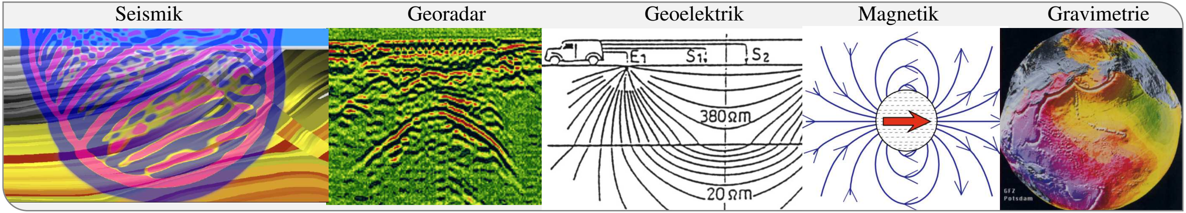
Einführung in die Geophysik I

Seismische Wellenausbreitung

Thomas Bohlen, Geophysikalisches Institut, Fakultät für Physik



Inhalte der Vorlesung im Semester WS 2022/23

1. Einführung (02.11)
2. Seismische Wellenausbreitung (02.11, 09.11)
3. Refraktionsseismik (16.11)
4. Reflexionsseismik (23.11)
5. Elektromagnetische Verfahren (30.11, 07.12)
6. Geoelektrik (14.12)
7. Gravimetrie (11.01, 18.01)
8. Magnetik (25.01, 01.02)
9. Weiteres Thema (08.02)

Die Klausur findet voraussichtlich am 15.02.2023 statt.

Agenda

- Brechungsgesetz - Konsequenzen

- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung

- Datenbeispiel

- Zusammenfassung

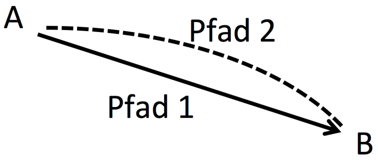
Agenda

- Brechungsgesetz - Konsequenzen
- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung
- Datenbeispiel
- Zusammenfassung

Das Fermatsche Prinzip

Das Fermatsche Prinzip ist ein weiteres hilfreiches Prinzip für die Berechnung von Strahlen. Es besagt, dass der Strahl mit der kürzesten Laufzeit realisiert wird.

$$T = \int_A^B \frac{ds}{V(x,y,z)} \stackrel{!}{=} Min$$



Pfad 1 wird realisiert, falls seine Laufzeit kürzer ist.

Pierre de Fermat (1607-1665) war ein französischer Mathematiker und Jurist.
Quelle:Wikipedia

Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Fermat-schen Prinzip

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2}$$

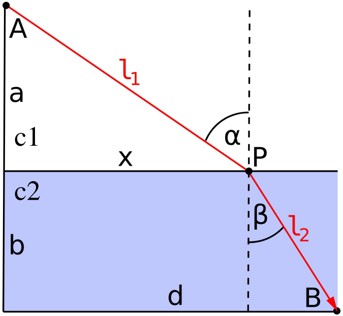
$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{c_2}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2c_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{2(d-x)}{2c_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

$$\frac{dt}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{Fermat !}$$

$$0 = \frac{x}{c_1\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

$$= \frac{1}{c_1}\frac{x}{l_1} - \frac{1}{c_2}\frac{d-x}{l_2} = \frac{1}{c_1}\sin(\alpha) - \frac{1}{c_2}\sin(\beta)$$



Bildquelle:Wikipedia

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$$

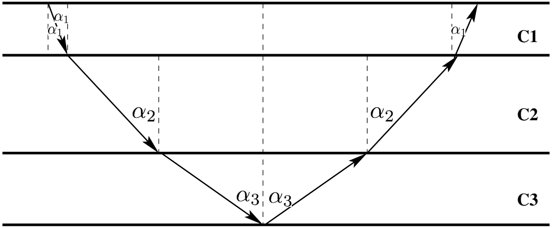
Brechungsgesetz nach Snellius

Strahlparameter - Brechungsgesetz $\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$

Definition des Strahlparameters

- $p_i := \frac{\sin(\alpha_i)}{c_i}$
- α_i = Richtung des Strahls gegenüber der vertikalen Richtung
- c_i = Geschwindigkeit in der Schicht i

Aus dem Brechungsgesetz folgt $\boxed{p = p_i = const}$

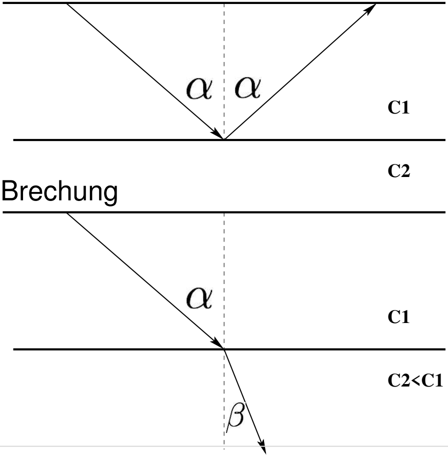


Der Strahlparameter $p = \sin(\alpha_i)/c_i$ ist eine Erhaltungsgröße entlang des seismischen Strahls.

Konsequenzen Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$$

Reflexion



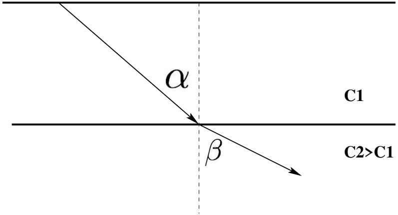
- Einfallswinkel = Ausfallswinkel
- $\rightarrow$ Reflexionsseismik

- Falls $c_2 < c_1$ ist $\beta < \alpha$
- Strahl wird zum Lot hin gebrochen

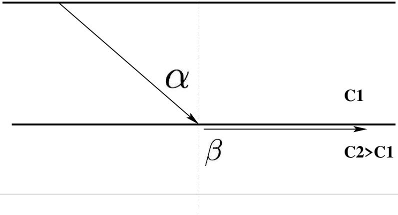
Konsequenzen Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$$

Brechung



Kopfwelle



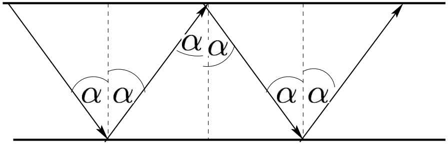
- Falls $c_1 < c_2$ ist $\beta > \alpha$
- Strahl wird vom Lot weg gebrochen

- In dem speziellen Fall $\beta = 90^\circ$ und $c_1 < c_2$ ist der sog. kritische Einfallswinkel $\alpha^* = \arcsin(c_1 / c_2)$
- Im Fall $\alpha = \alpha^*$ läuft die gebrochene Welle als Kopfwelle parallel zur Grenzfläche.
- $\rightarrow$ Refraktionsseismik

Konsequenzen Brechungsgesetz

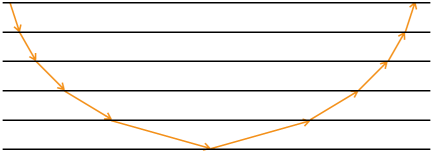
$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$$

Multiple Reflexionen



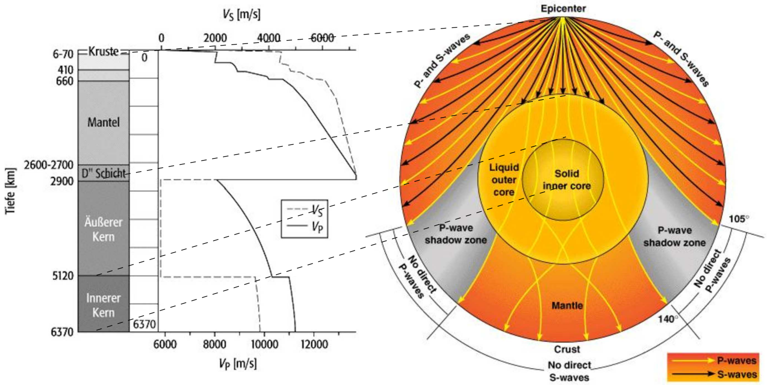
- Multiple Reflexionen in jeder Schicht. Amplituden i.d.R. gering
- Totalreflexion an der Erdoberfläche

Tauchwellen



- Bei einer kontinuierlichen Geschwindigkeitszunahme mit der Tiefe entstehenTauchwellen $\rightarrow$ Seismologie

Strahlenwege in der Erde

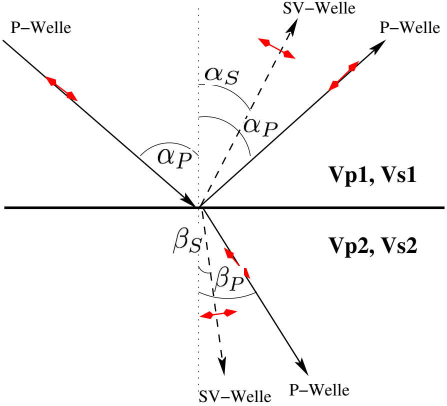


Nur transmittierte Wellenwege gezeigt. Schattenzonen ($105^\circ - 140^\circ$) für P-Wellen infolge von Brechung am äußeren Kern. Keine S-Wellen durch äußeren Kern.

Konsequenzen Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}}$$

Modenkonversion



- Konversion von P- und SV-Wellen bei jeder Reflexion in einem elastischen Medium
- Diese wird ebefalls beschrieben durch das Brechungsgesetz:

$$\boxed{\frac{\sin(\alpha_P)}{Vp_1} = \frac{\sin(\alpha_s)}{Vs_1} = \frac{\sin(\beta_P)}{Vp_2} = \frac{\sin(\beta_S)}{Vs_2}}$$

- Die Modenkonversion tritt ebenso bei einer einfallenden SV-Welle auf

Agenda

- Brechungsgesetz - Konsequenzen

- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung

- Datenbeispiel

- Zusammenfassung

Schicht über Halbraum

- Grundlegendes Verständnis für die Wellenausbreitung (Reflexion und Brechung)
- Hier: Herleitung der Laufzeitgleichungen und Simulationen.
- Annahme eines akustischen Mediums ($Vs = 0$) $\rightarrow$ nur P-Wellen.

Modellannahme: Schicht über Halbraum und akustische Wellenausbreitung.

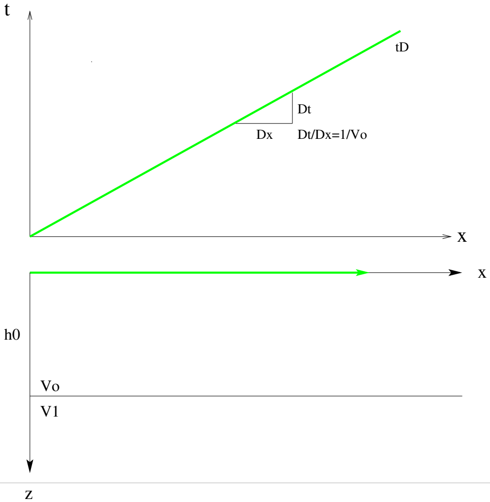
3 Untergrundparameter: h_0=Schichtmächtigkeit, v_0=Geschwindigkeit der Schicht, v_1=Geschwindigkeit des Halbraums

Agenda

Karlsruher Institut für Technologie

- Brechungsgesetz - Konsequenzen
- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung
- Datenbeispiel
- Zusammenfassung

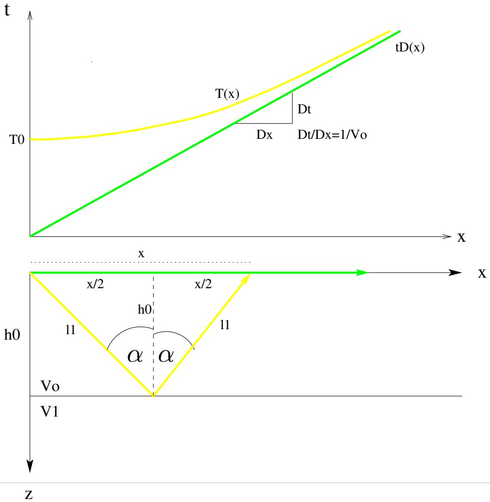
Direkte Welle



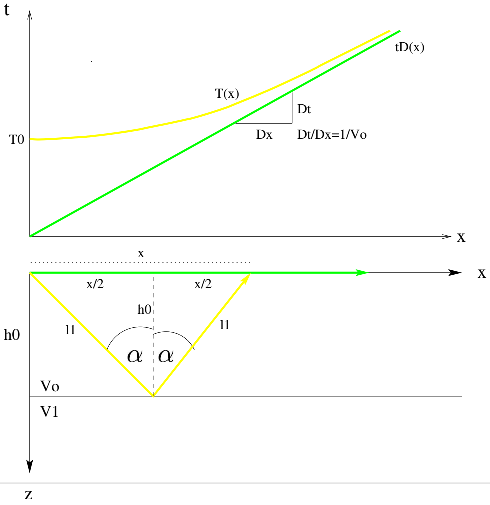
Direkte Welle

$$\boxed{t_D = \frac{x}{v_o}}$$

Reflektierte Welle



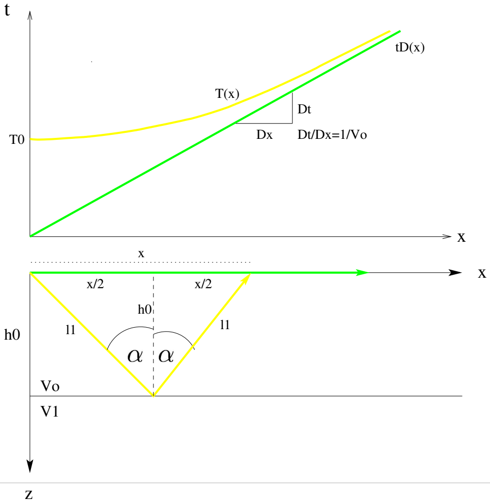
Reflektierte Welle



Reflektierte Welle

$$T^2 = \left(\frac{2l_1}{v_0}\right)^2, \; l_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_0^2$$

Reflektierte Welle

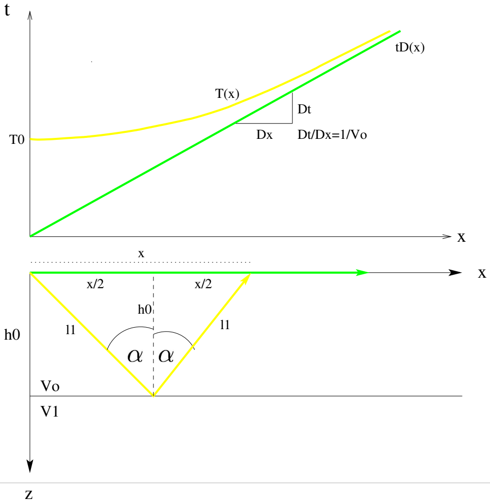


Reflektierte Welle

$$T^2 = \left(\frac{2l_1}{v_0}\right)^2,\ l_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_0^2$$

$$T^2 = \frac{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_0^2\right)}{v_o^2}$$

Reflektierte Welle



Reflektierte Welle

$$T^2 = \left(\frac{2l_1}{v_0}\right)^2, \; l_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_0^2$$

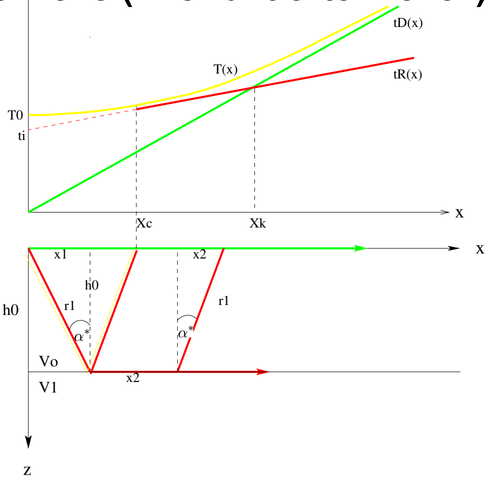
$$T^2 = \frac{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + h_0^2\right)}{v_0^2}$$

$$\boxed{T^2(x) = \frac{x^2}{v_0^2} + T_0^2}$$

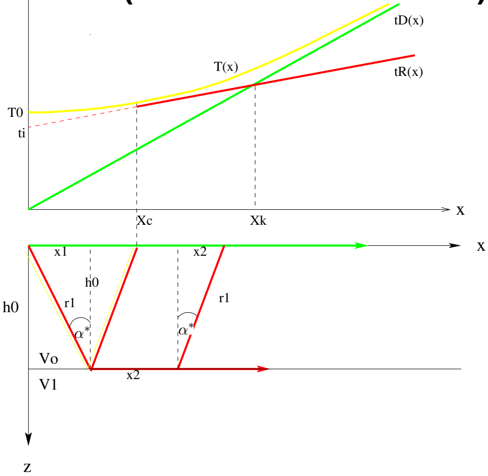
$$T_0 = \frac{2h_0}{v_0}$$

Hyperbel. T_0= Laufzeit des Lotstahls.

Kopfwelle ("Refraktierte Welle")

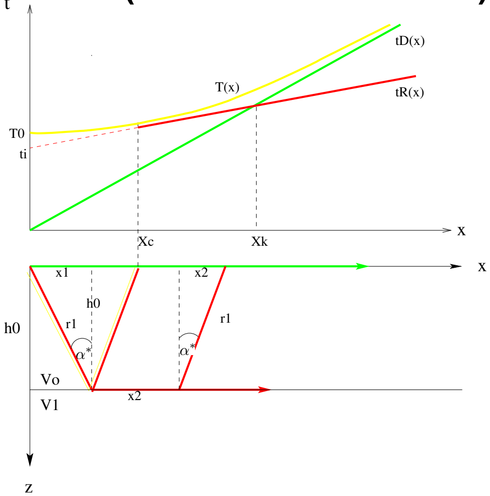


Kopfwelle ("Refraktierte Welle")



$$
\begin{aligned}
t_R &= \frac{2r_1}{v_0} + \frac{x_2}{v_1} \\
\sin(\alpha^*) &= \frac{v_0}{v_1} \\
r_1 &= \frac{h_0}{\cos(\alpha^*)} \\
x_1 &= h_0 \tan(\alpha^*) \\
x_2 &= x - 2x_1 \\
t_R &= \frac{2h_0}{v_0\cos(\alpha^*)} + \frac{x}{v_1} - \frac{2h_0\tan(\alpha^*)}{v_1} \\
&= \frac{2h_0}{\cos(\alpha^*)}\left(\frac{1}{v_0} - \frac{\sin(\alpha^*)}{v_1}\right) + \frac{x}{v_1} \\
&= \frac{2h_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{v_1^2}}}\left(\frac{1}{v_0} - \frac{v_0}{v_1^2}\right) + \frac{x}{v_1} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Kopfwelle ("Refraktierte Welle")



$$t_R = \frac{2h_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}}} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{v_0}{v_1^2} \right) + \frac{x}{v_1}$$

$$= \frac{2h_0}{v_0} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}} + \frac{x}{v_1}$$

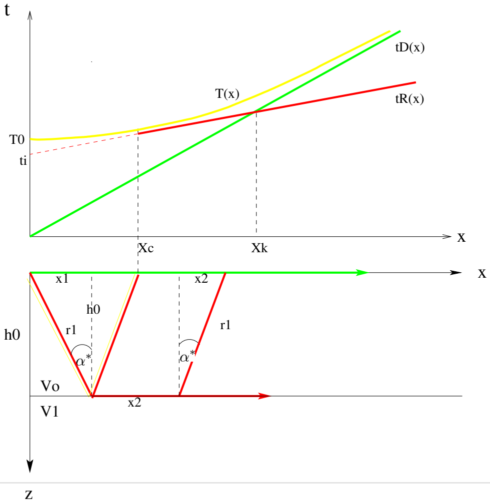
$$= 2h_0 \sqrt{\frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v_1^2}} + \frac{x}{v_1}$$

$$\boxed{t_R = t_i + \frac{x}{v_1}}$$

$t_i = 2h_0 \sqrt{v_0^{-2} - v_1^{-2}}$ "Intercept-Zeit"

Laufzeitkurve der Kopfwelle ist eine Gerade.

Kopfwelle ("Refraktierte Welle")

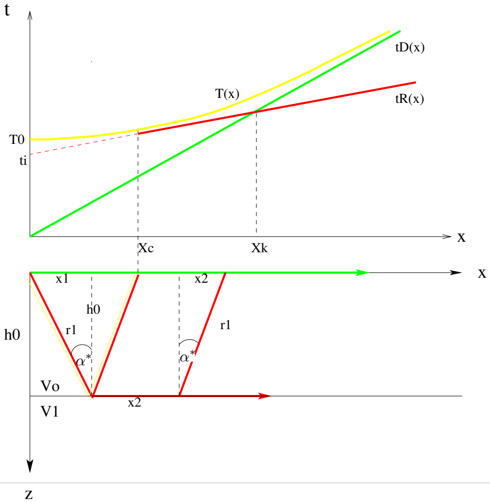


Kritische Entfernung

Die Kopfwelle ist zum ersten Mal in der kritischen Entfernung x_c beobachtbar. Hier berühren sich Reflexion und Kopfwelle: $t_R(x_c) = T(x_c)$ und $\frac{\partial t_R}{\partial x}(x_c) = \frac{\partial T}{\partial x}(x_c)$.
Die kritische Entfernung lässt sich berechnen aus

$$x_c \quad = \quad 2x_1 = 2h_0 \tan(\alpha^*)$$

Kopfwelle ("Refraktierte Welle")



Überholentfernung
In der Überholentfernung x_k überholt die Kopfwelle die direkte Welle. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
t_D(x_k) &= t_R(x_k) \\
\frac{x_k}{v_0} &= \frac{x_k}{v_1} + 2h_0\sqrt{v_0^{-2} + v_1^{-2}} \\
x_k &= 2h_0 \frac{\sqrt{v_0^{-2} + v_1^{-2}}}{v_0^{-1} - v_1^{-1}} \\
&= \ldots \\
x_k &= 2h_0 \sqrt{\frac{v_1 + v_0}{v_1 - v_0}}
\end{aligned}
$$

Agenda

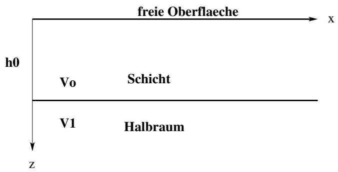
- Brechungsgesetz - Konsequenzen
- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung
- Datenbeispiel
- Zusammenfassung

Akustische Simulation

Akustischen Wellengleichung beschreibt Wellenausbreitung in Flüssigkeiten/Gasen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) , \quad V_p = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}, V_s = 0$$

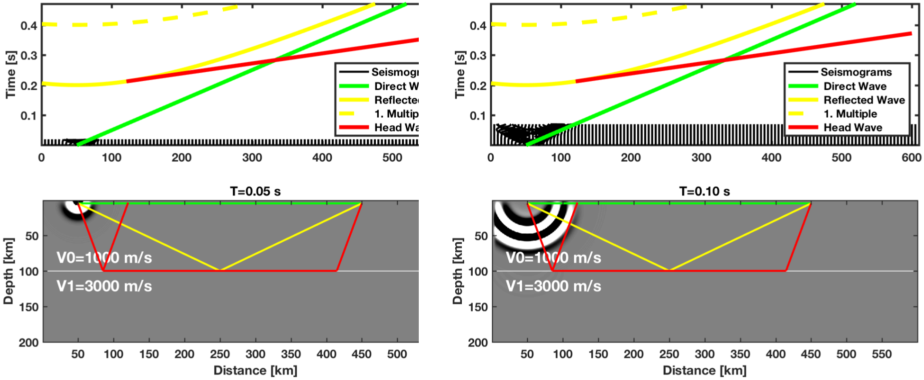
p: Druck, ρ: Dichte, λ: Lamé Parameter



Schicht über Halbraum. $h_0 = 100m$, $V_{p0} = 1000m/s$, $V_{p1} = 3000m/s$.

Akustische Simulation

Lösung der akustischen Wellengleichung

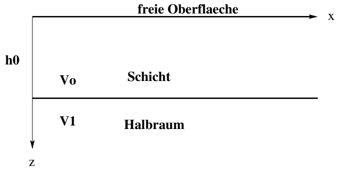


Elastische Simulation

Elastische Wellengleichung beschreibt Wellenausbreitung in der festen Erde:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

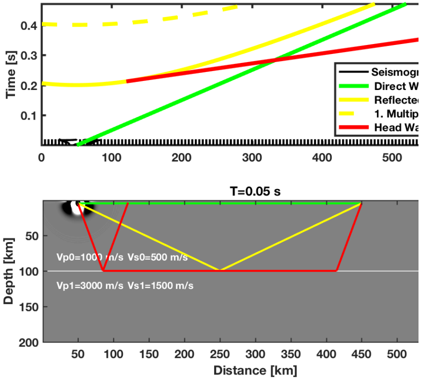
u_i: Verschiebung, ρ: Dichte, λ, μ: Lamé Parameter

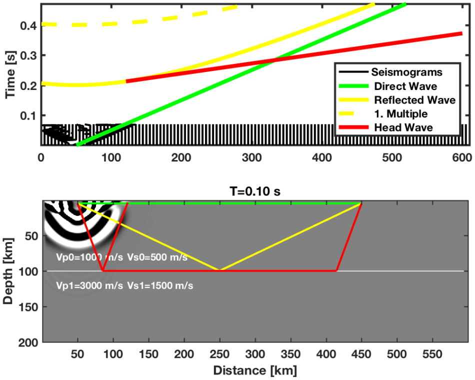


Schicht über Halbraum. $h_0 = 100m$, $V_{p0} = 1000m/s$, $V_{p1} = 3000m/s$, $V_{s0} = 500m/s$, $V_{s1} = 1500m/s$, .

Elastische Simulation

Lösung der elastischen Wellengleichung

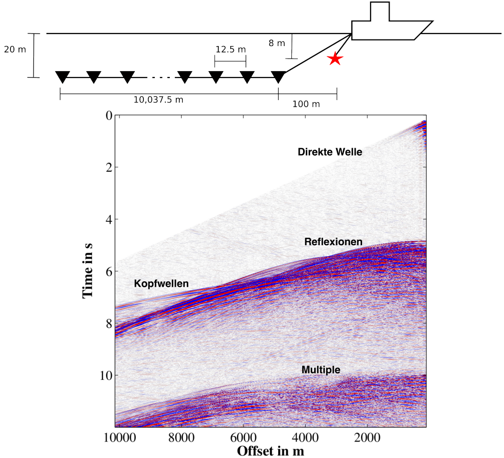




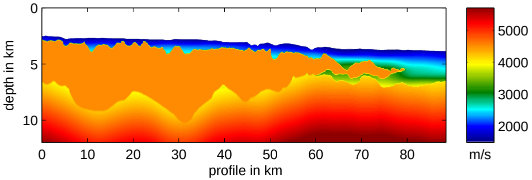
Agenda

- Brechungsgesetz - Konsequenzen
- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung
- Datenbeispiel
- Zusammenfassung

Beispiel marine Streamer-Daten (Salzerkundung Offshore Angola)

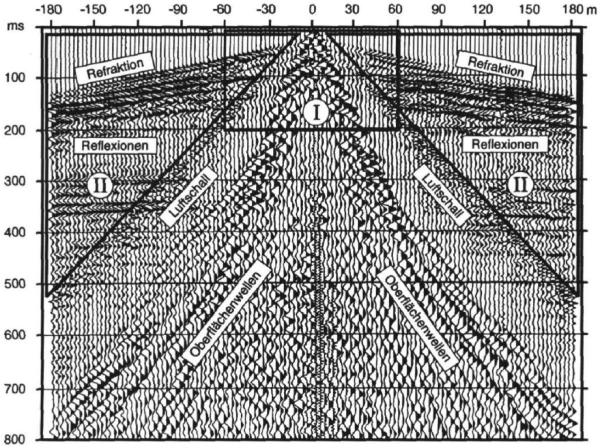


- Typische marine Daten
- Wassertiefe 2-3 km
- Reflexionen von der Salzoberkante
- Kopfwelle von der Salzoberkante



Geschwindigkeitsmodell (Click to play)

Beispiel Landdaten (Onshore)



- Typische Landdaten
- Starke Amplituden von Oberflächenwellen
- Reflexionen, Refraktionen (Kopfwellen), S-Wellen, Luftschall

Agenda

- Brechungsgesetz - Konsequenzen
- Schicht über Halbraum
  - Laufzeitgleichungen
  - Simulationen der Wellenausbreitung
- Datenbeispiel
- Zusammenfassung

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Brechungsgesetz ergibt sich aus dem Fermatschen Prinzip. Es beschreibt weitgehend die Strahlenausbreitung in 2D geschichteten Medien.

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Brechungsgesetz ergibt sich aus dem Fermatschen Prinzip. Es beschreibt weitgehend die Strahlenausbreitung in 2D geschichteten Medien.
- Im dem Fall einer söhligen Schicht über einem Halbraum breiten sich im akustischen Fall (z.B. Wasser) die direkte Welle, eine Kopfwelle sowie Reflexionen aus.

Zusammenfassung

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Brechungsgesetz ergibt sich aus dem Fermatschen Prinzip. Es beschreibt weitgehend die Strahlenausbreitung in 2D geschichteten Medien.
- Im dem Fall einer söhligen Schicht über einem Halbraum breiten sich im akustischen Fall (z.B. Wasser) die direkte Welle, eine Kopfwelle sowie Reflexionen aus.
- Die Laufzeitgleichungen für die direkte Welle und die Kopfwelle sind linear, die Laufzeitgleichung für die Reflexion hyperbolisch.
- Im elastischen Fall (Erde) kommen die Oberflächenwelle und S-Wellen dazu. Die Wellen können wechselseitig konvertieren.

Zusammenfassung

- Das Brechungsgesetz ergibt sich aus dem Fermatschen Prinzip. Es beschreibt weitgehend die Strahlenausbreitung in 2D geschichteten Medien.
- Im dem Fall einer söhligen Schicht über einem Halbraum breiten sich im akustischen Fall (z.B. Wasser) die direkte Welle, eine Kopfwelle sowie Reflexionen aus.
- Die Laufzeitgleichungen für die direkte Welle und die Kopfwelle sind linear, die Laufzeitgleichung für die Reflexion hyperbolisch.
- Im elastischen Fall (Erde) kommen die Oberflächenwelle und S-Wellen dazu. Die Wellen können wechselseitig konvertieren.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Thomas.Bohlen@kit.edu

http://www.gpi.kit.edu/