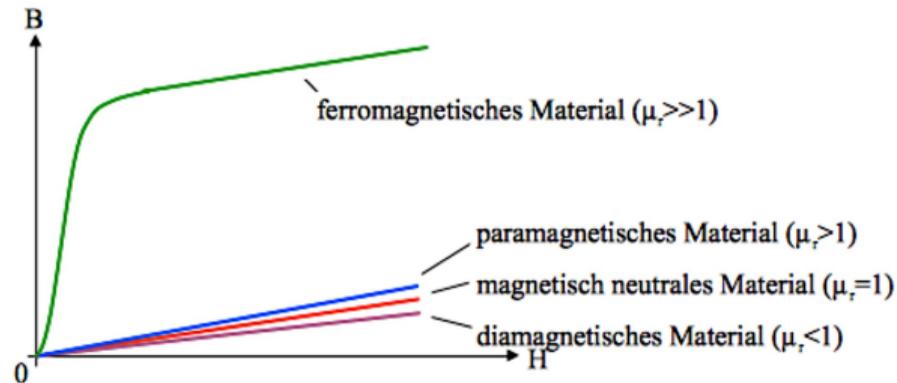
$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

μ_r ist ein Materialparameter und wird als relative Permeabilitätszahl bezeichnet.

Relative Permeabilitätszahl μ_r

- 1 $\mu_r < 1$: Diamagnetismus - Verdrängung des Magnetfeldes (z.B. Wasser)
- 2 $\mu_r \approx 1$: neutral - gilt für die meisten Gesteine
- 3 $\mu_r > 1$: Paramagnetismus - Verstärkung durch Ausrichtung magnetischer Momente (z.B. Luft)
- 4 $\mu_r \gg 1$: Ferromagnetismus - Starke parallele Ausrichtung zahlreicher magnetischer Momente und Bildung von "Weißscher Bezirke" (z.B. Eisen, Ferrit).

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$



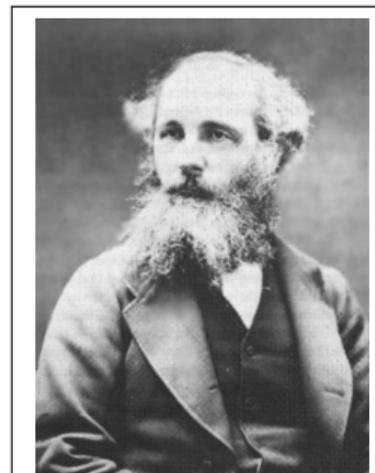
(Wikipedia)

Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Die Maxwell-Gleichungen

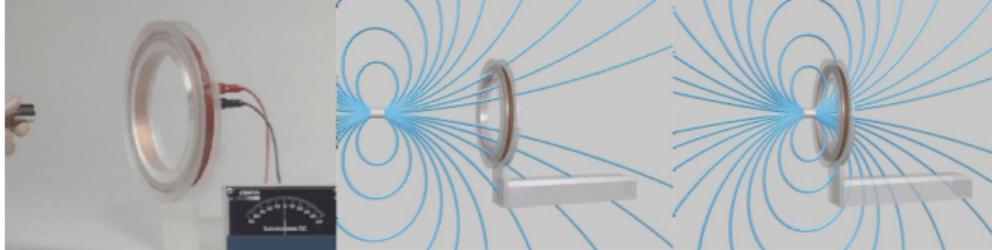
- Um 1860 erstellte der schottische Physiker eine mathematisch knappe Zusammenfassung des
 - ① Faraday'schen Gesetzes
 - ② Ampère'schen Gesetzes
 - ③ Gauss'schen Gesetzes für \vec{E} bzw. \vec{D}
 - ④ Gauss'schen Gesetzes für \vec{H} , bzw. \vec{B}
 → Maxwell-Gleichungen
- Sie besitzen in der klassischen Elektrodynamik eine ähnliche Bedeutung wie die Newton'schen Axiome in der klassischen Mechanik
- Sie bilden zusammen mit den Materialgleichungen die Grundlage für die geophysikalischen Verfahren: Geolektrik, Magnetik, EM, Georadar



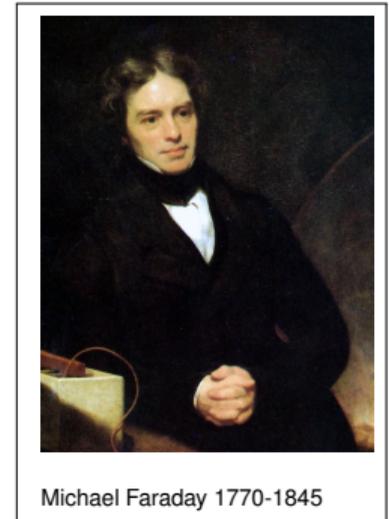
James Clerk Maxwell 1831-1879

1. Maxwellgleichung

■ Induktionsgesetz nach Faraday



- Beobachtung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ induziert eine Spannung
- Erklärung: Eine Veränderung von $\vec{B}(\vec{r}, t)$ erzeugt eine Veränderung von $\vec{E}(\vec{r}, t)$, dies erzeugt eine Ladungsbewegung und dies induziert einen Spannungsabfall



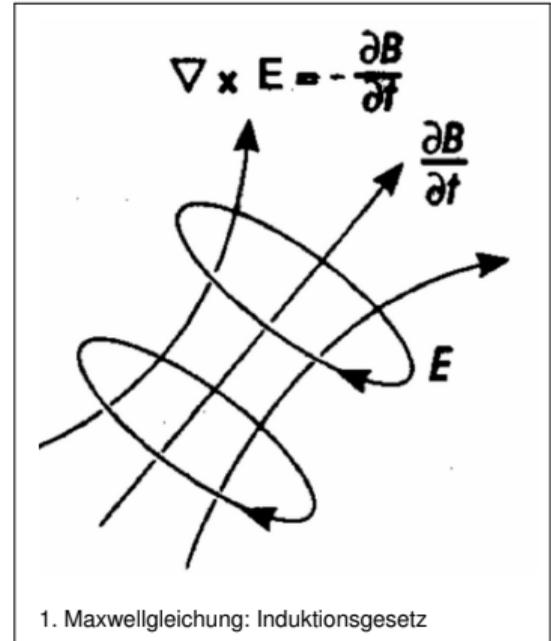
1. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Induktionsgesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

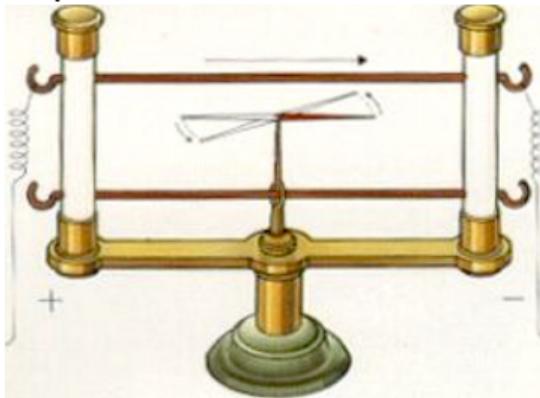
- Ein zeitlich variabler magnetischer Fluss verursacht ein senkrecht dazu stehendes elektrisches Feld.
- Anwendung: Generator (rotierender Magnet erzeugt Strom)

\vec{E} : elektrisches Feld (V/m), \vec{B} : magnetische Fluss (T)

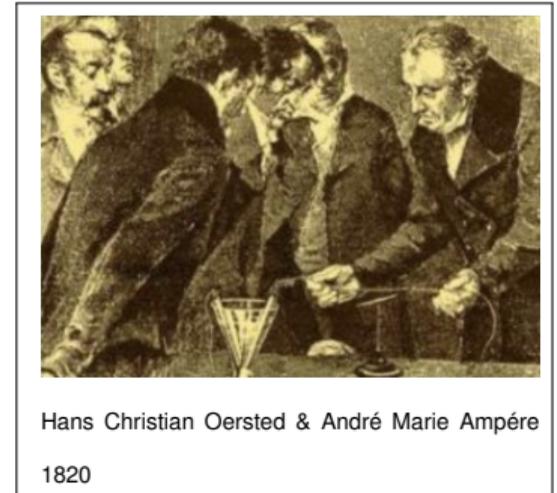


2. Maxwellgleichung

■ Experiment



- Beobachtung: Strom in elektrischem Leiter verursacht Ablenkung einer Kompass-Nadel
- Erklärung: Eine Magnetfeld entsteht durch bewegte Ladungen (Ströme)



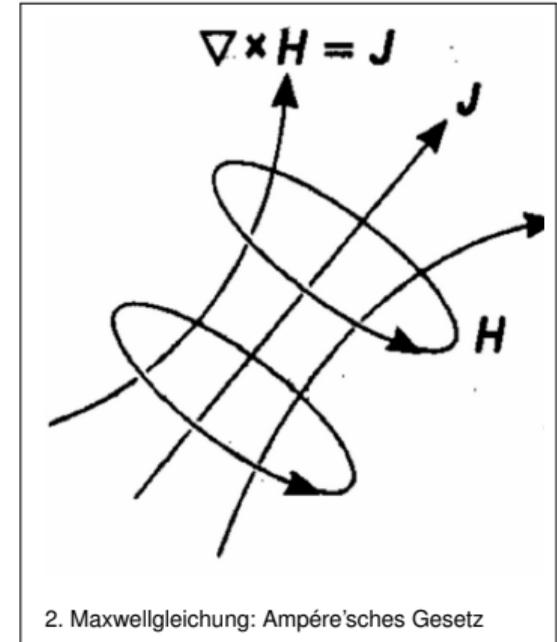
2. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Ampère'schen Gesetzes nach Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_C + \vec{J}_D$$

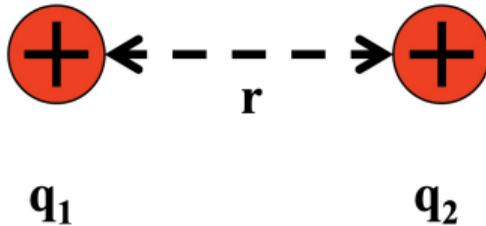
- Verschiebungs- und Leitungsströme induzieren ein senkrecht auf dem Stromfluss stehendes magnetisches Feld.
- Anwendung: Elektromagnet (stromdurchflossene Spule mit Eisenkern)

\vec{H} : Magnetfeld (A/m), \vec{D} : dielektrische Verschiebung (C/m²), \vec{j} : Stromleitungsichte (A/m²)



3. Maxwellgleichung

- 1785 Experimente zur Messung der Kraft durch geladene Kugeln



- Beobachtung

$$|\vec{F}| = \pm K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- inverses quadratisches Gesetz



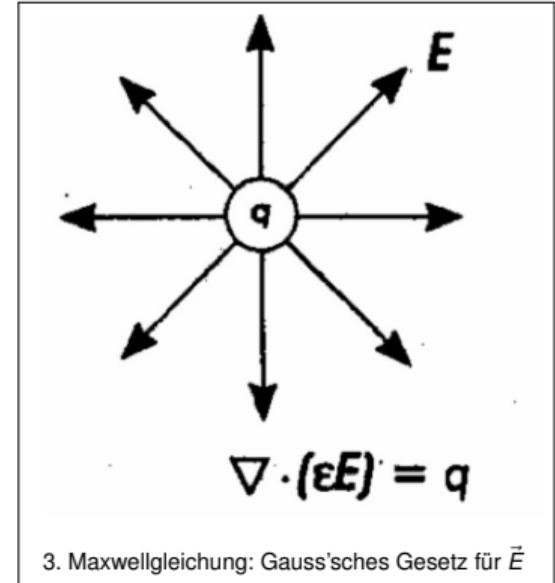
3. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Coulomb'schen Gesetzes nach Maxwell als Gauss'sches Gesetz für das elektrische Feld

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}$$

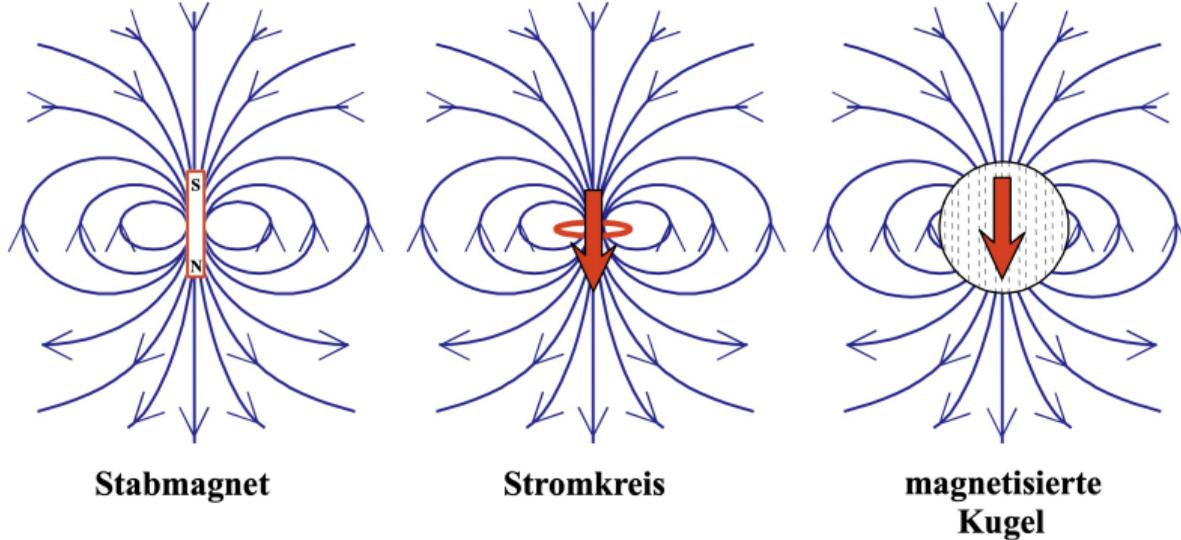
- Das elektrische Feld muss geschlossene Feldlinien bilden oder an der Ladung enden.

\vec{E} : elektrisches Feld (V/m , \vec{q} : Ladungsdichte (C/m^3))



4. Maxwellgleichung

■ Beobachtung



■ Die Magnetfeldlinien sind immer in in sich geschlossen

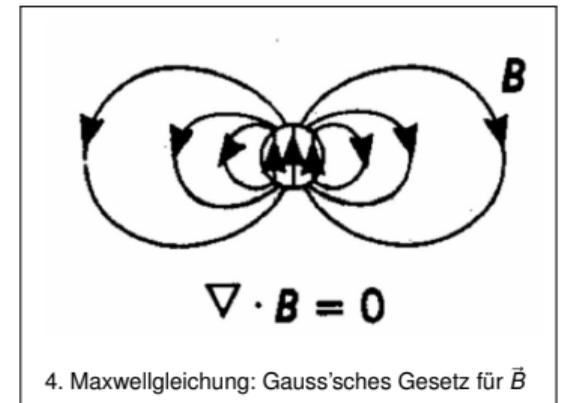
4. Maxwellgleichung

- Mathematische Formulierung des Gauss'schen Gesetzes für das Magnetfeld nach Maxwell

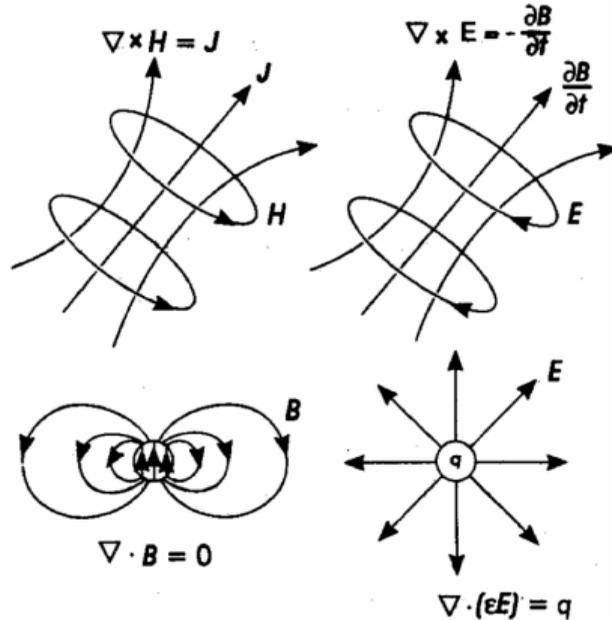
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Es gibt weder Quellen noch Senken für das magn. Feld, d.h. keine isolierten magn. Ladungen oder Monopole

\vec{B} : magnetische Fluss (T)



Die Maxwell-Gleichungen



Veranschaulichung der Maxwell-Gleichungen

1 Induktionsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2 Durchflutungsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C$$

3 Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon}$$

4 Gauss'sches Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Materialgleichungen

Die Materialgleichungen beschreiben die Veränderung der Felder in Materialien.

- 1 Elektrische Permittivität in einem Dielektrikum: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$
- 2 Magnetische Permeabilität: $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$
- 3 Stromleitung: $\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D = \sigma \vec{E} + \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

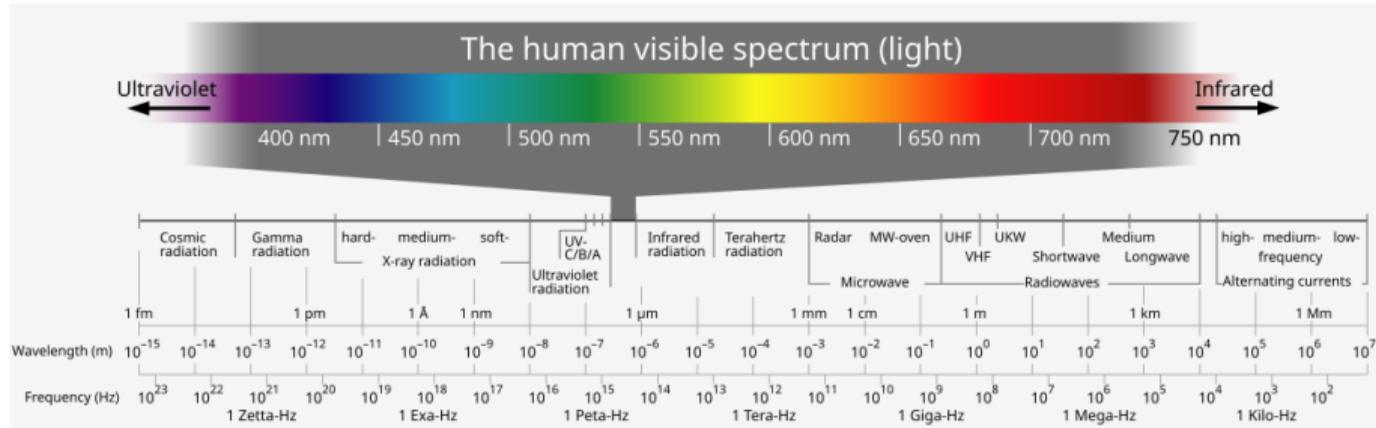
Die (geophysikalisch) relevanten Materialparameter sind

- 1 ϵ_r : relative dielektrische Permittivität (Vs/Am)
- 2 μ_r : relative magnetische Permeabilität (Vs/Am)
- 3 σ : elektrische Leitfähigkeit (S/m)

Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Elektromagnetische Phänomene und Verfahren



Optik

Georadar

EM-Verfahren

Geoelektrik
Magnetik

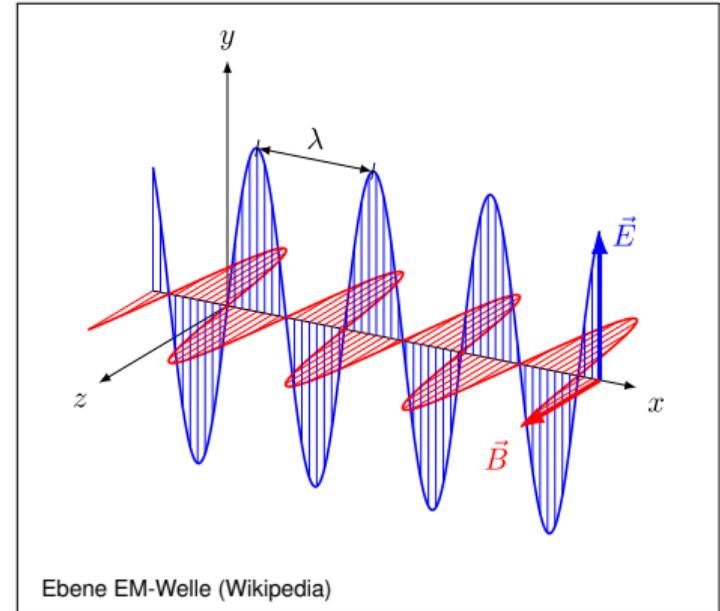
Über die Telegraphengleichung kann man die Frequenzabhängigkeit der Lösungen gut beschreiben.

Telegraphengleichung

Die Telegraphengleichung entsteht aus einer Kombination der 1. und 2. Maxwellgleichung. Wir leiten die Telegraphengleichung nur für bestimmte Komponenten her. Dafür betrachten wir eine ebene elektromagnetische Welle:

$$E_y(x) = E_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$

$$H_z(x) = H_0 \exp(i\omega(t - x/c))$$



Telegraphengleichung

Für diesen Fall der ebenen Welle vereinfacht sich die erste Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}|_z = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

Wir differenzieren nochmal nach $x \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} \quad (1)$$

Telegraphengleichung

Ebenso vereinfacht sich die zweite Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_C$$

zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}|_y = \frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + J_{C_y} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y$$

Wir differenzieren nochmal nach $t \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t} \quad (2)$$

Telegraphengleichung

Wir setzen nun Gl. 2 in Gl. 1 ein:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial t} = \mu^{-1} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \sigma \frac{E_y}{\partial t}$$

Damit ergibt sich die Telegraphengleichung für E_y :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}}$$

Lösung Telegraphengleichung: Optik/Georadar

1 Optik, Georadar (bei kleinem σ)

$$\mu\sigma \frac{E_y}{\partial t} \lll \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies ist bei hohen Frequenzen $> 10^6 \text{ Hz}$ und sehr kleinem σ der Fall. Dann gilt die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Diese beschreibt eine ungedämpfte EM-Welle mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \approx \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad \mu_r \approx 1$$

mit der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$.

Lösung Telegraphengleichung: Georadar

2 Georadar (bei großem σ)

$$\mu\sigma \frac{E_y}{\partial t} \approx \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies ist bei Frequenzen $10^6 \text{ Hz} - 10^9 \text{ Hz}$ und signifikanter Leitfähigkeit der Fall. Dann sind alle Terme in der Telegraphengleichung wirksam

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$$

Diese beschreibt eine gedämpfte EM-Welle mit dem Dämpfungsterm $\mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}$. Die Dämpfung wird also durch σ (Leitungsstrom) verursacht.

Lösung Telegraphengleichung: Elektromagnetik

3 Diffusive EM-Verfahren

$$\mu\sigma \frac{E_y}{\partial t} \gg \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Dies ist bei sehr geringen Frequenzen $10^2 - 10^6 \text{ Hz}$ der Fall. Dann lautet die Grundgleichung

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{E_y}{\partial t}}$$

Der Leitungsstrom dominiert. Keine Wellenausbreitung. Das elektrische Feld diffundiert durch die Erde. Verfahren heißt "Induktive oder diffusive Elektromagnetik".

Lösung Telegraphengleichung: Geoelektrik/Magnetik

Im Fall $\omega = 0$ verlieren die Felder \vec{E} und \vec{H} ihre Zeitabhängigkeit. Dann verschwinden die EM-Wechselwirkungen, die durch die 1. und 2. Maxwellgleichung beschrieben werden.

4 Geoelektrik ($\omega = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon} \quad (3. \text{ Maxwell})$$

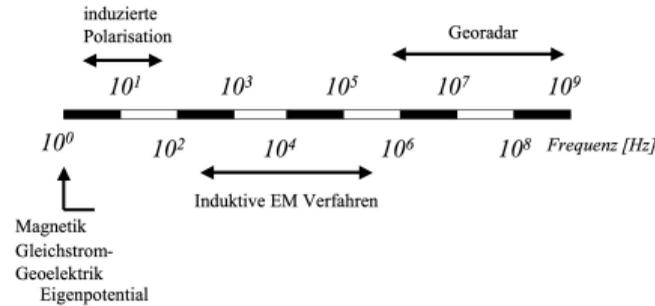
$$\vec{J}_C = \sigma \vec{E} \quad (\text{Materialgleichung Ohmsches Gesetz})$$

5 Magnetik ($\omega = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4. \text{ Maxwell})$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (\text{Materialgleichung Induktion})$$

Spektrum geophysikalischer EM-Verfahren



[Maurer, 2024]

Methode	Frequenz	Grundgl.	Materialpar.	Quelle	Messgr.
Geoelektrik	0 Hz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \vec{j} = \sigma \vec{E}$	σ	Stromeinspeisung	E_z
Magnetik	0 Hz	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$	μ_r	Erdmagnetfeld	\vec{B}
Diffusive EM-Verfahren	$10^2 - 10^6$ Hz	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu \sigma \frac{E_y}{\partial t}$	σ	Antennen	\vec{E}
Georadar	$10^6 - 10^9$ Hz	$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon_r^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{E_y}{\partial t}$	ϵ_r, σ	Antennen	\vec{E}

Agenda

1. Einführung
2. Das elektrische Feld
3. Das magnetische Feld
4. Maxwell-Gleichungen
5. Telegraphengleichung
6. Zusammenfassung

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Grundlage der Verfahren Georadar und Elektromagnetik sind die Maxwellgleichungen mit den Materialgleichungen.
- Beim **Georadar** breiten sich im Frequenzbereich MHz-GHz gedämpfte elektromagnetische Wellen aus. Es lässt sich
 - ① die elektrische Permittivität ϵ aus der Auswertung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten
 - ② die elektrische Leitfähigkeit σ aus der Auswertung der Dämpfung bestimmen.
- In der **Elektromagnetik** diffundiert das EM-Feld bei Frequenzen kHz-MHz. Es lässt sich aus dem Abklingen der Felder die Leitfähigkeit σ quantifizieren.
- In der **Geoelektrik** ist das E-Feld stationär. Es tritt nur Leitungsstrom \vec{J}_C auf. Es lässt sich die Leitfähigkeit σ quantifizieren.
- In der **Magnetik** ist das B-Feld stationär. Es tritt Induktion auf. Es lässt sich die magnetische Permeabilität μ quantifizieren.



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

✉ Thomas.Bohlen@kit.edu

🔗 <http://www.gpi.kit.edu/>

Veröffentlicht unter  Lizenz.

Referenzen I

- A. Annan. *Ground Penetrating Radar: Principles, Procedures & Applications*. Sensors & Software Incorporated, 2003. URL <https://geolportal.sdsu.edu/jiracek/sage/documents/Sensors%20and%20Software%20GPR%20Manual.pdf>.
- H. Maurer. *Elektromagnetische Verfahren in der Ingeniurgeophysik. Einführung, Geoelektrik und diffusive Verfahren. Vorlesungsskript ETH Zürich, 2024.*