Übungen zur Einführung in die Geophysik II (SS 2017)

Vorlesung: Dr. Ellen Gottschämmer (ellen.gottschaemmer@kit.edu)
Übung: Martin Pontius (martin.pontius@kit.edu)
Übungstermin und -ort: Do, 11.05.2017, 08:00-09:30, Gebäude 30.22 Hörsaal A

Lösungen zu Übungsblatt 1: Radiometrische Altersbestimmung von Gesteinen und Eulersches Theorem

Aufgabe 1: Radiokarbonmethode

a) Verwende die Gleichung, die das Verhältnis von Mutter- zu Tochteratomen beschreibt (Gleichung 1.3 im Skript):

$$\delta_O(t) = \delta_O(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

Hier steht $\delta_O(0)$ für das Verhältnis von C^{14} zu C^{12} im Organismus zum Zeitpunkt $t = 0$, also $1,6 \cdot 10^{-12}$, da wir annehmen, dass sich das Ausgangsverhältnis nicht geändert hat und dem Ausgangswert von heute entspricht. $\delta_O(t)$ steht für das gemessene Verhältnis von C^{14} zu C^{12} im abgestorbenen Organismus zum heutigen Zeitpunkt also $0,6 \cdot 10^{-12}$. t beschreibt dann die Zeit, die seit dem Tod des Organismus vergangen ist und für die Zerfallskonstante λ gilt die Beziehung der Halbwertszeit (Gleichung (1.1) aus dem Skript)

$$T_{1/2} = \ln(2)/\lambda = 0,693/\lambda.$$

Mit der Halbwertszeit für den Kohlenstoffzerfall $T_{1/2} = 5730\,\text{a}$ erhält man $1/\lambda = 8267\,\text{a}$. Dies setzt man nun mit den gegebenen Werten in die erste Gleichung ein und erhält $t = 8109\,\text{a}$ für die Zeit, die vergangen ist, seit der Organismus abstarb.

b) Hier muss die Gleichung aus dem Skript erweitert werden, da wir für das Ausgangsverhältnis von C^{14} zu C^{12}, $\delta_O(0)$, nicht mehr einfach den heutigen Wert annehmen können. Wir nennen das Ausgangsverhältnis δ_A.
In 1000 Jahren soll das Verhältnis eine Änderung um 1 % erfahren haben. Es gilt also

$$\delta_A(t = 1000) = 0,99 \cdot \delta_A(0), \text{wenn das Verhältnis kleiner geworden ist bzw.}$$
$$\delta_A(t = 1000) = 1,01 \cdot \delta_A(0), \text{wenn das Verhältnis größer geworden ist.}$$

Dabei ist $\delta_A(t = 1000)$ das Verhältnis zum heutigen Zeitpunkt, also 1000 Jahre später als $t = 0$. Zur Beschreibung der Änderung wird nun ein Exponentialansatz gemacht:

$$\delta_A(t) = \delta_A(0) \cdot e^{k \cdot t}$$

Einsetzen von $t = 1000$ in der letzten Gleichung und Gleichsetzen der Gleichungen führt dann zu

$$0,99 \cdot \delta_A(0) = \delta_A(0) \cdot e^{k_1 \cdot 1000}, \text{wenn das Verhältnis kleiner geworden ist bzw.}$$
$$1,01 \cdot \delta_A(0) = \delta_A(0) \cdot e^{k_2 \cdot 1000}, \text{wenn das Verhältnis größer geworden ist.}$$

Daraus lassen sich die Konstanten k_1 und k_2 berechnen und es folgt:

$$k_1 = -1,005 \cdot 10^{-5} \text{ und } k_2 = 0,995 \cdot 10^{-5}.$$

Dann gilt für $\delta_A(t)$ mit dem Ausgangsverhältnis $\delta_A(0)$ zum Todeszeitpunkt:

$$\delta_A(t) = \delta_A(0) \cdot e^{k_1 \cdot t} = \delta_A(0) \cdot e^{-1,005 \cdot 10^{-5} \cdot t}, \text{wenn das Verhältnis kleiner geworden ist bzw.}$$
$$\delta_A(t) = \delta_A(0) \cdot e^{k_2 \cdot t} = \delta_A(0) \cdot e^{0,995 \cdot 10^{-5} \cdot t}, \text{wenn das Verhältnis größer geworden ist.}$$

Dieses zeitabhängige Ausgangsverhältnis $\delta_A(t)$ setzt man nun in die Ursprungsgleichung anstelle vom zeitunabhängigen Verhältnis $\delta_O(0)$ ein. Das führt zur Erweiterung der Gleichung und zu folgender Form:

$$\delta_O(t) = \delta_A(0) \cdot e^{k_1 \cdot t} \cdot e^{-\lambda t} = \delta_A(0) \cdot e^{-(1,005 \cdot 10^{-5} + \lambda)t} \text{ und}$$
$$\delta_O(t) = \delta_A(0) \cdot e^{k_2 \cdot t} \cdot e^{-\lambda t} = \delta_A(0) \cdot e^{(0,995 \cdot 10^{-5} - \lambda)t}.$$

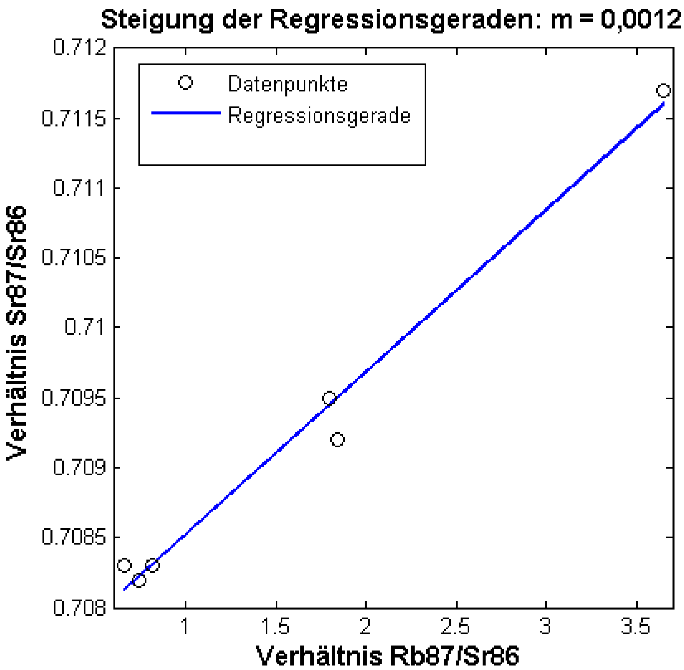
Jetzt kann für $\delta_A(0)$ das Ausgangsverhältnis, also $1,6 \cdot 10^{-12}$, eingesetzt werden und für $\delta_O(t)$ da heute gemessene Verhältnis, also $0,6 \cdot 10^{-12}$. Mit dem Wert für λ aus Aufgabenteil a und den berechneten Konstanten k_1 und k_2 erhält man $t_1 = 8836$ a und $t_2 = 7490$ a.
Ist das Verhältnis $\delta_A(t)$ kleiner geworden, würde man bei der Annahme eines konstanten Verhältnisses das Alter der Probe also unterschätzen, da man annehmen würde, die Probe sei 8109 a alt anstelle von 8836 a. Umgekehrt würde man das Alter der Probe überschätzen, wenn man ein konstantes Verhältnis annehmen würde, das Verhältnis in Wirklichkeit aber größer geworden ist.

Aufgabe 2: Rubidium-Strontium-Zerfall

a) Die Isochronengleichung (Skript, Gleichung 1.8, Achtung, dort Vorzeichenfehler!) lautet:

$$\delta_S(t) = \delta_S(0) + \delta_R(t) \cdot (e^{\lambda t} - 1). \tag{1}$$

Hier ist $\delta_S(0)$ das Ausgangsverhältnis von Sr^{87}/Sr^{86} im Gestein, $\delta_S(t)$ das nach der Zeit t gemessene Isotopenerhältnis von Sr^{87}/Sr^{86} im Gestein und $\delta_R(t)$ das gemessene Verhältnis von Rb^{87}/Sr^{86}. λ steht für die Zerfallskonstante von Rubidium.



Trägt man $\delta_S(t)$ über $\delta_R(t)$ auf und berechnet eine Regressionsgerade durch die Werte, so hat diese die Steigung 0,0012. Das entspricht genau $(e^{\lambda t} - 1)$ in der Isochronengleichung. Aus $m = (e^{\lambda t} - 1) = 0,0012$ folgt $e^{\lambda t} = 1,0012$ und $t = \ln(1,0012)/\lambda = 8,4456 \cdot 10^7\,\text{a} = 84,456\,\text{Ma}$.

b) Löst man die Isochronengleichung nun nach $\delta_S(0)$ auf, so lautet sie:

$$\delta_S(0) = \delta_S(t) - \delta_R(t) \cdot (e^{\lambda t} - 1). \tag{2}$$

Einsetzen aller Werte führt zu einem Wert von $\delta_S(0)$ für jede Granodiorit-Probe. Der Mittelwert aller sechs Werte beträgt $\delta_S(0) = 0,707298$. Dieses Isotopenverhältnis herrschte also zur Zeit des Erstarrens der Proben vor.

Aufgabe 3: Unterschied von Gesamtgesteinsisotopenverhältnis und Mineralanalyse

Das Diagramm zeigt die Evolution des Rb-Sr-Verhältnisses von drei Gesteinen (A, B, C), welche vor T Jahren aus demselben Magma entstanden sind und dann vor der Zeit $t(<< T)$ metamorphisiert wurden. Die drei Gesteine sind nah beieinander (im Bereich mehrerer hundert Meter) gefunden worden, so dass man davon ausgeht, dass die Entstehung im Rahmen der Datierungsgenauigkeit zum gleichen Zeitpunkt stattgefunden hat. Sie weisen jedoch einen unterschiedlichen Rubidium-Anteil (im Gesamtgestein gemessen) auf und liegen deshalb auf dem Diagramm zum Zeitpunkt der Entstehung nebeneinander auf einer horizontalen gestrichelten Linie, der Nulllinie. Im Laufe der Zeit wandelt sich Rubidium in Strontium um, so dass sich die Zusammensetzung entlang der gestrichelten Linie von den Punkten A, B und C zu den Punkten A', B' und C' verschiebt. Diese Linie verläuft schräg, da der 87 Sr-Anteil beim Zerfall des Rubidium ansteigt. Die Punkte A', B' und C' liegen wieder auf einer Geraden, die man Isochrone nennt. Die Isochrone bildet mit der Nulllinie einen Winkel, der mit steigender Zeit wächst. Durch die Messung des Winkels erhält man also ein Maß für die Zeit, die seit der Gesteinserstehung vergangen ist.
In der Abbildung kann man aber noch ein zweites Ereignis, nämlich die Metamorphose, datieren. Man geht davon aus, dass es noch einmal zu einem partiellen Aufschmelzen der einzelnen Gesteine kam, bei der aber keine Vermischung der drei Gesteine A, B und C stattgefunden hat. Die Aufschmelzung könnte zum Beispiel durch starken Druck erfolgt sein, aber nur im Zentimeterbereich stattgefunden haben und nicht im Bereich von mehreren hundert Metern. Dabei hat es auf Zentimeterskala noch einmal eine Durchmischung gegeben, so dass diese Minerale jetzt auf die gleiche Weise analysiert werden können wie das Gesamtgestein.
Verschiedene Minerale aus Gestein A, die einen unterschiedlichen Rubidiumgehalt besitzen, liegen nun auf der durchgezogenen Linie, die durch den Punkt A' verläuft. Auch diese schwarzen Punkte schließen mit der Horizontalen einen Winkel ein, der aber geringer ist als der Winkel des Gesamtgesteins, da das metamorphe Ereignis sehr viel später stattgefunden hat als die ursprüngliche Entstehung des Gesteins.
In der Praxis kennt man die Lage der Horizontalen nicht, sondern kann sie durch den Schnittpunkt mit der vertikalen Achse, an der der Rubidiumgehalt gleich Null ist, bestimmen.

Aufgabe 4: Eulersches Theorem

Wir betrachten die Bewegung der Nordamerikanischen Platte (NA) im Verhältnis zur Pazifischen Platte (PA) im Ort San Francisco (37,8°N, 122°W)

a) Die Kobreiten (Θ und Θ') berechnen sich zu $\Theta = 90° - 48,7° = 41,3°$ und $\Theta' = 90° - 37.8° = 52,2°$. Die östliche Länge Ψ des Rotationspols ist bereits angegeben ($\Psi = -78,2°$ oder $\Psi = 281,8°$, da 2π-periodisch). Die östliche Länge Ψ' der Lage der Stadt San Francisco beträgt $\Psi' = 360° - 122° = 238°$ (oder $\Psi' = -122°$, da 2π-periodisch).

b) Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man für Δ einen Winkel von $33,2°$.

c) Der Winkel Δ im Bogenmaß beträgt 0,579. Für die Strecke s an der Erdoberfläche gilt $s = r_E \, \Delta$ mit dem Erdradius $r_E = 6371$ km. Setzt man die Werte ein, so erhält man für die Entfernung der beiden Punkte an der Erdoberfläche $s = 3691$ km.

d) Für die Geschwindigkeit u gilt $u = \omega \, r_E \, \sin(\Delta)$ mit dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit in Radianten. Dieser beträgt $\omega = 0,75$ deg/Ma $= 0,0131$ rad/Ma. Setzt man die Werte ein, so erhält man eine Geschwindigkeit von $u = 45,65$ mm/a.

e) Angenommen die Verwerfung würde genau durch den Rotationspol laufen, dann wäre an dieser Stelle die Geschwindigkeit $u = 0$, da $\sin(0) = 0$.