Übungen zur Einführung in die Geophysik II (SS 2017)

Vorlesung: Dr. Ellen Gottschämmer (ellen.gottschaemmer@kit.edu)
Übung: Martin Pontius (martin.pontius@kit.edu)
Übungstermin und -ort: Do, 18.05.2017, 08:00-09:30, Gebäude 30.22 Hörsaal B

Lösungen zu Übungsblatt 2: Elastische Eigenschaften von Gesteinen, seismische Wellen und ihre Wechselwirkungen

Aufgabe 1: Polarisation von seismischen Wellen

a) Die P-Welle (Longitudinalwelle, Kompressionswelle) schwingt in Ausbreitungsrichtung, die S-Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (Transversalwelle, Scherwelle).

b) Die Rayleigh-Welle schwingt retrograd elliptisch in der Strahlebene (Überlagerung aus P- und SV-Welle), die Love-Welle horizontal außerhalb der Strahlebene (konstruktiv interferierende SH-Welle).

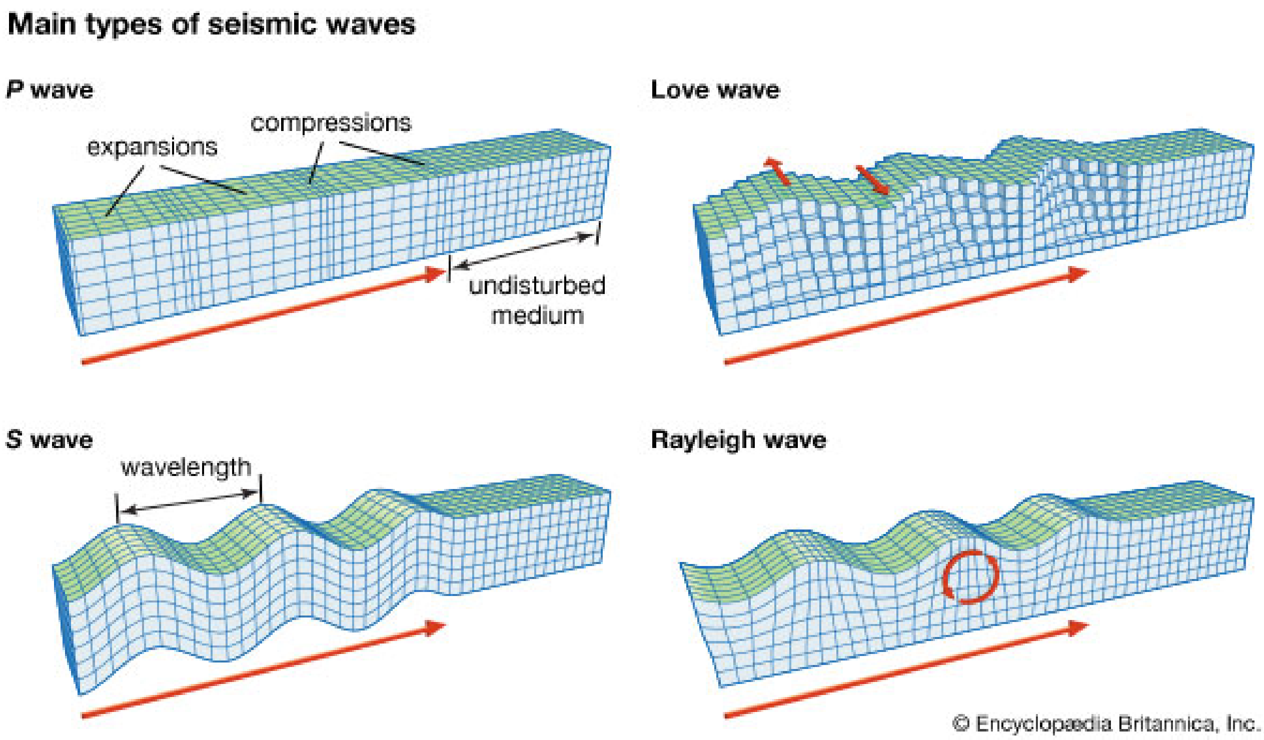

Abbildung 1: Polarisation seismischer Wellen (Quelle: https://www.britannica.com/science/seismic-wave).

Aufgabe 2: Oberflächenwellen

a) Dispersion im Allgemeinen beschreibt die Frequenzabhängigkeit einer physikalischen Größe, üblicherweise die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Wellen (seismisch, elektromagnetisch,...). Die Dispersion ist generell mit der Dämpfung verbunden (s. Kramers-Kronig-Beziehung). Bei Oberflächenwellen tritt eine weitere Art von Dispersion auf, welche im Folgenden geometrische Dispersion genannt wird. Geometrische Dispersion bei seismischen Oberflächenwellen kommt zustande, wenn der Untergrund aus Schichten verschiedener Geschwindigkeiten besteht. Da langwellige Wellen eine höhere Eindringtiefe haben (für Rayleigh-Wellen etwa $\lambda/4$), 'sehen' diese die höheren Geschwindigkeiten und breiten sich folglich schneller aus. Daher sind Love-Wellen immer dispersiv (vgl. A3b, Randbedingungen), Rayleigh-Wellen in einem homogenen Halbraum allerdings nicht.

b) Als Randbedingungen für Love-Wellen wird eine freie Oberfläche sowie eine Oberflächenschicht benötigt, deren S-Wellen-Geschwindikeit geringer sein muss als die S-Wellengeschwindigkeit der darunter liegenden Schicht (vgl. Abbildung 2a).
Love-Wellen können als konstruktiv interferierende SH-Wellen (Polarisation senkrecht zur Zeichenebene) interpretiert werden. Ab einem bestimmten Einfallswinkel (Grenzwinkel, kritischer Winkel) kommt es zu einer Totalreflexion, das heißt eine Transmission ist dann unmöglich (vgl. Abbildung 3). Der Grenzwinkel, Θ_g, ergibt sich aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz für einen Ausfallswinkel von 90°:

$$\Theta_\mathrm{g} = \arcsin\frac{\beta_1}{\beta_2}. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet β_i die S-Wellen-Geschwindigkeit in Schicht i. Die Welle verliert folglich wenig Energie (nur durch Dissipation und geometrische Ausbreitungsverluste). Die Welle ist praktisch in der Zwischenschicht gefangen, indem sie zwischen freier Oberfläche und Schichtgrenze hin- und her reflektiert wird. Diese überkritisch reflektierten SH-Wellen interferieren konstruktiv miteinander und erreichen dadurch große Amplituden und können weite Strecken zurücklegen. Die Geschwindigkeit der Love-Wellen liegt zwischen den S-Wellen-Geschwindigkeiten der oberen Schicht und des darunter liegenden Halbraumes.

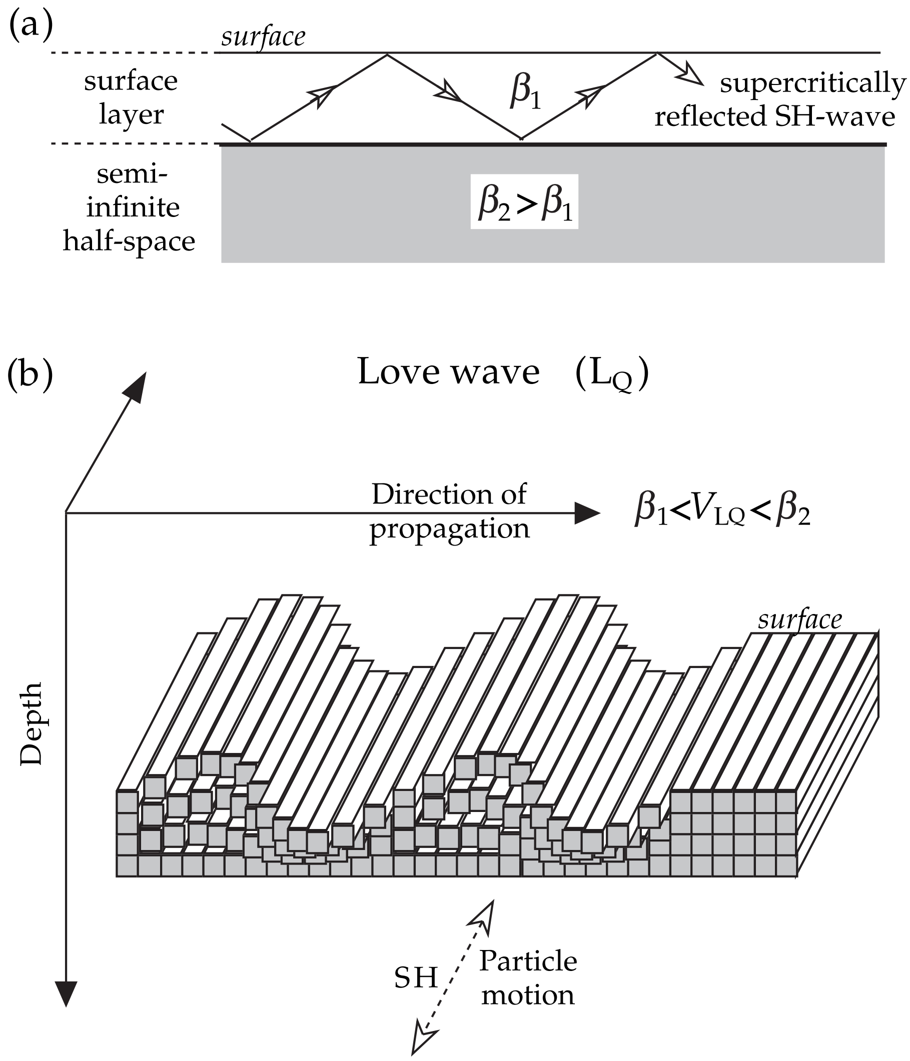

Abbildung 2: (a) Randbedingungen für die Enstehung von Love-Wellen und (b) Polarisation der Love-Welle (aus 'William Lowrie (2007): *Fundamentals of geophysics*').

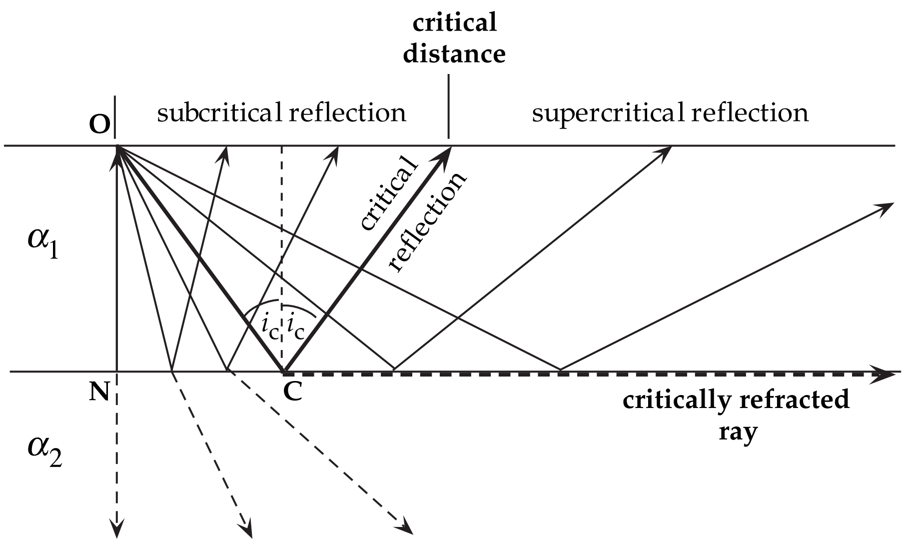

Abbildung 3: Totalreflexion (aus 'William Lowrie (2007): *Fundamentals of geophysics*').

Aufgabe 3: Poissonzahl

a) Für inkompressible Körper ändert sich das Volumen nicht:

$$\frac{\Delta V}{V} = 0$$

Wir betrachten einen Quader mit dem Volumen $V = x \cdot y \cdot z$. Nun wird der Quader verformt, so dass für die Seitenlängen nun $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ und $z+\Delta z$ gilt. Die relative Volumenänderung kann dann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V} &= \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) - xyz}{xyz} \\
&= \frac{(xy + x\Delta y + \Delta xy + \Delta x\Delta y)(z+\Delta z) - xyz}{xyz} \\
&= \frac{(xyz + xy\Delta z + x\Delta yz + x\Delta y\Delta z + \Delta xyz + \Delta xy\Delta z + \Delta x\Delta yz + \Delta x\Delta y\Delta z) - xyz}{xyz}
\end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung der kleinen Größen $x\Delta y\Delta z$, $\Delta xy\Delta z$, $\Delta x\Delta yz$ und $\Delta x\Delta y\Delta z$ ergibt sich:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

Mit Hilfe der Definition der Poissonzahl, $\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}} = -\frac{\epsilon_{zz}}{\epsilon_{xx}}$, und obiger Bedingung erhält man:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_{xx} - \nu\epsilon_{xx} - \nu\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx}(1-2\nu) = 0$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nur erfüllt, wenn $\nu = 0,5$ gilt.
Weiter nehmen wir an, dass sich bei einer Längsdehnung der Körper nicht quer dehnt: $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$. Dann ergibt sich aus der Definiton der Poissonzahl:

$$-\nu\epsilon_{xx} = 0$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen nur für $\nu = 0$ erfüllt.
Es gilt also im Rahmen der obigen Annahme:

$$0 < \nu < 0,5. \tag{2}$$

b) Für die Poissonzahl gilt

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

und somit für $\lambda = \mu$:

$$\nu = 0,25.$$

Aufgabe 4: Seismische Struktur der Erde

a) Für den Schermodul gilt:

$$\mu = v_\mathrm{S}^2 \cdot \rho$$

Der Kompressionsmodul kann anschließend wie folgt berechnet werden:

$$K = v_\mathrm{P}^2 \cdot \rho - \frac{4}{3}\mu$$

Umformen der gegebenen Gleichungen für den Kompressions- und den Schermodul ergibt:

$$E = 3K(1 - 2\nu) \text{ und } E = 2\mu(1 + \nu)$$

Einsetzen und Auflösen nach ν ergibt

$$\begin{aligned} 3K - 6K\nu &= 2\mu + 2\mu\nu \\ \Leftrightarrow -2\nu(3K + \mu) &= 2\mu - 3K \\ \Leftrightarrow \nu &= \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}. \end{aligned}$$

In Abhängigkeit der seismischen Geschwindigkeiten kann die Poissonzahl wie folgt geschrieben werden:

$$\nu = \frac{v_\mathrm{P}^2 - 2v_\mathrm{S}^2}{2(v_\mathrm{P}^2 - v_\mathrm{S}^2)}.$$

Tiefe (km)	K (10^{10} Pa)	μ (10^{10} Pa)	ν
100	13.0	6.7	0.280
500	21.9	10.5	0.293
1000	35.3	18.6	0.275
2000	51.5	24.5	0.294
2890	65.5	29.4	0.305
2900	64.5	0	0.5
4000	102.4	0	0.5
5000	128.6	0	0.5
5500	138.3	16.6	0.442
6470	142.5	17.6	0.441

b) Die Strukturierung in Mantel, äußeren Kern und inneren Kern ist erkennbar. Der Schermodul im äußeren Kern ist null, woraus auf seinen flüssigen Charakter geschlossen werden kann. Da der Schermodul (außerdem weitesgehend die seismischen Geschwindigkeiten) im inneren Kern geringer ist als im Mantel, kann gefolgert werden, dass der innere Kern weniger starr ist als der Mantel.