Übungen zur Einführung in die Geophysik II (SS 2017)

Vorlesung: Dr. Ellen Gottschämmer (ellen.gottschaemmer@kit.edu)
Übung: Martin Pontius (martin.pontius@kit.edu)
Übungstermin und -ort: Do, 29.06.2017, 08:00-09:30, Gebäude 30.22 Hörsaal B

Lösungen zu Übungsblatt 5: Schwere und Gravimetrie

Aufgabe 1: Fluchtgeschwindigkeit

Die Arbeit W, die aufgewendet werden muss, um eine Masse m von der Erdoberfläche in sehr große (unendliche) Entfernung zu bringen, berechnet man aus dem Schwerepotential ϕ. Es gilt für die Arbeit W mit der Masse des Probekörpers m, der Erdmasse M_E, dem Erdradius R_E und der Gravitationskonstanten G:

$$W = m(\phi(R_\mathrm{E}) - \phi(R_\infty)) = G\frac{M_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}} \text{ (der zweite Term geht gegen 0 und fällt damit weg).}$$

Diese Arbeit setzt man nun mit der kinetischen Energie gleich, die die Probemasse hat, nämlich $E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$:

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = G\frac{M_\mathrm{E}m}{R_\mathrm{E}}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}}$$

Löst man diese Gleichung nach v_∞ auf und setzt die Konstanten ein, so erhält man $v_\infty = 11,2\,\mathrm{km/s} = 40320\,\mathrm{km/h}$. Diese Geschwindigkeit müsste eine Probemasse haben, um aus dem Gravitationspotential der Erde zu entfliehen ('Fluchtgeschwindigkeit'). Sie wird auch 2. kosmische Geschwindigkeit genannt.

Aufgabe 2: Bewegungsgleichung für einen Körper durch Erdmittelpunkt

Ein Körper der Masse m, der in ein Loch durch den Erdmittelpunkt fällt, erfährt eine beschleunigende Kraft F_B zum Mittelpunkt:

$$F_\mathrm{B} = -mg(r) = -mg_\mathrm{E}\frac{r}{R_\mathrm{E}}.$$

Hierbei ist R_E der Erdradius, r der Abstand des Körpers zum Mittelpunkt und g_E die Gravitationsbeschleunigung. Außerdem wirkt auf den Körper die Newtonsche Trägheitskraft

$$F_\mathrm{T} = m\ddot{r}$$

Das Gleichgewicht beider Kräfte lässt sich mathematisch durch das Gleichsetzen der beiden Formeln beschreiben:

$$\ddot{r} + g_\mathrm{E}\frac{r}{R_\mathrm{E}} = 0.$$

Diese Gleichung erinnert der Form nach an eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$, wobei T die Periode der Schwingung ist:

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0.$$

Eine Schwingungsgleichung lässt sich durch folgenden Ansatz lösen:

$$r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

Folgende Anfangsbedingungen werden verwendet:

$$r(t=0) = R_\mathrm{E}$$
$$\dot{r}(t=0) = 0$$

Die Anfangsbedingungen bedeuten, dass sich der Körper am Anfang außen an der Erdoberfläche, also genau einen Erdradius vom Mittelpunkt entfernt befindet und zu dieser Zeit die Geschwindigkeit 0 hat. Setzt man die Anfangsbedigungen in den Ansatz ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$r(t) = R_\mathrm{E}\cos(\omega t)$$

Es handelt sich also um eine periodische Bewegung, deren Amplitude vom Erdradius abhängt. Mit $\omega^2 = \frac{g_\mathrm{E}}{R_\mathrm{E}}$ und $\omega = 2\pi/T$ errechnet man dann die Periode T der Schwingung zu $T = 5061\,\mathrm{s} = 84\,\mathrm{min}$.

Aufgabe 3: Baryzentrum und Gezeiten

Wir legen die Masse des Primärkörpers mit M fest und die Masse des Satelliten mit m. Die Distanz ihrer beiden Zentren sei r und die Distanz des Primärkörpers vom Baryzentrum d. Für den gewichteten Schwerpunkt gilt $M \cdot d = m(r-d)$, somit:

$$d = \frac{m}{M+m}r$$

Mit den gegebenen Werten folgt:

Paar	Abstand Baryzentrum-Primärkörper	Radius Primärkörper	Lage
Sonne-Erde	449 km	696342 km	innerhalb
Sonne-Jupiter	742800 km	696342 km	außerhalb
Erde-Mond	4670 km	6371 km	innerhalb
Pluto-Charon	2591 km	1137 km	außerhalb

Die Bewegung des Zweikörpersystems Erde-Mond ist in Abbildung 1 skizziert. Die Rotation der Erde um die eigene Achse wird in diesem Modell ("Revolution ohne Rotation") ignoriert. Das Baryzentrum ist mit S gekennzeichnet und das Zentrum der Erde mit E. Zunächst steht der Mond rechts von der Erde (a). Nach etwa einer Woche hat sich der Mond um ein Viertel um das Baryzentrum weiter bewegt (b). Entsprechend bewegt sich die Erde weiter, so dass sich das Baryzentrum innerhalb der Erde verlagert. Das Baryzentrum bleibt auch bei der weiteren Bewegung an der gleichen Stelle (relativ zu Erde und Mond, tatsächlich bewegt es sich auf einer Ellipsenbahn um die Sonne). Erde und Mond laufen auf einer Kreisbahn um das Baryzentrum. Diese Bewegung hat zur Folge, dass die Punkte 1-4 ihrerseits eine Kreisbahn beschreiben. Folglich ist die Zentrifugalkraft in jedem Punkt der Erde gleich groß und parallel zur Verbindungslinie der Zentren von Erde und Mond.

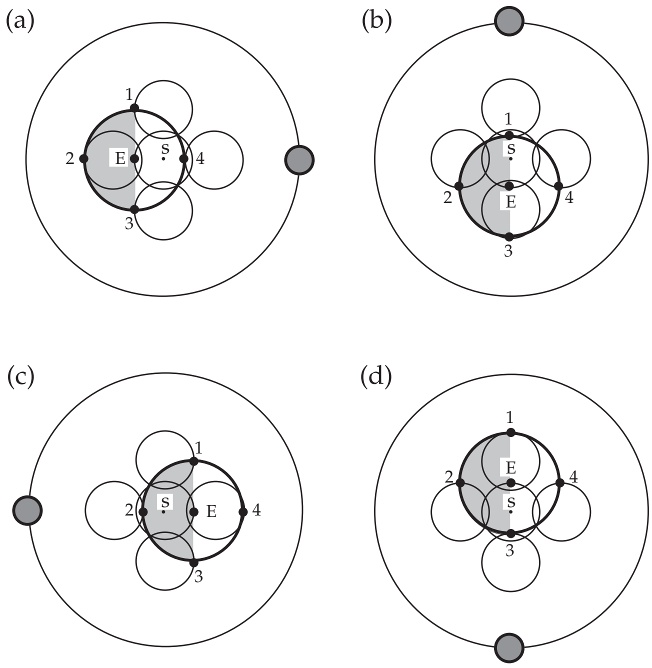

Abbildung 1: Bildquelle: William Lowrie (2007): *Fundamentals of geophysics*

Die Gezeitenkräfte ergeben sich als Differenz zwischen Gravitations- und Zentrifugalkräften (s. Abbildung 2). Im Schwerpunkt der Erde heben diese sich genau auf, auf der Mond zugewandten Seite dominieren die Gravitationskräfte und auf der Mond abgewandten Seite die Zentrifugalkräfte. Was ist aber mit der Eigenrotation der Erde? Kann diese einfach ignoriert werden? Ja und nein. Bei der Entstehung der Gezeiten spielt diese keine Rolle, da sie zeitlich konstant ist (stationär). Die Eigenrotation der Erde sorgt dafür, dass die Erde an den Polen abgeplattet ist (Rotationsellipsoid). Allerdings spielt die Eigenrotation eine Rolle für einen Beobachter auf der Erde. Ein Beobachter wird unter dem Gezeitenfeld hindurchbewegt und sieht daher immer eine andere Komponente. Durch die Symmetrie des Gezeitenfeldes gibt es eine 12h-Periode, da bei einer vollen Umdrehung (24 h) z.B. zweimal ein Flutberg zu sehen ist. Da die Rotationsachse der Erde geneigt ist, wird die 12h-Periode durch eine 24h-Periode überlagert, d.h. dass die Flutberge verschieden groß sind.

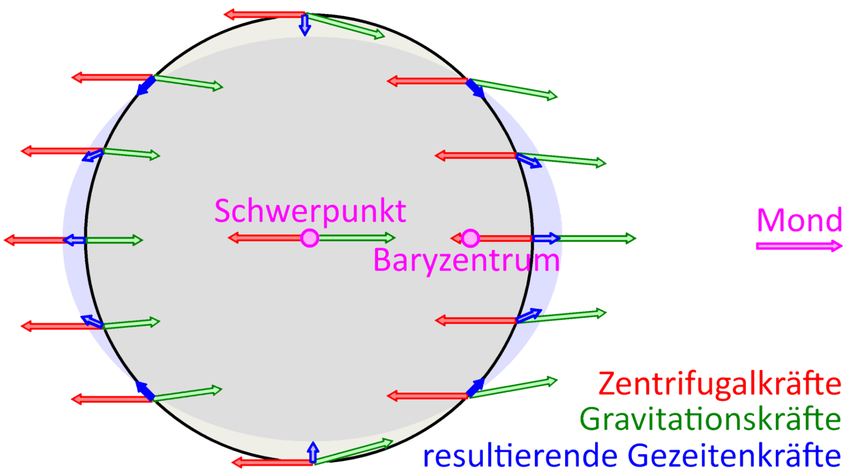

Abbildung 2: Bildquelle: *https://de.wikipedia.org/wiki/Gezeiten*

Aufgabe 4: Berechnung von Erdumfang und -radius in der Antike

a) Die Abweichung zwischen den Einfallswinkeln der Sonnenstrahlen beträgt $\delta = 360°/50 = 7,2°$. Die Distanz a zwischen Alexandria und Syene beträgt $a = 5000 \cdot 0,185\,\text{km} = 925\,\text{km}$. Der Umfang U des (Erd-)Kreises mit Radius R_E beträgt: $U = 2\pi R_\text{E}$. Ein Kreisbogen verhält sich zum Umfang des gesamten Kreises, wie der Winkel δ zum Vollwinkel 360°. Also gilt: $a/U = \delta/360°$. Der Umfang einer sphärischen Erde ergibt sich somit zu $U = a \cdot 360/\delta = 46250\,\text{km}$ und ihr Radius zu $R_\text{E} = U/(2\pi) = 7360,916\,\text{km}$.

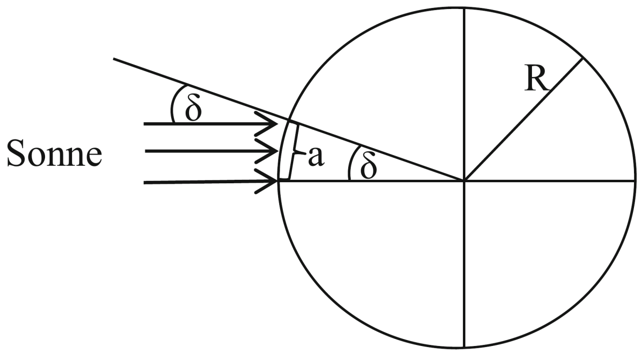

Abbildung 3: Bildquelle: Christoph Clauser (2016): *Einführung in die Geophysik*

b) Der berechnete Wert weicht vom tatsächlichen Wert ab, da Alexandria und Syene nicht auf einem Längengrad liegen und da sowohl Entfernung (möglicherweise abgeschätzt anhand der Dauer einer Reise zwischen den Städten, "10 Kameltage") als auch Winkel nicht hinreichend genau bestimmt wurden. Zudem ist die Erde keine perfekte Kugel und ein Meridian somit kein perfekter Kreis.

Aufgabe 5: Gravitationsfeld einer Hohlkugel

Die Herleitung folgt der 6. Auflage von 'Wolfgang Demtröder (2012): *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*', S.67 ff.

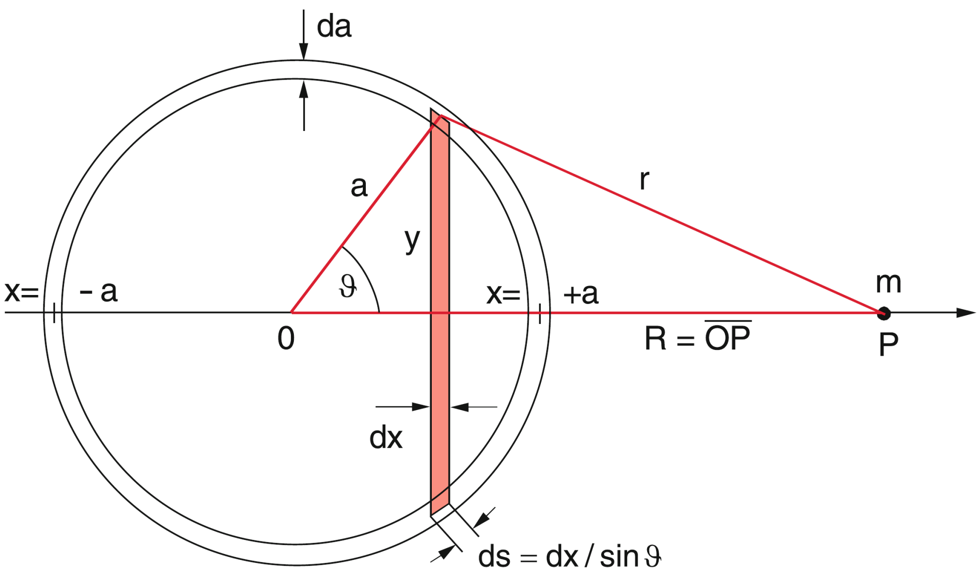

Abbildung 4: Bildquelle: Wolfgang Demtröder (2012): *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*

a) Zunächst wird die Formel für den Außenraum hergeleitet. Dazu teilen wir die Hohlkugel in Segmente der Dicke $\mathrm{d}x$ ein (vgl. Abbildung 2). Die Masse jedes Segmentes wird bei homogener Dichte ρ wie folgt ausgedrückt:

$$\mathrm{d}M = 2\pi y\rho \cdot \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}a$$

Dabei ist $2\pi y$ der Kreisumfang senkrecht zu Bildebene und $\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}a$ die Fläche eines Ausschnittes der Hohlkugel in der Bildebene (näherungsweise ein Parallelogramm). Mit $y = a \cdot \sin(\vartheta)$ und $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x/\sin(\vartheta)$ ergibt sich:

$$\mathrm{d}M = 2\pi a \cdot \rho \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}a$$

Da alle Teile eines Segmentes den gleichen Abstand zum Beobachtungspunkt P haben, kann die potentielle Energie einer Probemasse m bei P, erzeugt durch $\mathrm{d}M$, wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mathrm{d}E_{\text{pot}} = -G\frac{m\mathrm{d}M}{r}$$

Die potentielle Energie der gesamten Hohlkugel erhält man durch Integration über alle $\mathrm{d}M$:

$$E_{\text{pot}} = -\int G\frac{m}{r}\mathrm{d}M$$

Einsetzen der obigen Beziehung ergibt eine Integration über alle $\mathrm{d}x$ von $-a$ bis $+a$:

$$E_{\text{pot}} = -2\pi\rho Gma \cdot \mathrm{d}a \int_{x=-a}^{x=+a} \frac{\mathrm{d}x}{r}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck in der Abbildung erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$r^2 = y^2 + (R-x)^2 = y^2 + x^2 + R^2 - 2Rx = a^2 + R^2 - 2Rx$$

und durch Differentiation $r\ \mathrm{d}r = -R\ \mathrm{d}x$. Einsetzen der letzten Gleichung ergibt:

$$E_{\text{pot}} = \frac{2\pi\rho Gma \cdot \mathrm{d}a}{R} \int_{r=R+a}^{r=R-a} \mathrm{d}r$$

Mit der Masse der gesamten Kugelschale $M = 4\pi a^2\rho\ \mathrm{d}a$ (Oberfläche einer Kugel: $4\pi r^2$) ergibt sich schließlich:

$$\boxed{E_{\text{pot,außen}} = -G\ \frac{m \cdot M}{R}}$$

Im Innenraum der Hohlkugel ändert sich die obere Integrationsgrenze zu $r = a - R$ (anstatt $r = R - a$). Damit ergibt sich für die Integration über $\mathrm{d}r$

$$\int_{r=a+R}^{r=a-R} \mathrm{d}r = -2R$$

und schließlich

$$\boxed{E_{\text{pot,innen}} = -G\ \frac{m \cdot M}{a}}$$

b) Die Gravitationskraft erhält man durch Bildung des Gradienten (konservatives Kraftfeld). Für den Außenraum:

$$F_{G,außen} = -\text{grad}(E_{\text{pot,außen}}) = -\frac{\mathrm{d}E_{\text{pot,außen}}}{\mathrm{d}R}\hat{R} = -G\,\frac{m \cdot M}{R^2}\,\hat{R}$$

Für den Innenraum:

$$F_{G,innen} = -\text{grad}(E_{\text{pot,innen}}) = 0$$

Aus den Betrachtungen kann nun geschlossen werden, dass im Innenraum einer Hohlkugel kein Gravitationsfeld herrscht, sofern keine weiteren Massen existieren. Die Beiträge der Kugelsegmente heben sich exakt auf.

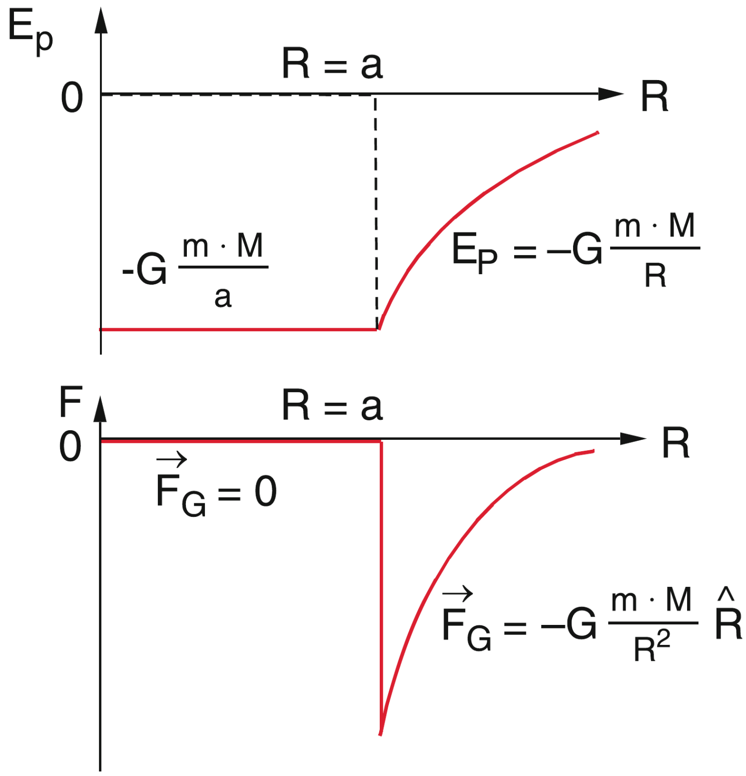

Abbildung 5: Bildquelle: Wolfgang Demtröder (2012): *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*